

# Untersuchungen zur Variabilität im Südlichen Ozean mit dem Ozeanzirkulationsmodell BARBI

Vom Fachbereich für Physik und Elektrotechnik  
der Universität Bremen

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)**  
genehmigte Dissertation

von  
Dipl. Physiker Karsten Lettmann  
aus Bruchhausen-Vilsen

1. Gutachter: Prof. Dr. D.J. Olbers
2. Gutachter: Prof. Dr. Gerrit Lohmann

Eingereicht am: 16.05.2006

Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Das BARBI-Modell</b>	<b>11</b>
2.1	Die Ausgangsgleichungen	11
2.2	Barotrope und barokline Größen	12
2.3	Die barotropen Gleichungen	12
2.4	Die baroklinen Gleichungen	12
2.5	Randbedingungen	13
2.6	Die Gleichungen des 1-order BARBI-Modells	14
2.7	Numerik	14
2.8	Wellen in BARBI	14
2.9	Warum BARBI?	18
<b>3</b>	<b>Sensitivitätsstudien</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Wellenausbreitung</b>	<b>31</b>
4.1	Motivation	31
4.2	Eine Dichteanomalie überquert einen meridionalen Rücken	32
4.3	Einfluss von Topographie auf die Ausbreitung barokliner Rossbywellen	35
4.4	Einfluss auf das globale Ozeangeschehen	41
4.4.1	Einführung	41
4.4.2	Modellsetup	41
4.4.3	Ergebnisse	41
<b>5</b>	<b>Transport durch die Drakepassage</b>	<b>47</b>
5.1	Einführung	47
5.2	Trend im ACC Transport durch die Drakepassage	52
5.3	Allgemeine Korrelationskarten des ACC-Transportes	55
5.4	Zusammenhang mit dem Windschub	56
5.4.1	Stufenförmiger Windschub	56
5.4.2	Reale Winde	59
5.4.3	Ein einfaches baroklines Modell - Variante A	64
5.4.4	Ein einfaches baroklines Modell - Variante B	66
5.5	Zusammenhang mit dem SAM-Index	73
5.6	Die Bedeutung des Bodendruckes und der potentiellen Energie	78
5.6.1	Die Bedeutung der $f/h$ -Konturen	79

5.6.2	Die Frage nach den Zeitskalen . . . . .	80
5.7	Ein Regressionsmodell für den Transport durch die Drakepassage . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Einbau von Konvektion in BARBI</b>	<b>91</b>
6.1	Einleitung . . . . .	91
6.2	Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität bzw. Instabilität monotoner Dichtefunktionen . . . . .	91
6.3	Änderung der potentiellen Energie beim Durchmischen . . . . .	93
6.4	Testen des Verfahrens mit Mixed-Layer-Profilen . . . . .	95
6.5	Testen des Verfahrens mit einem Kanalmodell . . . . .	96
6.6	Zusammenfassung . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zu BARBI</b>	<b>109</b>
A.1	Umrechnung eines thermohalinen Forcings in einen Oberflächenwärmefluss . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Mathematische Methoden</b>	<b>111</b>
B.1	Fourier-Analyse von Zeitreihen . . . . .	111
B.2	Phase für das diskrete barotrope dynamische Modell . . . . .	113
B.3	Telekonnektionen . . . . .	113
B.4	Automatische Detektion von Signalausbreitungsgeschwindigkeiten . . . . .	114
<b>C</b>	<b>Rekonstruktion von Dichteprofilen aus den Momenten</b>	<b>117</b>
C.1	Einleitung . . . . .	117
C.2	Verfahren nach Talenti . . . . .	118
C.3	'Galerkin-Verfahren' mit geeigneten Ansatzfunktionen . . . . .	120
C.3.1	Verwendung von Legendrepolyomen . . . . .	121
C.3.2	Ein Ansatz mit Stufenfunktionen . . . . .	128
C.3.3	Zusammenfassung . . . . .	128
C.4	Die Methode der Tichonov-Regularisierung . . . . .	130
C.4.1	Allgemeine Beschreibung . . . . .	130
C.4.2	Legendrepolyome mit Substitution nach Talenti . . . . .	132
C.5	Schätzen von Parametern für Mixed-Layer Profile . . . . .	134
C.5.1	Einleitung . . . . .	134
C.5.2	Die Struktur der Dichteprofile und des inversen Problems . . . . .	134
C.5.3	Lösungsansatz mit linearem Teilproblem . . . . .	136
C.6	Zusammenfassung . . . . .	138

# Abstract

Embedded into the southern ocean the Antarctic Circumpolar Current (ACC) is the largest ocean current system with a transport through Drake Passage of about 130-140 Sv. This current is driven directly or indirectly by the strong westerly winds, and it is one major topic of this study to investigate the variability of the ACC transport through Drake Passage due to fluctuations in these westerly winds.

Another topic of this study is the propagation of Rossby waves under the influence of topography and the connection of the southern ocean with the equatorial and northern latitudes via the interaction of Rossby waves, coastal and equatorial Kelvin waves.

The investigations are done with the numerical simple ocean model BARBI, and besides these mentioned scientific topics this new ocean model itself is under investigation.

It can be demonstrated by experimental and theoretical arguments, that the topography can have an accelerating influence on the propagation speed of Rossby waves and that the amount of acceleration is in the range observed by the study of Chelton and Schlax (1996).

Furthermore, the southern ocean can have an influence on northern latitudes via a mechanism, which is based on the interaction of Rossby waves and Kelvin waves and which would be limited if the bottom topography would be flat. It is the interaction of barotropic and baroclinic Rossby waves due to topography which makes this mechanism very fast. But although this mechanism is present, these studies suggest, that it might be of minor importance, because the signals reaching the northern latitudes have very small amplitudes.

Concerning the transport through Drake Passage, it can be shown, that there might be a positive trend (increase) since the 1970s, which is likely caused by the increasing westerly winds. This trend can also be found in SAM-index, which reflects the major part of the variability of the southern hemispheric atmosphere.

It is demonstrated, that the relationship between the mean zonal windstress over the southern ocean and the transport through Drake Passage can be described by a simple linear

dynamic model, which contains the barotropic and the baroclinic time scales. Furthermore, the respective time constants are determined via three different approaches.

Using correlation analysis, an important connection between the transport through Drake Passage and the bottom pressure along the closed  $f/h$  contours around Antarctica can be identified. These correlations can be verified with simple channel models, and it can be shown, that the influence of the bottom pressure is reduced if the  $f/h$  contours are blocked. In the last case the correlation with the meridional difference of potential energy increases.

The relation between the transport and the bottom pressure on the one hand, and between transport and the meridional difference of potential energy on the other hand is studied further with a channel model and cross-spectral analysis. It is demonstrated, that on short time scales the coherence between transport and bottom pressure is high, which can be explained via a simple linear dynamic model and the geostrophic balance. Whereas on longer time scales the coherence with potential energy must increase. It is further proposed, that the coherence with bottom pressure and with the meridional difference of potential energy should be large on very long time scales.



# Kapitel 1

## Einleitung

**Motivation** Die geographische Heimat dieser Arbeit ist der Südliche Ozean, der etwa 20% des Weltozeans umfasst und im Norden durch die Subtropenfront und im Süden durch den Antarktischen Kontinent begrenzt wird, und somit einen großen Teil der südlichen Halbkugel unserer Erde bedeckt.

Doch worin könnte der Sinn für einen Menschen liegen, der zur Zeit im nördlichen Deutschland nahe Nord- und Ostsee zu Hause ist, sich mit diesem entfernten Gebiet der Weltkugel zu beschäftigen?

Zunächst kann man sich bewusst machen, dass das Leben an Land durchaus von ozeanischen Bedingungen geprägt wird. Prominente Beispiele hierfür sind der Golfstrom, der warmes Wasser vor die Küsten Europas transportiert, und ohne den es deutlich kühler und für den Menschen unangenehmer in Europa sein dürfte; oder die verheerenden Wirbelstürme, die vornehmlich in äquatorialen Breiten über warmen Gebieten des Ozeans (z.B. im Golf von Mexiko) entstehen und ihre zerstörerischen Kräfte über den Ozean hinaus ins Landesinnere tragen.

Doch warum der Südliche Ozean, wo doch der Nordatlantik oder der Golf von Mexiko deutlich näher liegen? Nun ist der Südliche Ozean zwar scheinbar für einen Menschen auf der Nordhalbkugel sehr weit weg, doch ist er keineswegs abgetrennt oder isoliert vom globalen Ozeangeschehen. So zeigt das linke Bild in Abb. 1.1 das sogenannte Weltweite Förderband nach Schmitz (1996), das in vereinfachter Weise die vom Nordatlantik ausgehenden dichtegetriebenen Umwälzprozesse im Weltozean beschreibt. Man sieht deutlich, dass der Südliche Ozean als verbindendes Glied zwischen den Weltmeeren wirkt und ihm somit eine zentrale Bedeutung im weltweiten Austausch von Wärme und verschiedenen Substanzen wie z.B. Nährstoffen oder  $CO_2$  zukommt.

In dieser Abbildung zeigt sich weiter eine Besonderheit des Südlichen Ozeans. Im Gegensatz zu den übrigen Welt-

meeren ist der Südliche Ozean in den Breiten der Drakepassage, der Meerenge zwischen Südamerika und dem Antarktischen Kontinent, zonal nicht durch Kontinente begrenzt, was erst den weltumspannenden Wärme- und Stoffaustausch ermöglicht.

Bewerkstelligt wird dieser Transport hauptsächlich durch den Antarktischen Zirkumpolarstrom (engl. Antarctic Circumpolar Current, ACC), der eingebettet in den Südlichen Ozean, als zusammenhängendes Stromsystem den antarktischen Kontinent umschließt und damit die einzige Meeresströmung ist, die ohne Barrieren über eine Länge von etwa 24.000 km den ganzen Globus umspannt. Somit hat der ACC Einfluss auf die weltweite Ozeanzirkulation und das weltweite Klima.

Es kommt hinzu, dass Landflächen mit Gebirgen oder Gebirgsketten wie auf der Nordhalbkugel im Bereich des südlichen Ozeans (sieht man von den Anden in Südamerika mal ab) nicht vorhanden sind, was dazu führt, dass sich die Winde an der Erdoberfläche richtig entfalten können. Diese starken Winde treiben auf direktem oder indirektem Wege den ACC an und führen dazu, dass es sich hier um das Stromsystem mit den weltweit größten Wassermassentransporten handelt - etwa 130-140 Sv<sup>1</sup>. Das ist 150 mal mehr als der Transport aller weltweiten Flüsse. Auf dem rechten Bild der Abb. 1.1, die der Arbeit von Rintoul et al. (2001) [51] entnommen ist, ist der ACC mit seinen zwei Hauptfronten, der subantarktischen Front und der Polarfront, zu sehen.

Die Verbindung zwischen der Nord- und Südhalbkugel über das globale Förderband arbeitet auf sehr langen Zeitskalen (bis zu Hunderten von Jahren), so dass Veränderungen etwa im Pazifischen Ozean erst nach sehr langer Zeit im Nordatlantik zu spüren wären. Es gibt aber einen weiteren Mechanismus, über den Veränderungen innerhalb des

<sup>1</sup>1 Sv entspricht  $10^6 m^3/s$  und ist eine Einheit für das Volumen an Wasser, das pro Sekunde etwa durch eine Meerenge bewegt wird.

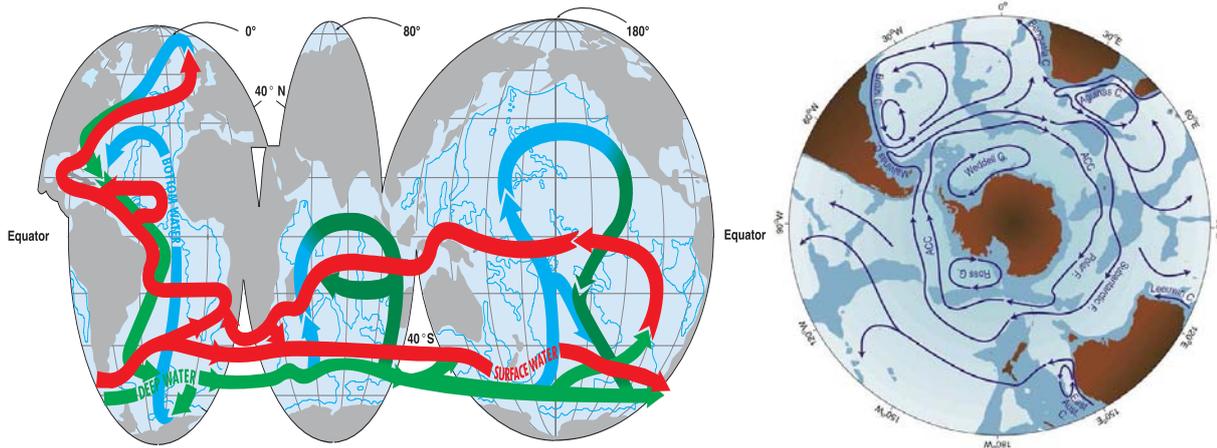


Abbildung 1.1: **Links:** Das globale Förderband (eng.: conveyor belt) nach Schmitz (1996) (siehe auch Broecker (1987) [8] oder Broecker (1991) [9]). Rot bezeichnet Oberflächenwasser, grün tiefes (mittlere Tiefen) Wasser und blau Bodenwasser. **Rechts:** Schematische Darstellung der Hauptströmungen im Südlichen Ozean. Weiterhin sind die zwei wichtigsten Fronten des ACC - die subantarktische Front und die Polarfront - dargestellt. Bereiche, an denen der Ozean tiefer als 3500 m ist, sind dunkler gezeichnet (aus Rintoul et al. (2001) [51]).

Südlichen Ozeans sich auf die Nordhalbkugel auswirken können. So wie ein Glasfaserkabel Licht leiten kann, so können sich entlang der Küsten der Kontinente küstengebundene Kelvinwellen bewegen. In ihrer Arbeit haben Ivchenko et al. (2004) [34] gezeigt, wie sich Dichteanomalien im Bereich der Drakepassage auf den äquatorialen Pazifik und den Nordpazifik auswirken können, indem sich die Störungen in Form von Rossby-, Küsten-, und äquatorialen Kelvinwellen ausbreiten. Dieser Mechanismus arbeitet auf Zeitskalen von einigen hundert Tagen und stellt somit eine relativ schnelle Informationsübertragung dar.

Gegenstand dieser Arbeit soll nun zum einen die Untersuchung von Wellenphänomenen innerhalb des Südlichen Ozeans und der angrenzenden Ozeane sein. Besonderes Augenmerk soll dabei auf planetarische Rossbywellen und auf küstengebundene Kelvinwellen gerichtet werden, wobei besonders letztere Signale an den Küsten der Kontinente (etwa von Südamerika) nach Norden transportieren können. Zum anderen soll die zeitliche Variabilität des Wassermassentransportes durch die Drakepassage unter verschiedenen Gesichtspunkten untersucht werden.

Zur Bearbeitung der Aufgabenstellung wird im Wesentlichen das numerische Ozeanmodell BARBI (Olbers und Eden (2003) [45]) verwendet. Aufgrund seiner vereinfachten Physik, die sich in den Modellgleichungen niederschlägt, kann man sich auf die wesentlichen dynamischen Mechanismen konzentrieren. Als Modellgeometrie werden sowohl eine realistische Bodentopographie als auch

nach Bedarf vereinfachte Kanalmodelle verwendet. Letztere ermöglichen es, gewisse topographische Strukturen besser herauszustellen oder die Rechenzeit des Modells so zu verkürzen, dass man Untersuchungen auf langen Zeitskalen in einer vertretbaren Rechenzeit durchführen kann.

**Gliederung** Im Anschluss an diese Einleitung wird das numerische Modell BARBI, mit dem der größte Teil der numerischen Studien durchgeführt wurde, näher vorgestellt.

Das darauf folgende dritte Kapitel beschäftigt sich mit Parameterstudien, die aus der Fülle der möglichen Parameterkombinationen die für die weiteren Untersuchungen geeigneten Kombinationen heraus kristallisieren sollen.

Das vierte Kapitel untersucht verschiedene Wellenprozesse. Dabei wird ein Schwerpunkt auf die Ausbreitung von Rossby- und Küstenkelvinwellen gelegt. Neben Modellgeometrien mit realistischer Bodentopographie kommen hier auch vereinfachte Kanalexperimente zum Einsatz, die es ermöglichen, die wichtigen physikalischen Prozesse zunächst in einfacheren Geometrien zu untersuchen.

Dem Transport durch die Drakepassage und seiner zeitlichen Variabilität widmet sich dann das fünfte Kapitel. Hier werden der Zusammenhang mit den atmosphärischen Winden und dem SAM-Index (wird später genauer erläutert) oder mit dem Bodendruck entlang des antarktischen Kontinentes untersucht. Es wird weiterhin ein vereinfachtes dynamisches Modell vorgestellt, das die Reaktion des Transportes auf die Schwankungen in den Winden beschreiben

soll. Auch hier kommen an passender Stelle wieder Kanalexperimente zum Einsatz, die einen längeren Betrachtungszeitraum ermöglichen.

Das sechste Kapitel schließlich kann etwas losgelöst von den vorhergehenden Kapiteln gesehen werden und beschäftigt sich mit dem Einbau (Parametrisierung von Konvektion) in BARBI, da dieser Mechanismus in BARBI zunächst nicht implementiert ist. Es wird hier ein direktes Verfahren vorgestellt und einführend getestet.

Im Anhang finden sich dann verschiedene Ergänzungen. So werden hier noch Erweiterungen zum BARBI Modell oder einzelne mathematische Methoden, die in dieser Arbeit verwendet werden, vorgestellt. Es werden weiterhin die zusätzlichen Versuche dargestellt, die von meiner Seite unternommen wurden, um aus den Dichtemomenten ein Dichteprofil zu rekonstruieren, was der Integration von Konvektion in BARBI dienen sollte.



# Kapitel 2

## Das BARBI-Modell

Das Herz dieser Arbeit ist das numerische Ozeanzirkulationsmodell BARBI, mit dem zahlreiche numerische Studien durchgeführt wurden, und dieses Kapitel soll den Leser mit BARBI (**BAR**otrop-**BAR**oklines **I**nteraktions **M**odell) und seinen Konzepten näher vertraut machen. Dabei wird zunächst ein Schwerpunkt auf die grundlegenden Modellgleichungen und die Welleneigenschaften gelegt, wobei sich im Anhang dann noch eine kleine Ergänzung zu BARBI befindet, deren Verständnis nicht unmittelbar für die nächsten Abschnitte und Kapitel benötigt wird.

Das Modell, das an dieser Stelle nur kurz skizziert werden soll, geht zurück auf eine Arbeit von Dirk Olbers und Carsten Eden 2003 [45]. Generell handelt es sich um ein zweidimensionales Ozeanmodell, das sich durch vertikale Integration der Primitiven Gleichungen in Boussinesq-Näherung und durch eine Trennung in barokline und barotrope Größen ergibt.

### 2.1 Die Ausgangsgleichungen

Ausgangspunkt für die Herleitung der BARBI-Gleichungen sind, wie bereits erwähnt, die Primitiven Gleichungen in Boussinesq-Näherung.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} + \nabla \cdot \mathbf{J}_u \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{N^2}{g} \right) = -\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \nabla \cdot \mathbf{J}_\rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

In Vorbereitung für die vertikale Integration sind die ursprünglich dreidimensionalen Vektoren in ihren horizontalen zweidimensionalen und den vertikalen Anteil zerlegt, was insbesondere auch für den  $\nabla$  - Operator gilt. In der horizontalen Impulsgleichung (2.1) sind  $\mathbf{k}$  der Einheitsvek-

tor in vertikaler Richtung und  $f$  der Coriolis-Parameter<sup>1</sup>. Der horizontale bzw. vertikale turbulente Impulsfluss wird durch  $\mathbf{J}_u$  bzw.  $\boldsymbol{\tau}$  erfasst. Weiterhin bezeichnet  $p$  die Druckabweichung vom Hintergrundprofil  $\bar{p}^*(z)$  bzw.  $\rho$  die Dichteabweichung von  $\bar{\rho}^*(z)$ , wobei beide durch Division mit einer Skalierungsdichte  $\rho_0^*$  dimensionslos gemacht werden. Genauer gilt also  $\rho = (\rho^* - \bar{\rho}^*) / \rho_0^*$ , wobei im Folgenden die dimensionslose Hintergrunddichte  $\bar{\rho} = \bar{\rho}^* / \rho_0^*$  mit der Tiefe linear zunehmen soll. BARBI verwendet nun nicht die in-situ sondern die potentielle Dichte, so dass die Druckabhängigkeit der Dichte vernachlässigt wird.  $\rho$  bezeichnet im Folgenden also nicht mehr eine Anomalie der in-situ sondern der potentiellen Dichte.

Die Stärke der Zunahme der linearen Hintergrunddichte wird über die Schichtungsfrequenz (auch Brunt-Väisälä-Frequenz oder Stabilitätsfrequenz)  $N^2 = -g \frac{d\bar{\rho}}{dz}$  geregelt. Alle Experimente mit BARBI wurden mit einer konstanten Schichtungsfrequenz durchgeführt, obwohl diese Einschränkung in BARBI zunächst nicht vorgesehen ist.

Sowohl für die Hintergrundprofile als auch die Abweichungen gilt die hydrostatische Näherung, die für die Abweichungsgrößen in Gleichung (2.2) gegeben ist.

Gleichung (2.3) ergibt sich aus der Kombination der Gleichungen der Temperatur und des Salzgehaltes und ist eine prognostische Gleichung für die Dichteanomalie. Analog zur Impulsgleichung bezeichnen schließlich  $\mathbf{J}_\rho$  bzw.  $B_\rho$  den horizontalen bzw. vertikalen turbulenten Dichte-  
fluss.

<sup>1</sup>Es ist  $f = 2\Omega \sin(\theta)$ , wobei  $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  die Rotationsfrequenz der Erde und  $\theta$  die geographische Breite darstellen.

## 2.2 Barotrope und barokline Größen

In Ozeanmodellen, die auf den Primitiven Gleichungen beruhen, ist es üblich eine Trennung nach in der Regel tiefenunabhängigen (auch externe oder barotrope) und tiefenabhängigen (auch interne oder barokline) Größen durchzuführen, die durch vertikale Mittelung der Gleichungen entstehen.

Aufgrund dieser Trennung ist es z.B. möglich, den barotropen und baroklinen Teil mit unterschiedlichen Zeitschritten (den barotropen in der Regel mit einem kürzeren) zu integrieren, was insgesamt zu einer Verminderung der Rechenzeit führt. Weiteres zur Motivation der Trennung kann man z.B. bei Pacanowski (1998) [48] oder Hasselmann (1982) [25] nachlesen.

BARBI verwendet ebenfalls diese Trennung in barotrope und barokline Variablen, die sich weitgehend an Hasselmanns (1982) [25] Formulierung orientiert, wobei die barotropen Zustandsgrößen gegeben sind durch  $U, W, P$  und die baroklinen durch  $\mathbf{u}', w', p', \rho'$ .

$(U/h, W)$  werden als barotrope Geschwindigkeit,  $U$  als barotroper Transport und  $P$  als barotropes Druckfeld bezeichnet. Die baroklinen Größen sind dann bedingt durch:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h}\mathbf{U} + \mathbf{u}' \quad w = W + w' \quad p = P + p' \quad (2.5)$$

mit  $\mathbf{U} := \int_{-h}^0 \mathbf{u} dz$ ,  $W := \frac{z}{h^2} \mathbf{U} \cdot \nabla h$  und  $P := p(z=0) + g \int_{-h}^0 \rho dz$ . Genauer bezeichnet  $P$  den Bodendruck bzw. die Abweichung desselben vom Hintergrundbodendruck, wobei er sich als Summe aus dem Druck an der Oberfläche (durch die Auslenkung der Wasseroberfläche) und dem Schweredruck der Wassersäule ergibt. Durch diese Definitionen hängen die barotropen Größen (mit Ausnahme von  $W$ ) nicht mehr direkt von der vertikalen Koordinate  $z$  ab, sondern sind nur noch Funktionen der horizontalen Koordinaten  $x$  und  $y$ . Weiterhin ist die Tiefe des Ozeans an einer Stelle gegeben durch  $h(x, y)$ , so dass die  $z$ -Koordinate auf dem Intervall  $[-h, 0]$  definiert ist.

## 2.3 Die barotropen Gleichungen

Durch Vernachlässigung der Impulsadvektion ( $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ) und vertikale Integration der Impuls- und Kontinuitätsgleichung (2.1) bzw. (2.4) gefolgt von ein paar Umformungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergeben sich die barotropen Gleichungen zu:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -h \nabla P - \nabla E_1 + \boldsymbol{\tau}_S + F \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.7)$$

mit dem lateralen Reibungsterm  $F = A_h \nabla \cdot h \nabla (\mathbf{U}/h)$ , der die horizontale turbulente Viskosität<sup>2</sup>  $A_h$  enthält.

In dieser Gleichung tauchen nun ein paar weitere Größen auf, die noch nicht erwähnt wurden. Da ist z.B. der Antrieb durch den Wind an der Oberfläche,  $\boldsymbol{\tau}_S$ . Zusätzlich enthält diese Gleichung neben dem Gradienten des Bodendruckes den Gradienten der potentiellen Energie bezogen auf die Meeresoberfläche  $E_1 = g \int_{-h}^0 \rho z dz$ , der sich als Anteil des Drucktermes bei der vertikalen Integration ergibt.

Anstelle des barotropen Transportes  $\mathbf{U}$  wird in der weiteren Formulierung der Gleichungen die durch diesen bedingte barotrope Stromfunktion  $\mathbf{U} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi$  verwendet<sup>3</sup>.

Dividiert man die Impulsgleichung durch die Ozeantiefe  $h$ , so ergibt sich die Gleichung der Stromfunktion zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \frac{1}{h} \nabla \Psi + J(\Psi, f/h) = -J(E_1/h^2, h) + \dots$$

$$\text{curl}(\boldsymbol{\tau}/h) + A_h \nabla \cdot \left( \frac{1}{h} \nabla \cdot h \nabla \right) \frac{1}{h} \nabla \Psi \quad (2.8)$$

$J$  bezeichnet hier den Jacobi-Operator  $J(a, b) := (\mathbf{k} \times \nabla a) \cdot \nabla b = a_x b_y - a_y b_x$ , und  $\text{curl}(\mathbf{a}) = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{a}$ . Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung wird als JEBAR-Term<sup>4</sup> bezeichnet; seine Bedeutung wird später etwas näher betrachtet.

## 2.4 Die baroklinen Gleichungen

Die baroklinen Impulsgleichungen ergeben sich durch Subtraktion der barotropen von der allgemeinen Impulsgleichung, Multiplikation mit  $z^{n+1}$  und vertikale Integration:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_{n+1}}{\partial t} + \mathbf{f} \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_{n+1} = -\frac{(-1)^n h^{n+1} \nabla E_1 + \nabla E_{n+2}}{n+2}$$

$$+ \frac{(-1)^n h^{n+1}}{n+2} \boldsymbol{\tau} + A_h \nabla^2 \mathbf{u}'_{n+1}$$

$$n = 1, 3, 5, 7, \dots, \quad + A_v n(n+1) \mathbf{u}'_{n-1} \quad (2.9)$$

In ihnen tauchen nun die baroklinen Geschwindigkeitsmomente  $\mathbf{u}'_{n+1} = \int_{-h}^0 z^{n+1} \mathbf{u}' dz$  und die höheren Momente der potentiellen Energie  $E_n = g \int_{-h}^0 \rho z^n dz$  auf, wobei  $\mathbf{u}'_0 = 0$  gilt. Weiterhin bezeichnet  $A_v$  die vertikale Viskosität.

<sup>2</sup>Andere Bezeichnungen sind z.B. turbulenter Austauschkoefizient oder 'eddy-viscosity'.

<sup>3</sup>Aus der rigid-lid Randbedingung, die eine Auslenkung der Meeresoberfläche unterbindet und somit die schnellen barotropen Schwerewellen aus dem Modell filtert, ergibt sich  $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ . Somit ist es möglich, die Stromfunktion in der beschriebenen Art einzuführen.

<sup>4</sup>Siehe zur Bedeutung des JEBAR-Effektes z.B. Cai und Baines (1996) [10], Borowski et al. (2002) [6] oder Olbers et al. (2004) [44].

Die prognostischen Gleichungen für die Dichtemomente (Momente der potentiellen Energie) ergeben sich durch Multiplikation mit  $z^{n+1}$  und vertikale Integration der Beziehung (2.3) für die potentielle Dichte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial t} + h^n \mathbf{U} \cdot \nabla \frac{E_n}{h^{n+1}} &= (-1)^{n+1} \frac{N_0^2 h^n}{n+2} \mathbf{U} \cdot \nabla h \\ &+ \frac{N_0^2}{n+1} \nabla \cdot \mathbf{u}'_{n+1} \quad (2.10) \\ n = 1, 3, 5, 7, \dots &+ K_h \nabla^2 E_n + Q_n - D_E E_n, \end{aligned}$$

wobei  $K_h$  die horizontale Diffusivität und

$Q_n = -g \int_{-h}^0 \frac{\partial B_p}{\partial z} z^n dz$  die Momente des turbulenten Dichteflusses, in denen Vermischungsprozesse, Konvektion und antreibende Austauschprozesse an der Oberfläche enthalten sind, bezeichnen.

In der von Olbers und Eden (2003) [45] veröffentlichten BARBI-Version war eine explizite Dissipation der potentiellen Energie nicht vorgesehen. Es zeigte sich aber bei Versuchen mit einem konstanten Windforcing ohne Dissipation, dass die Transporte, nachdem sie einen fast stationären Zustand erreicht hatten, einen leichten Trend aufwiesen. Dieser kam vermutlich dadurch zustande, dass bisher in den Gleichungen ohne  $Q_n$ -Terme aufgrund der von Neumann Randbedingungen für die Dichtemomente keine Senken für die Dichtemomente existieren, so dass diese unter einem Windantrieb unbeschränkt wachsen konnten. Dies hatte aber zur Folge, dass bei nicht flacher Topographie über den JEBAR-Term potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt und dadurch die Strömung weiter angetrieben wurde. Nachträglich wurde also ein Term  $-D_E E$  in die Gleichungen der Dichtemomente eingebaut. Hierdurch werden große Werte bestraft, was bedeutet, dass die Dissipation die Abweichung vom mittleren linearen Dichteprofil, das für den ganzen Ozean gleich ist, klein halten möchte. Prinzipiell kann die Dissipationskonstante für jedes Dichtemoment unterschiedlich gewählt werden.

Generell ist durch das allgemeine Modell eine unendliche Zahl von Gleichungen gegeben, die gleichzeitig gelöst werden müssen. Um jedoch dieses Modell in der Praxis anzuwenden, ist es angebracht, die Anzahl der nötigen Gleichungen zu begrenzen. Möchte man also die Momente  $E_1, E_3, \dots, E_L$  verwenden, so taucht in den Gleichungen (2.9) auch das Moment  $E_{L+2}$  auf. Eine Möglichkeit, es zu entfernen, ist, es einfach gleich Null zu setzen. Eine andere, es durch eine Linearkombination der niederen Momente in der Form  $E_{L+2} = \sum_{j=1}^L \gamma_j E_j h^{L-j+2}$ ,  $j = 1, 3, 5, \dots$  auszudrücken. Nun ergibt sich aber das Problem, die Parameter  $\gamma_j$  geeignet zu wählen. Diese sollen als konstant angesehen

werden und werden bei der Integration so bestimmt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeiten interner Schwerewellen und barotroper bzw. barokliner Rossbywellen über flachem Boden den theoretischen Werten entsprechend richtig durch das Modell wiedergegeben werden. Genauer hierzu kann bei Olbers und Eden 2003 [45] nachgelesen werden.

## 2.5 Randbedingungen

Bisher wurden zwar einige Randbedingungen erwähnt, doch es wurde nicht näher auf dieses Thema eingegangen. Dies soll nun nachgeholt werden<sup>5</sup>:

- Für die horizontale Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  gilt an den seitlichen Berandungen die no-slip Bedingung ( $\mathbf{u} = 0$ ) und am Boden free-slip (keine Reibung,  $-\tau(-h) + A_h \nabla h \cdot \mathbf{J}_u(-h) = 0$ ).
- Für die vertikale Geschwindigkeit  $w$  gilt an der Oberfläche die rigid-lid Bedingung  $w(z = 0) = 0$  und am Boden, dass die Komponente senkrecht zur Bodentopographie verschwindet:  $w(z = -h) = -\mathbf{u} \cdot \nabla h$ .
- Für die Dichtemomente gelten von Neumann Bedingungen - dass die Flüsse über seitliche Berandungen oder den Boden verschwinden:  $\partial E / \partial n = 0$ .
- In einem rigid-lid Modell werden Auslenkungen der Meeresoberfläche (um die Ruhelage) von vornherein ausgeschlossen, so dass die Wasseroberfläche glatt bleibt. Die Auslenkung der Wasseroberfläche trägt aber zum Schweredruck bei, da die Länge der Wassersäule sich ja verändert. Dieser externe oder barotrope Anteil befindet sich in einem rigid-lid Modell im Druck an der Wasseroberfläche. Es gilt also:  $p(z = 0) = g \rho_0 \eta$ , wobei  $\eta$  die Oberflächenauslenkung um die Ruhelage beschreibt.

<sup>5</sup>Eine schöne Übersicht findet man in der Arbeit von Fabian Schlösser (2005) [52].

## 2.6 Die Gleichungen des 1-order BARBI-Modells

Da in der Regel das 1-order Modell, das nur das erste barokline Dichtemoment  $E_1$  verwendet, für die folgenden Experimente verwendet wird, sind seine Gleichungen hier noch einmal dargestellt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \frac{1}{h} \nabla \Psi + J(\Psi, f/h) = -J(E_1/h^2, h) + \text{curl}(\boldsymbol{\tau}/h) + A_h \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \cdot h \nabla}{h} \right) \frac{\nabla \Psi}{h} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_2}{\partial t} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}'_2 = -\frac{1}{3} [\gamma \nabla(h^2 E_1) - h^2 \nabla E_1] - \frac{h^2}{3} \boldsymbol{\tau} + A_h \nabla^2 \mathbf{u}'_2 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + h \mathbf{U} \cdot \nabla \frac{E_1}{h^2} = \frac{N_0^2 h}{3} \mathbf{U} \cdot \nabla h + \frac{N_0^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}'_2 + K_h \nabla^2 E_1 + Q_1 - D_E E_1 \quad (2.13)$$

mit  $\gamma = 0.3921$ , das sich, wie gesagt, aus der Notwendigkeit, die theoretischen Wellengeschwindigkeiten zu erzielen, ergibt.

Aufgrund der rigid-lid Randbedingung ist der Bodendruck eine diagnostische Variable, so dass eine explizite Zeitintegration für diesen nicht durchgeführt wird. Man kann ihn aber über folgende Poisson-Gleichung<sup>6</sup> aus der berechneten Stromfunktion und dem ersten Dichtemoment diagnostizieren (ableiten):

$$\nabla \cdot h \nabla P = -\nabla^2 E_1 + f \nabla^2 \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}) \quad (2.14)$$

mit  $\beta = \frac{df}{dy}$

<sup>6</sup>Auch wenn in dieser Gleichung eine Ableitung nach  $y$  steht, und man somit den Eindruck bekommen könnte, BARBI rechne mit Kartesischen Koordinaten, so soll an dieser Stelle ausdrücklich gesagt werden, dass dem nicht so ist. BARBI rechnet in Kugelkoordinaten, und diese Schreibweise ist eine vereinfachte Darstellung. Diese Schreibweise würde dann wieder richtig, wenn man sich auf ein kleines Gebiet der Erdoberfläche konzentriert und in diesem ein lokales Kartesisches Koordinatensystem einführen würde, in dem dann  $x$  die zonale bzw.  $y$  die meridionale Distanz beschreiben.

## 2.7 Numerik

Zur numerischen Lösung bzw. Integration der BARBI Gleichungen mit Hilfe eines Computers, hat Carsten Eden den numerischen Code des GFDL Modular Ocean Model (MOM, [48]) an die BARBI Gleichungen angepasst. Dieser Code verwendet finite Differenzen und die Variablen sind räumlich auf einem Arakawa B-Gitter angeordnet, d.h. dass es zwei ineinander verschobene Gitter gibt, auf denen die einzelnen Variablen definiert sind. Wer sich also einen guten Überblick über die Numerik des hier verwendeten Modells verschaffen möchte, dem sei die sehr ausführliche MOM-Anleitung ([48]) ans Herz gelegt. An dieser Stelle soll jedoch nicht näher auf die Numerik eingegangen werden.

## 2.8 Wellen in BARBI

An dieser Stelle soll darauf eingegangen werden, welche Wellentypen in BARBI enthalten sind und wie diese repräsentiert sind. In ihrer Arbeit können Olbers und Eden (2003) [45] zeigen, dass im freien linearen Fall, für einen flachen Boden die üblichen Wellenformen, wie barotrope und barokline Rossbywellen, interne Schwerewellen, Poincarewellen und Kelvinwellen enthalten und ihre Dispersionsrelationen der Theorie entsprechend zumindest im baroklinen Fall richtig wiedergegeben sind. Aufgrund der rigid-lid Randbedingung fallen jedoch die barotropen Schwere-, Poincare- und Kelvinwellen heraus.

Die Hinzunahme von Topographie verkompliziert die Angelegenheit, so dass es nicht verwunderlich ist, dass es hierfür noch keine umfassende Theorie gibt. Für den Spezialfall eines linear ansteigenden Bodens konnte in Olbers und Eden (2003) [45] gezeigt werden, dass die aus BARBI folgenden Dispersionsrelationen für Rossbywellen denen von Rhines (1977) [50] entsprechen, die auf Grundlage der quasigeostrophischen Theorie berechnet wurden. Die folgende Tabelle fasst die enthaltenen Wellentypen noch einmal zusammen:

	barotrop	baroklin
Schwerewellen	nein	ja
Poincarewellen	nein	ja
Kelvinwellen	nein	ja
Rossbywellen	ja (kurz)	ja

Es soll hier nicht auf alle diese Wellentypen eingegangen werden, sondern an dieser Stelle werden kurz Rossby-

und Kelvinwellen etwas näher betrachtet. Bei tieferen und weiterführenden Fragestellungen sei auf die Literatur (siehe z.B. Cushman-Roisin (1994) [16], Pedlosky (2003) [49] oder LeBlond und Mysak (1978) [37]) verwiesen.

**Barotrope Rossbywellen** Kommen wir zuerst zu den barotropen Rossbywellen, deren Existenz der Breitenabhängigkeit des Coriolis-Parameters  $f$  geschuldet ist. Aufgrund der rigid-lid Randbedingung ergibt sich für das lineare barotrope System ohne Reibung und Windantrieb auf einer  $\beta$ -Ebene<sup>7</sup>:

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} + J(\Psi, f) = 0 \quad (2.15)$$

Aus einem Ebenen-Wellen-Ansatz ergibt sich aus dieser Differentialgleichung die Dispersionsrelation barotroper Rossbywellen über flachem Boden:

$$w(k_x, k_y) = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.16)$$

Vergleicht man diese mit der Dispersionsrelation, die man aus der quasigeostrophischen Theorie<sup>8</sup> erhält, so erkennt man, dass BARBI nur die kurzen barotropen Wellen (Wellenlängen kleiner als der barotrope Rossbyradius bzw.  $\lambda < 2\pi R_e$ ) richtig wiedergibt.

In Abb. 2.1 sind die Dispersionsrelation der eindimensionalen Rossbywellen über flachem Boden resultierend aus der quasigeostrophischen Theorie und aus BARBI für eine Referenzbreite von  $55^\circ S$  und eine Wassertiefe von  $4000 \text{ m}$  dargestellt, wobei anstelle der Wellenzahl die Wellenlänge<sup>9</sup> aus Gründen der Anschaulichkeit verwendet wird. Wie bereits erwähnt, sieht man, dass die barotropen Funktionen gut für kurze jedoch nicht für lange Wellen übereinstimmen. Im baroklinen Fall, der hier wegen der Vollständigkeit mit angegeben ist, sollte es jedoch zwischen BARBI und QG keinen Unterschied geben.

Nun kann es aber nicht zu jeder Wellenzahl eine entsprechende Welle im numerischen Modell geben. Zum einen

<sup>7</sup>Der Coriolis-Parameter  $f$  wird auf einer  $\beta$ -Ebene durch eine lineare Entwicklung bezogen auf eine Referenzbreite  $y_0$  mit  $f_0$  durch  $f(y) = f_0 + \beta y$  und  $\beta = \frac{df}{dy}|_{y_0}$  approximiert.

<sup>8</sup>Die theoretische Dispersionsrelation ist gegeben durch:

$$\omega = -\frac{\beta_0 k_x}{k_x^2 + k_y^2 + R_e^{-2}}$$

mit  $\beta_0 = 2\frac{\Omega}{a} \cos(\phi_0)$ , dem externen Deformationsradius  $R_e = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$  und  $f_0 = 2\Omega \sin(\phi_0)$ , wobei  $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  die Rotationsfrequenz der Erde,  $a = 6370 \text{ km}$  der mittlere Erdradius,  $\phi_0$  der Referenzbreiten-grad und  $H$  die Tiefe des Ozeans sind.

<sup>9</sup>Die Umrechnung zwischen einer Wellenlänge  $\lambda$  und ihrem  $k$ -Wert ist durch  $k = 2\pi/\lambda$  gegeben.

bedingt die Gitterauflösung, dass nur Wellen mit einer Wellenlänge größer als die 'Maschenweite' aufgelöst werden. Dieses wird durch die linke senkrechte schwarze Linie in Abb. 2.1 berücksichtigt, die den Wert einer Gitterweite von  $2^\circ$  bei  $60^\circ S$  (sind etwa  $111 \text{ km}$ ) markiert. Wellen links von dieser Linie sind in BARBI also aufgrund der Gitterauflösung nicht enthalten. Zum anderen steht einer Welle auf der Erdkugel nur begrenzt viel Platz zur Verfügung, so dass die Wellenlänge einer Rossbywelle auch nicht unendlich groß sein kann. Dieses berücksichtigt die rechte schwarze Linie, die eine Wellenlänge von etwa  $20.000 \text{ km}$  markiert. Dieser Distanz entspricht z.B. in etwa der halbe Erdumfang (einmal von Norden nach Süden durch den Atlantik oder Pazifik) oder der gesamte Erdumfang bei  $60^\circ S$  durch die Drakepassage. Insgesamt kann man also sagen, dass die Abweichungen der barotropen Dispersionsrelationen für die relevanten Fälle eher klein sind, sofern man sich dem rechten Rand nicht zu sehr nähert. Dieses gilt auch für die Gruppengeschwindigkeiten, die durch die Ableitungen der Dispersionsrelationen gegeben sind, wobei die Unterschiede am rechten Rand (sehr lange Wellen) erheblich sein können, wie man im rechten Bild von Abb. 2.1 sehen kann. Die Gruppengeschwindigkeit langer barotroper Rossbywellen ist in BARBI nach Osten und nicht wie in QG nach Westen gerichtet. Hier ist also eine deutliche Abweichung zwischen QG und BARBI gegeben. Auch für die Phasengeschwindigkeiten gibt es für lange Wellen Abweichungen, wobei die Phasengeschwindigkeit in BARBI zwar wie in QG nach Westen gerichtet ist, diese aber deutlich übertrifft, wenn die Wellenlängen sehr groß werden. Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass diese Abweichungen primär nicht an der BARBI-Theorie liegen, sondern an der rigid-lid Randbedingung, die auch in anderen Modellen verwendet wird.

**Kelvinwellen** Die Existenz von Kelvinwellen ist entweder an eine seitliche Berandung (küstengebundene Kelvinwellen) oder an den Äquator (äquatoriale Kelvinwellen) gebunden. Weiterhin werden die Einflüsse der Corioliskraft und der Gravitation benötigt, wobei die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters nur in unmittelbarer Umgebung des Äquators (etwa  $2^0 - 3^0$  in Nord- und Südrichtung) - also für die äquatorialen Kelvinwellen - eine Rolle spielt.

Die Ausbreitung der Kelvinwellen erfolgt entlang der seitlichen Berandung bzw. des Äquators, wobei die Amplitude der Welle mit zunehmender Entfernung von der Berandung bzw. dem Äquator exponentiell abnimmt. Die Aus-

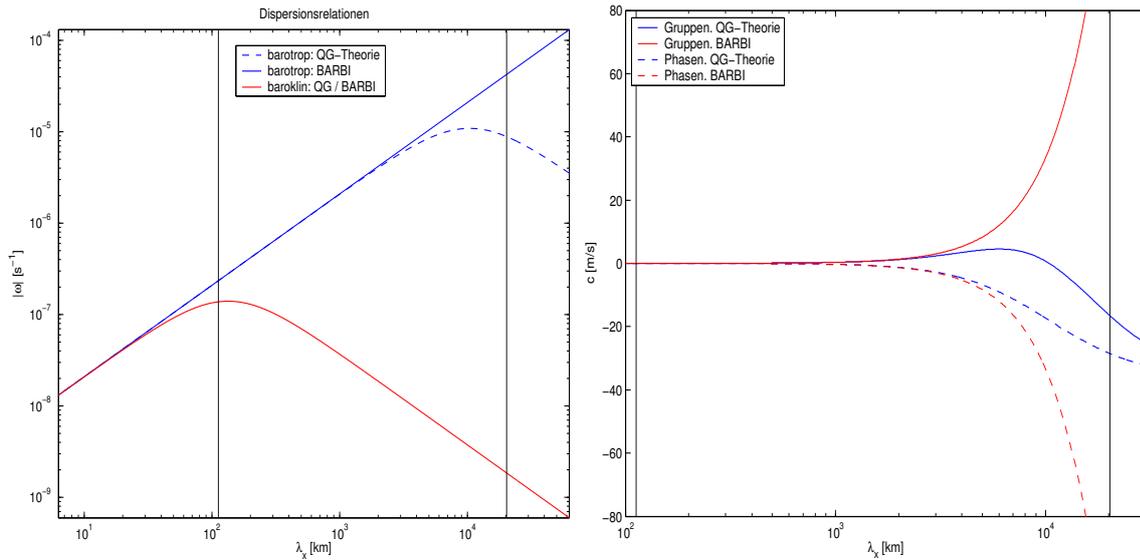


Abbildung 2.1: **Links:** Dispersionsrelationen der eindimensionalen Rossbywellen über flachem Boden in quasigeostrophischer Näherung und in BARBI. Die Referenzbreite ist  $55^\circ S$ , die Wassertiefe 4000 m und die Stabilitätsfrequenz beträgt  $N = 0.002 s^{-1}$ . Die Erklärung zu den senkrechten schwarzen Linien wird im Text gegeben. **Rechts:** Die Gruppengeschwindigkeit bzw. Phasengeschwindigkeit barotroper Wellen in QG und BARBI.

breitungsrichtung ist so gegeben, dass Wellen auf der Nordhalbkugel mit der Berandung auf ihrer rechten Seite und Wellen auf der Südhalbkugel mit der Berandung auf der linken Seite laufen. Entlang des Äquators laufen die Wellen nach Osten.

Analog zu den Schwerewellen kann man auch bei Kelvinwellen nur die Auslenkung der Meeresoberfläche (Oberflächen-Kelvinwellen, 'barotrope' Moden) oder die Auslenkung von Dichteflächen innerhalb des Meeres (interne Kelvinwellen, 'barokline' Moden) betrachten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Oberflächen-Kelvinwellen entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit von langen Oberflächen-Schwerewellen  $c = \sqrt{gH}$ .

An dieser Stelle soll nun skizziert werden, in welcher Form Kelvinwellen im numerischen Modell vorkommen, wobei nun auch viskose Effekte berücksichtigt werden. Nimmt man das zentrale Ergebnis vorweg, so muss man sagen, dass Kelvinwellen in BARBI sich zum einen gegenüber der Realität bzw. genauer der Wellentheorie zu langsam an den Küsten ausbreiten und zum anderen zu stark gedämpft sind.

So wie ich es verstanden habe, gibt es dafür im Wesentlichen zwei Gründe, die mit der numerischen Umsetzung der physikalischen Gleichungen verbunden sind, und zunächst erst einmal unabhängig von BARBI sind.

Hsieh et al. (1983) [30] haben Untersuchungen zur Aus-

breitung von Kelvinwellen in numerischen Modellen, die auf finiten Differenzen beruhen und Arakawa B und C Gitter verwenden, durchgeführt. Dazu haben sie die Flachwassergleichungen auf einer  $f$ -Ebene über flachem Boden durch einen Ebenen-Wellen-Ansatz  $\sim \exp(i(l y - \omega t))$  zu lösen versucht. Sie definieren weiter den dimensionslosen Parameter  $\Delta = \text{Gitterauflösung}/\text{Rossbyradius}$ , der ein Maß für die Maschenweite des Gitters ist. Bei Hinzunahme viskoser Effekte, die durch den Parameter<sup>10</sup>  $\epsilon = A_h/(f R^3 l)$  mit dem baroklinen Rossbyradius  $R$  beschrieben werden, verschwindet der Imaginärteil der Frequenz  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  nicht mehr, und man erhält einen Dämpfungsfaktor  $\exp(\omega_i t)$ , der die Amplitude der Kelvinwelle mit der Zeit abklingen lässt. Insbesondere betrachten sie eine Kelvinwelle, die sich entlang einer in Nord-Süd-Richtung orientierten Küste bewegt.

Um diesem Viskositätsparameter etwas Leben einzuhauchen, sei folgendes Beispiel betrachtet: Für die mittleren Breiten mit  $f = 1 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ , einer Viskosität von  $A_h = 1 \cdot 10^4 m^2 s^{-1}$ , einer Wellenlänge von 2000 km und einem baroklinen Rossbyradius von 30 km ( $R = NH/f$ ,

<sup>10</sup>In der hier zitierten Arbeit ist dieser Parameter vermutlich mit einem Druckfehler abgedruckt, denn dort steht:  $\epsilon = A_h/(f R^2 l)$ . Verwendet man jedoch diese Formel, so ergeben sich nicht die in dieser Arbeit vorgestellten Zahlenbeispiele, welche jedoch für die korrigierte Version mit  $R^3$  stimmen. Dieser Parameter wird in dieser Form u.a. auch in der Arbeit von Soares et al. (1999) [55] verwendet.

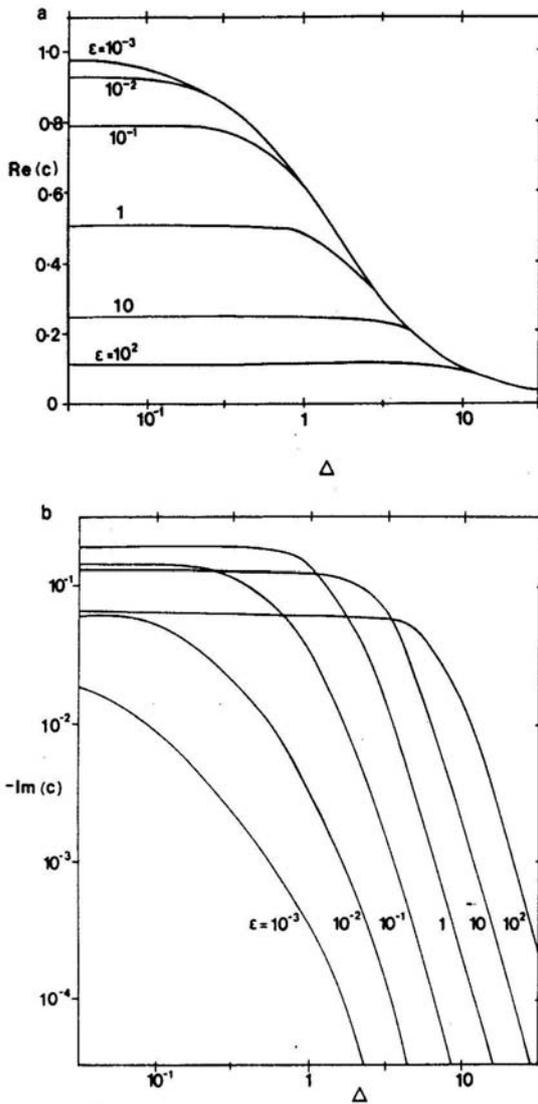


Abbildung 2.2: Dieses ist Abb. 6 aus der Arbeit von Hsieh et al. (1983) [30]. **Oben:** Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Gitterweite  $\Delta$  und der horizontalen Viskosität  $\epsilon$ . **Unten:** Imaginärteil der Ausbreitungsgeschwindigkeit, der die Stärke der Dämpfung beschreibt. Genaueres zu beiden Bildern im Text.

$N = 0.002 s^{-1}$  und  $H=1500$  m Tiefe) ergibt sich  $\epsilon = 1.2$ .

In Abb. 2.2 sind nun der Real- und Imaginärteil der Phasengeschwindigkeit  $c = \omega/l$  dargestellt. Im oberen Teilbild ist zunächst der Realteil der Phasengeschwindigkeit, der die Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Küste darstellt, als Funktion von  $\Delta$  und  $\epsilon$  dargestellt. Man erkennt zunächst, dass unabhängig vom Parameter  $\Delta$  die Ausbreitungsgeschwindigkeiten mit steigender Viskosität ( $\epsilon$ ) abnehmen.

Der erste Grund für die Abweichungen in BARBI von der Theorie ist nun dadurch bedingt, dass grobauflösende

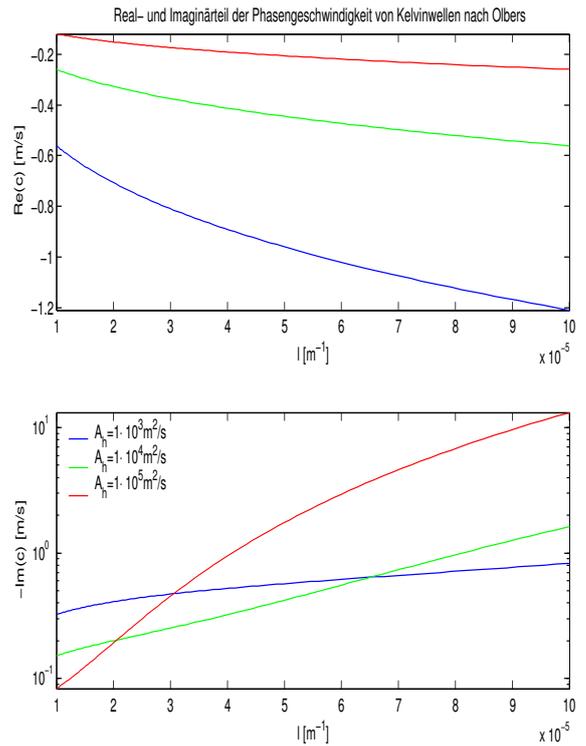


Abbildung 2.3: Phasengeschwindigkeit von Kelvinwellen nach Olbers unter Einfluss von Viskosität in Abhängigkeit der Wellenzahl  $l$  der Wellen und der horizontalen Viskosität. **Oben:** Realteil bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit. **Unten:** Imaginärteil der Ausbreitungsgeschwindigkeit, der die Stärke der Dämpfung beschreibt.

Ozeanmodelle (wie auch BARBI) in der Regel aus numerischen Stabilitätsgründen die Viskosität größer als in der Realität wählen müssen, so dass sich folglich die Wellen langsamer als in der Realität ausbreiten. Der zweite Grund ergibt sich schließlich daraus, dass selbst bei gleicher Viskosität wie in der Realität die Ausbreitungsgeschwindigkeit sinkt, wenn sich die Auflösung weiter vergrößert (größeres  $\Delta$ ), so dass also auch dann die Modelle die Ausbreitungsgeschwindigkeit unterschätzen, wenn die Gitterweite zu groß ist.

Um eine Aussage über die Dämpfung zu gewinnen, kann man sich den Imaginärteil der Geschwindigkeit im unteren Teilbild anschauen. Um ihn auf einer logarithmischen Achse darstellen zu können, ist der ursprünglich negative Wert (nur so hat er dämpfende Wirkung) mit Minus Eins multipliziert worden. Hinsichtlich der Dämpfung sind die Aussagen jedoch nicht ganz so eindeutig wie im Falle der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Hält man die Viskosität konstant und verändert nur die Gitterauflösung, so fällt in den meisten Fällen die Dämpfung mit steigender

Auflösung, was bedeutet, dass mit steigender Auflösung, die Wellen unnatürlich lange existieren. Für eine konstante Gitterauflösung  $\Delta$  gilt jedoch grob, dass mit wachsender Viskosität die Dämpfung zunimmt, was ja auch sinnvoll erscheint. Für eine sehr große Viskosität (ab  $\epsilon \approx 5$ ) kehrt sich dieser Effekt jedoch um, und die Dämpfung lässt wieder nach.

Diese bis jetzt genannten Dinge betreffen BARBI, da seine hier verwendete Numerik auch auf finiten Differenzen und einem B-Gitter beruht. Doch was sagt die BARBI-Theorie zur Ausbreitung von Kelvinwellen?

In einem nicht veröffentlichten Manuskript von Dirk Olbers sind die Dispersionsrelationen für Kelvinwellen mit viskosen Effekten über flachem Boden in BARBI ausgerechnet worden. Die daraus abgeleitete Phasengeschwindigkeit bzw. ihr Real- und Imaginärteil sind in Abb. 2.3 dargestellt. Aus dieser Abbildung kann man für die Ausbreitungsgeschwindigkeit ableiten, dass diese sich verringert, wenn sich die Viskosität erhöht. Dieses Verhalten ist somit analog zu Hsieh et al. ( $\Delta \rightarrow 0$ ), und somit bestätigt auch diese Theorie, dass die Wellen im Modell langsamer als in der Realität sein müssten, da die Viskosität im Modell größer als in der Realität gewählt werden muss. Hinsichtlich der Dämpfung sind die Dinge ebenso wenig eindeutig wie bei Hsieh et al., da sich auch hier die Kurven schneiden. Ob die Wellen stärker oder schwächer gedämpft werden als in der Realität, hängt neben der Viskosität auch stark von den betrachteten Wellenlängen ab und muss im Einzelfall entschieden werden. Für lange Wellen mit einer Wellenlänge größer als 600 km ( $l \approx 2 \cdot 10^{-5} m^{-1}$ ) nimmt die Dämpfung im betrachteten Viskositätsbereich mit wachsender Viskosität ab, während sie für kürzere Wellen mit Wellenlängen unter 100 km zunimmt.

## 2.9 Warum BARBI?

Nachdem BARBI nun nicht mehr so fremd ist, möchte ich die Frage näher zu klären versuchen, warum man BARBI und nicht ein anderes numerisches Modell für gewisse dynamische Studien verwenden soll<sup>11</sup>.

Vielleicht kommt man der Sache näher, wenn man sich zunächst überlegt, was BARBI nicht ist: Es ist kein hochauflösendes 3-dimensionales Modell, das kleinste räumliche Details der Meeresströmung oder anderer wichtiger Va-

riablen wiedergibt. Die vertikale Koordinate wird nur dann richtig aufgelöst, wenn man unendlich viele Momente verwendet. Bei einer Reduzierung auf wenige Momente oder gar nur eines ist die vertikale Struktur der physikalischen Felder nur schlecht gegeben. Es macht weiterhin keinerlei Aussage über die Temperatur und den Salzgehalt, sondern nur über die dynamisch relevante Dichte. Und selbst die steckt verklauusliert innerhalb der Dichtemomente.

Doch in dieser Reduktion und Ausblendung liegt auch der erhebliche Vorteil dieses Modells. Durch eine Konzentration auf die wesentlichen physikalischen Beziehungen kann BARBI das Zusammenspiel zwischen der barotropen und baroklinen Dynamik in Gegenwart von Topographie gut beschreiben. Diese Reduktion kann einem sprichwörtlich dabei helfen, wieder den Wald in der Fülle der Bäume zu sehen. BARBI steht somit als physikalisch reduziertes Modell auf einer Stufe z.B. mit geostrophischen, quasi-geostrophischen oder geschichteten Modellen. Doch im Gegensatz zur Quasigeostrophie ist es nicht an eine niedrige Bodentopographie gebunden. BARBI ist also nicht nur ein numerisches Modell, sondern wie der quasigeostrophische Ansatz eine Art Philosophie, die sich auf eine Vielzahl von Problemen der Ozeanographie anwenden lässt.

In dieser Reduktion steckt neben einer klaren Sicht auf die wichtigen Prozesse auch ein praktischer Vorteil. Als räumlich zweidimensionales Modell kann BARBI, wenn die Anzahl der baroklinen Dichtegleichungen nicht zu hoch gewählt wird, auf einem Computer sehr schnell numerisch integriert werden. Dadurch ist es möglich, in kurzer Zeit Ergebnisse auch auf langen Zeitskalen zu erhalten. Dieser Umstand und die Berücksichtigung vieler relevanter Wellenprozesse in Gegenwart von Topographie ermöglichen zusätzlich umfangreiche Variabilitätsstudien, die in dieser Form und Umfang mit einem hochauflösendem 3-dimensionalen Modell nicht möglich wären.

<sup>11</sup>Aus Gründen des Umfangs und weil es für diese Arbeit irrelevant ist, sollen hier keine genauen Vergleiche mit anderen Ozeanmodellen angestellt werden.

# Kapitel 3

## Sensitivitätsstudien

Wie man aus den BARBI-Gleichungen mit nur einem Dichtemoment - diese sollen ja für die weiteren Experimente verwendet werden - in Abschnitt 2.6 erkennen kann, enthält BARBI eine Hand voll Parameter, deren Werte zunächst einmal nicht von Natur aus gegeben sind, sondern die es so einzustellen gilt, dass das Modell Resultate liefert, die zum einen mit der Realität (Messungen) möglichst gut übereinstimmen und zum anderen numerischen Stabilitätskriterien genügen. Ziel dieses Abschnittes ist es, einen solchen geeigneten Parametersatz für die weiteren Untersuchungen zu finden.

Die Beschränkung auf nur ein Dichtemoment bzw. Geschwindigkeitsmoment führt dazu, dass die vertikale Viskosität als Parameter in den Modellgleichungen nicht mehr vorkommt, wie man an Gleichung (2.9) wegen  $u'_0 = 0$  erkennen kann. Somit kommen für die turbulenten Austauschkoefizienten nur noch die horizontale Viskosität  $A_h$  und die horizontale Diffusivität  $K_h$  in Betracht.

Die übrigen Parameter sind die vertikale Dichteschichtung  $N$ , die Dissipationskonstante der potentiellen Energie  $D_E$  und der Parameter  $\gamma$  für die Schließung der Dichtemomente, der prinzipiell beliebig gewählt werden kann, wobei es sich natürlich um eine sinnvolle Definition handeln sollte. In dieser Arbeit wird er analog zu Olbers und Eden (2003)[45] so gewählt, dass die Flachbodengeschwindigkeiten in BARBI mit den theoretischen Werten übereinstimmen.

Welche Möglichkeiten gibt es nun, die oben genannten Parameter geeignet einzustellen? Die wohl geeignetste Größe, die BARBI berechnet, um sie mit Messwerten und Beobachtungen zu vergleichen, ist die Transportstromfunktion  $\Psi$ . Als markanter Messwert bietet sich hier der Transport des ACC durch die Drakepassage an, da hier einige Messwerte aus der ISOS- oder der WOCE-Studie vorliegen. Einen recht aktuellen Überblick über den ACC Transport und seine zeitliche Variabilität durch die Drake Pas-

sage lässt sich in Cunningham et. al. 2003 [15] finden, in dem die Autoren Arbeiten im Rahmen der ISOS-Studie Ende der 70er, Anfang der 80 Jahre des letzten Jahrhunderts insbesondere von Whitworth et al. (1982) [69], Whitworth (1983) [68] und Whitworth und Peterson (1985) [70] zitieren. Der geschätzte mittlere absolute Transport der Jahre 1979 bis 1980 wurde mit  $133.8 Sv \pm 11.2 Sv$  angegeben. Im Rahmen der WOCE Studie wurde in den Jahren 1993-2000 quer zum SR1b Schnitt ein mittlerer Transport von  $136.7 Sv \pm 7.8 Sv$  bezogen auf eine Referenztiefe von ca. 3750 m bestimmt. Wählt man hingegen einen Referenzlevel von ca. 3000 m, so ergibt sich aus beiden Studien ein mittlerer Transport von  $107.3 Sv \pm 10.4 Sv$ . Man muss dazu sagen, dass diese Zahlenwerte generell mit Unsicherheiten behaftet sind, und dass sie deshalb nur als grobe Richtschnur betrachtet werden können.

Andere Möglichkeiten, die numerischen Ergebnisse zu überprüfen, sind durch die numerische Stabilität des Modells und eine plausible Struktur der berechneten Felder gegeben.

**Vorbemerkungen zu den turbulenten Austauschkoefizienten** In der großräumigen Ozeanzirkulation spielen Wechselwirkungen zwischen den Molekülen eine untergeordnete Rolle beim Wärme- oder Impulsaustausch. Viel wichtiger sind Wechselwirkungen, die durch turbulente, kleinskalige Wirbel vermittelt werden. Ist die Gitterweite des Modells jedoch zu groß gewählt, so können diese Prozesse nicht ausreichend aufgelöst (d.h. direkt berechnet) werden, so dass sie bzw. ihre Auswirkungen durch großskaligere Phänomene beschrieben (parametrisieren) werden müssen. Ein einfacher Ansatz hierfür ist ein Gradientenansatz analog zu den molekularen Prozessen, der einen konstanten turbulenten Austauschkoefizienten verwendet, wobei sich dessen Zahlenwerte aber deutlich von denen der molekularen unterscheidet. So liegt z.B. die molekula-

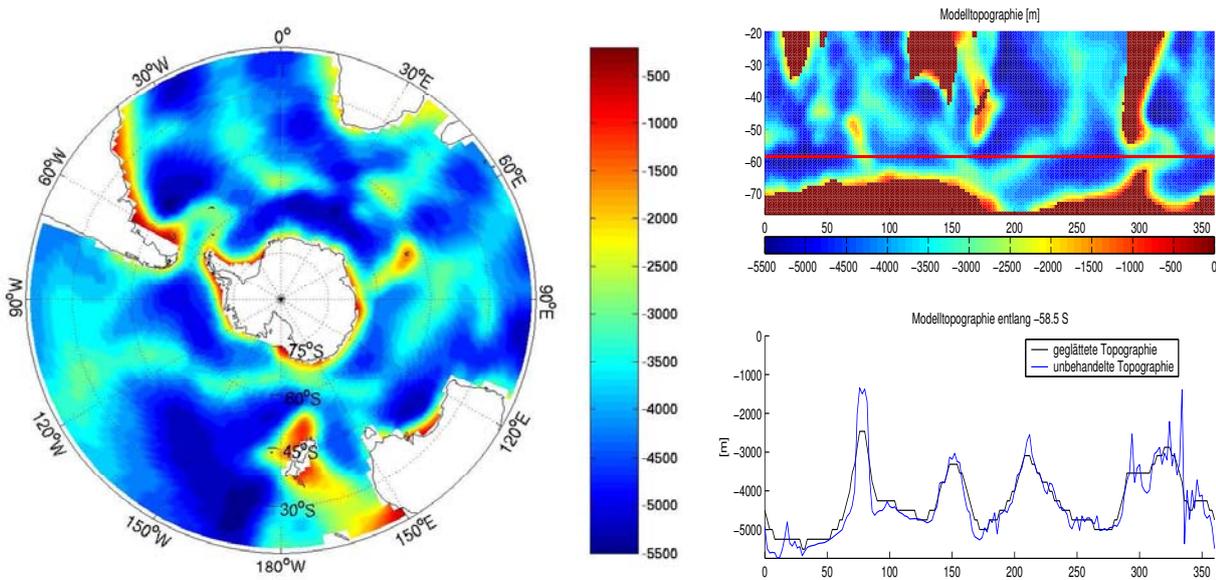


Abbildung 3.1: **Links:** Modelltopographie mit eingezeichnetem realen Küstenverlauf. **Rechts:** Modelltopographie entlang eines zonalen Schnittes bei ca. 58 S zur Darstellung der Glättung. Die Topographie des Etopo5 Datensatzes vor der Glättung ist im unteren Bild blau dargestellt.

re Viskosität von Wasser in der Größenordnung von  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , während die turbulente horizontale Viskosität um  $A_h = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$  (siehe z.B. Stewart (2003) [56]) liegt. Hinzu kommt, dass die horizontalen Austauschkoeffizienten in der Regel um einen Faktor  $10^4 - 10^6$  größer sind als die entsprechenden vertikalen.

Neben den physikalischen wird die Wahl dieser Koeffizienten auch durch numerische Gesichtspunkte bestimmt. Aus Gründen der numerischen Stabilität<sup>1</sup> kann man für diese Werte die Faustregel angeben, dass diese umso größer gewählt werden müssen, je gröber das Gitter ist.

**Modellsetup** Um nun die Wirkung dieser Parameter zu testen, wurde das Modell mit einem konstanten Windschub aus dem Nullzustand angetrieben, bis es einen (fast) stationären Zustand erreicht hat. Die Modelltopographie ist dem ETOPO5 Datensatz [17] entnommen und ist im linken Teil der Abb. 3.1 dargestellt. Um die Wirkung der Glättung der Bodentopographie zu veranschaulichen, die für die Stabilität der numerischen Integration von Nöten ist, ist im rechten Teilbild sowohl die ursprüngliche als auch die geglättete Topographie entlang eines zonalen Schnittes dargestellt. Das Windforcing stammte aus einem 3-jährigen ECMWF-

Reanalysedatensatz (European Centre for Medium Range Weather Forecasts) der Jahre 1986-1988, wobei nur der Mittelwert über diesen Zeitraum verwendet wurde<sup>2</sup>. Weiterhin wird, wie bereits erwähnt, nur ein Dichte- bzw. Geschwindigkeitsmoment verwendet.

Die Bezeichnung der Läufe bzw. Experimente geschieht nach einem Schlüssel, der aus vier Buchstaben besteht. Dabei stehen die Buchstaben der Reihe nach für:  $A_h, K_h, N, D_E$ , wobei im Einzelfall auch der Buchstabe G für den Parameter  $\gamma$  angehängt werden kann. Die Zuweisung eines Zahlenwertes zu einem Buchstaben ist im Lauf der Zeit gewachsen. In der folgenden Tabelle sind die Buchstaben den in der Arbeit verwendeten Zahlenwerten zugeordnet.

<sup>1</sup>Hier kann z.B. die Reynoldszahl- bzw. Pecletzahl- Bedingung genannt werden, nach der für numerische Modelle gelten sollte  $U \Delta/A < 2$ , wobei  $U$  eine typische Geschwindigkeit,  $\Delta$  die Gitterauflösung und  $A$  die turbulente Viskosität bzw. Diffusivität beschreibt (siehe z.B. [48]).

<sup>2</sup>Dieser Windschub wurde auch im von der EU geförderten DYNAMO-Projekt (Barnier et al. (1995) [5]) verwendet, das 1997 abgeschlossen wurde und mit Hilfe von drei verschiedenen numerischen Modellen die Zirkulation und ihre Variabilität im Nordatlantik untersuchen sollte.

	$A_h$ $10^4[m^2/s]$	$K_h$ $10^3[m^2/s]$	$N$ $10^{-3}[s^{-1}]$	$D_E$ $10^{-10}[s^{-1}]$
a	2	2	2.6	30
b	5	5	1	1
c	7	0	1.5	60
d	4	1	2	80
e	3.5	1.5		5
f	1	10	0	2.5
g	10	2.5	4	0.5
h				1.5

Im Folgenden wird nun der Einfluss der einzelnen Parameter untersucht, wobei sich eine Zusammenstellung der Experimente in Tabelle 3.1 befindet.

**Horizontale Viskosität  $A_h$**  Das Verhalten des Transportes durch die Drakepassage oder der Strömung in Abhängigkeit der horizontalen Viskosität mag durchaus nicht eindeutig und sehr komplex sein, wie z.B. Daniel Borowski (2003) [7] in seiner Arbeit an einem vereinfachten Kanalmodell gezeigt hat. Generell würde man mit zunehmender Viskosität erwarten, dass der Transport kleiner wird und die Struktur der vom Modell berechneten Lösung glatter und weniger verrauscht ist. Letzteres wurde auch in Borowskis Studien gezeigt, wobei die von ihm verwendeten Werte im Bereich von  $A_h = 1 \cdot 10^3 m/s^2$  bis  $A_h = 2 \cdot 10^5 m/s^2$  liegen. Für den Transport selber konnte er dagegen ein komplexes Verhalten zeigen, nachdem der Transport je nach Modellkonfiguration mal mit zunehmender Viskosität anstieg oder abfiel.

Für einen flachen Boden ist die Lage recht überschaubar, da der Antrieb durch den Wind nur über die Reibung balanciert wird, so dass der Transport etwa für einen zonalen Kanal durch  $B^3\tau_x/A_h$  (siehe z.B. Olbers et al. (2006) [46]) mit der Breite  $B$  des Kanals gegeben ist. Für diese Beziehung kann man gut ablesen, dass der Transport mit wachsender Viskosität fallen muss.

Nun spielen in der Impulsbilanz neben der Reibung, die man gemeinhin mit der Viskosität in Verbindung bringt, noch weitere physikalische Mechanismen wie z.B. der Bottom-Form-Stress (siehe z.B. Olbers et al. (2004) [44]) eine Rolle, der an einen nicht flachen Boden geknüpft ist. Deren Veränderung in Abhängigkeit von der Viskosität ist eben etwas komplizierter und soll hier nicht näher erläutert werden.

In dieser Arbeit wird der Einfluss der Viskosität nur sehr oberflächlich untersucht, indem die horizontale Viskosität

über einen kleinen Bereich variiert wird, und der resultierende Transport bzw. die Struktur der Lösung betrachtet werden.

In Abb. 3.3 (a) ist der Transport durch die Drakepassage als Funktion der horizontalen Viskosität über einen Bereich von  $A_h = 1 \cdot 10^4 m^2/s$  bis  $A_h = 10 \cdot 10^4 m^2/s$  aufgetragen, während die übrigen Parameter mit den Werten „ach“ festgehalten werden. Man erkennt, dass der Transport in diesem Bereich von 124 Sv auf 104 Sv fallend ist. In Abb. 3.5 ist die Stromfunktion und die potentielle Energie für die horizontalen Viskositäten  $A_h = 1, 5, 10 \cdot 10^4 m^2/s$  dargestellt. Wie oben erwähnt, zeigt auch hier die Stromfunktion für kleine Viskositäten ein stark verrauschtes Verhalten mit einer stark mäandrierenden Strömung. Dieses Verhalten wird jedoch mit zunehmender Viskosität viel schwächer.

**Dichteschichtung  $N$**  In den folgenden Untersuchungen soll ein konstantes  $N$  verwendet werden, obgleich die Brunt-Väisälä-Frequenz generell eine Funktion der Tiefe sein kann. Zusätzlich soll die Wassersäule stabil geschichtet sein, was  $N > 0$  bedeutet. Über die Wassersäule gemittelte Werte liegen im Südlichen Ozean typischerweise im Bereich  $0.1 \cdot 10^{-3} \dots 0.3 \cdot 10^{-3}$ , wie man an Abb. 3.2 sehen kann, die mit Hilfe des Levitus 94 erstellt wurde.<sup>3</sup>

Hat man einen homogenen Ozean, also  $N = 0$ , dann sollte die Strömung im Wesentlichen den  $f/h$ -Konturen folgen, was man in Abb. 3.6 (a) auch sehen kann. Der Transport durch die Drakepassage nimmt hier einen sehr kleinen Wert von 31 Sv an (7.6 Sv in Cai und Baines (1996) [10]), da diese Konturen in der Passage zu einem großen Teil blockiert werden, d.h. sie laufen etwa auf den südamerikanischen Kontinent. Ohne einen thermohalinen Antrieb (Q-forcing) des ersten Dichtemomentes bleibt, sofern es auch zu Beginn der Integration Null war, dieses Null, wie man in Abb. 3.6 (b) sehen kann, da der Wind keinen Einfluss über das Ekman-Pumpen<sup>4</sup> auf das erste Dichtemoment hat.

Die Hinzunahme einer Schichtung ermöglicht über das Ekman-Pumpen den Aufbau eines  $E$ -Feldes verschieden von Null, so dass mittels des JEBAR-Effektes, der auf dem  $\nabla E$ -Term in der barotropen Impulsgleichung beruht, eine Vergrößerung des ACC-Transportes durch die Drakepassage

<sup>3</sup>Die mittlere Stabilitätsfrequenz wurde berechnet durch  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_{pot}}{dz}$ . Die Referenzdichte beträgt  $\rho_0 = 1035 kg/m^3$  und ist für alle Orte gleich, um zwischen den Orten besser vergleichen zu können.  $\rho_{pot}(S, T_{pot}) = \rho(S, T_{pot}, P = 0)$  bezeichnet die potentielle Dichte bei Oberflächendruck.

<sup>4</sup>Dieses wird durch den  $N^2/2\nabla \cdot \vec{u}_2'$  Term in Gleichung (2.13) bedingt.

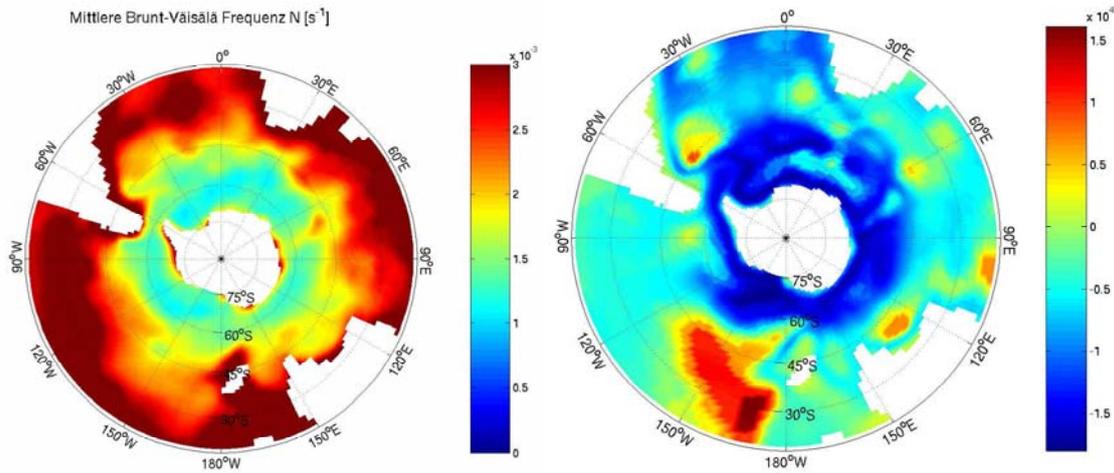


Abbildung 3.2: Auswertung des Levitus 94 Datensatzes. **Links:** Mittlere Brunt-Väisälä-Frequenz im Südlichen Ozean. Werte oberhalb von  $3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  sind im größten Farbwert zusammengefasst. **Rechts:** Erstes Dichtemoment ; für den gesamten Südlichen Ozean wird ein festes lineares Dichteprofil vorgegeben mit einem Oberflächenwert von  $\rho_s = 1027 \text{ kg/m}^3$  und einer Schichtung von  $N = 0.0015 \text{ s}^{-1}$ .

ge bedingt sein kann.

Dass der Transport bei stärker werdender Schichtung wirklich ansteigt, ist gut in Abb. 3.3 (b) zu sehen, in der sich der Transport von 31 Sv bei  $N = 0$  auf 221 Sv bei  $N = 0.0026 \text{ s}^{-1}$  erhöht.

**Dissipationskonstante  $D_E$**  Wie im letzten Kapitel beschrieben, bewirkt die Dissipation im ersten Dichtemoment, dass die Abweichungen von der Hintergrundschichtung klein bleiben. Wird die Dissipation also zu groß gewählt, so sind horizontale Gradienten im Dichtemoment sehr klein, was einen kleinen JEBAR-Term und damit eine Bindung der Stromfunktion an die geostrophischen Konturen zur Folge hat. Dieses reduziert den Transport durch die Drakepassage dann wieder, wie in Abb. 3.3 (c) zu erkennen ist.

Betrachtet man das erste Dichtemoment realer Daten (siehe Abb. 3.2), so erkennt man, dass es Werte in der Größenordnung von  $|E_1| \leq 1.5 \cdot 10^4 \text{ m}^3/\text{s}^2$  annehmen kann. Der Lauf bda0 (siehe Abb. 3.6 (d)) ohne Dissipation zeigt aber, dass eine Dissipation nötig ist, um die Werte des ersten Dichtemomentes auf diesen Rahmen zu beschränken. Andererseits führen zu große Werte der Dissipationskonstanten zu zu kleinen Dichtemomenten, wie man für den Lauf baca in Abb. 3.6 (f) sehen kann. Insbesondere zeigt sich deutlich in den Abbildungen (e-f), dass sich die Stromfunktion und das erste Dichtemoment wieder stärker an den  $f/h$ -Konturen orientieren, wie es für kleine Abweichungen von der Hintergrundschichtung zu erwarten ist. Die Dissipationskonstante sollte also nicht zu groß gewählt werden,

damit das  $E$ -Feld sich in einem angemessenen Rahmen entfalten kann.

Neben den absoluten Werten des ersten Dichtemomentes bestimmt noch ein weiterer Gesichtspunkt die Wahl der Dissipationskonstante. Wählt man sie zu klein, so bedarf es einer sehr langen Zeit, bis das System in einen stationären Zustand gelangt.

Um ein Gefühl für die Zeitspanne zu bekommen, in der sich das System aus dem Nullzustand bedingt durch die Dissipation in einen fast stationären Zustand bewegt, kann man sich die linearisierte  $E$ -Gleichung ohne Diffusion für einen flachen Boden anschauen. Diese hat dann die prinzipielle Form  $\frac{d}{dt} E + D_E E = F_E$ , wobei  $F_E$  den Antrieb durch den Windschub oder ein thermohalines Forcing beschreibt. Die Lösung dieser Differentialgleichung für einen anfänglichen Nullzustand ist gegeben durch  $E(t) = F_E/D_E \cdot (1 - \exp(-D_E t))$  und beschreibt den exponentiellen Einschwingvorgang in den stationären Zustand  $E(t = \infty) = F_E/D_E$ . In der Zeitspanne  $t = D_E^{-1}$  hat das System dann etwa 63% des stationären Wertes erreicht. Für  $D_E = 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$  sind das etwa 317 Jahre und für  $D_E = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$  reduziert sich diese Spanne schon auf etwa 63.5 Jahre. 90% des stationären Wertes sind für  $D_E = 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$  nach etwa 730 Jahren und für  $D_E = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$  nach etwa 146 Jahren erreicht. Da das volle BARBI Modell aber weitere Terme in der  $E$ -Gleichung hat, geben diese Zahlen nur sehr grobe Richtwerte wieder. Insbesondere sorgt die Diffusion dafür, dass der stationäre Zustand früher erreicht wird.

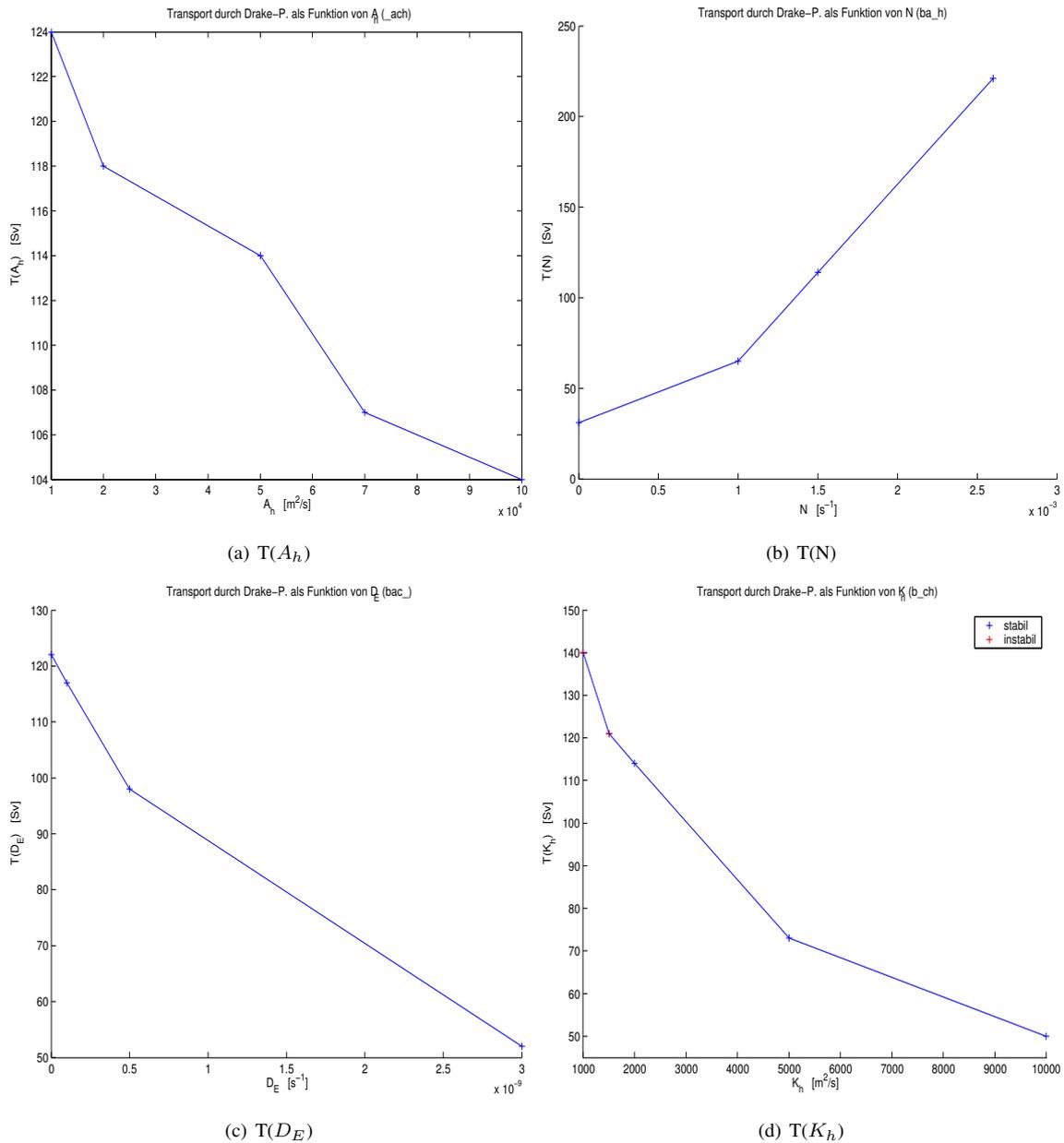


Abbildung 3.3: Der Transport durch die Drakepassage als Funktion verschiedener Parameter. **(a)**: In Abhängigkeit von  $A_h$  mit den übrigen Parametern *\_ach*. **(b)**: In Abhängigkeit von  $N$  mit den übrigen Parametern *ba\_h*. **(c)**: In Abhängigkeit von  $D_E$  mit den übrigen Parametern *bac\_*. **(d)**: In Abhängigkeit von  $K_h$  mit den übrigen Parametern *b\_ch*.

Abschließend muss man aus diesen Untersuchungen folgern, dass Werte von  $D_E = 5 \cdot 10^{-11}$  bis  $D_E = 5 \cdot 10^{-10} s^{-1}$  angebracht sind.

**Horizontale Diffusivität  $K_h$**  Um den Einfluss der horizontalen Diffusivität auf den Transport durch die Drakepassage oder die Struktur der Lösung plausibel zu machen, ist die Überlegung hilfreich, dass horizontale Dichteunterschiede durch große Werte der Diffusivität stark ausgeglichen werden. Analog zur Wirkung einer großen Dissipationskonstanten  $D_E$  bedeutet dies also, dass horizontale Gra-

dienten der potentiellen Energie klein bleiben. Somit wird die Bedeutung des JEBAR-Terms als Antriebsterm geringer, und der Transport durch die Drakepassage sollte abnehmen.

Dieses Verhalten kann auch in Abb. 3.3 (d) beobachtet werden, in der der Transport als Funktion der horizontalen Diffusivität dargestellt ist. Zu dieser Abbildung ist noch zu sagen, dass die Punkte zu den beiden kleinsten Werten der Diffusivität eigentlich zu "instabilen" Läufen gehören. Diese "Instabilitäten" haben sich aber noch nicht so stark im gesamten Modellgebiet bemerkbar gemacht, so dass die

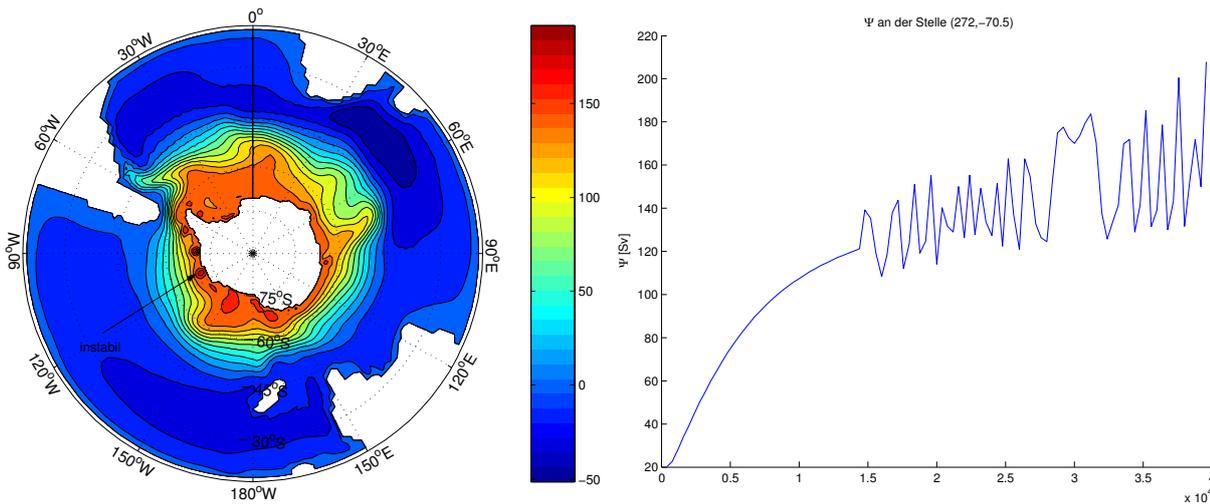


Abbildung 3.4: Beispiel für einen “instabilen“ Lauf mit den Parametern  $bec0$ . **Links:** Die Stromfunktion **Rechts:** Zeitreihe der Stromfunktion an der als “instabil“ bezeichneten Stelle. (Auf der horizontalen Achse ist die Zeit in Tagen aufgetragen.)

Transporte noch gut zu bestimmen waren.

Doch wie verändert sich die Struktur der Lösung? Sinkt der Einfluss des JEBAR-Terms, so ist zu erwarten, dass die Strömung sich mehr an den geostrophischen Konturen orientiert. Dieses Verhalten kann in der Tat auch beobachtet werden. In Abb. 3.7 ist die Stromfunktion und die potentielle Energie (das erste Dichtemoment  $E_1$ ) für die drei verschiedenen Werte  $K_h = 1, 2, 10 \cdot 10^3 m^2/s$  dargestellt. Deutlich ist die stark zonale und glatte Stromfunktion im oberen Bild zu erkennen, wobei die Stromfunktion sich stark am Feld der potentiellen Energie orientiert.<sup>5</sup> Dieses Verhalten wird schwächer in den unteren beiden Bildern (e und f), in denen die Stromfunktion stärkere meridionale Ausbuchtungen zeigt und sich stärker an den geostrophischen Konturen orientiert.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass eine erhöhte Diffusivität gleichsam einer erhöhten Dissipation oder einer verminderten Dichteschichtung zum einen den Transport vermindert und zum anderen eine stärker an den  $f/h$ -Konturen orientierte Stromfunktion bewirkt.

**‘Instabiles’ Systemverhalten** Für manche Parameterkonstellationen reagiert das System an manchen Orten mit stark oszillierendem Verhalten, wie man Tabelle 3.1 entnehmen kann. Bisher wurde nicht näher auf das Ausmaß und die möglichen Ursachen dieser Oszillationen eingegan-

gen. An dieser Stelle soll dies nachgeholt werden, wobei im Folgenden die Bezeichnungen instabil und oszillierend synonym gebraucht werden.

In Abb. 3.4 ist im linken Bild die Stromfunktion eines Laufes mit oszillierendem Verhalten dargestellt, bei dem sich Wirbel an der antarktischen Küste gebildet haben. Im Bild ist ein solcher Wirbel durch einen Pfeil markiert. Im rechten Bild ist die Zeitreihe der Stromfunktion an dieser Stelle dargestellt, wobei man deutlich erkennt, wie die Stromfunktion nach etwa 15.000 Tagen verrauschter wird und stark zu oszillieren beginnt. Betrachtet man die zeitliche Entwicklung dieser Wirbel, so wandern sie zunächst an der antarktischen Küste nach Westen. Mit stärker werdender Strömung ändern sie schließlich die Richtung und laufen entlang der antarktischen Küste nach Osten. Dennoch scheinen sie die Antarktis nie ganz zu umrunden, sondern sie beschränken sich im Wesentlichen auf den Bereich zwischen dem Weddel- und dem Rossmeer.

Welche Ursachen könnten nun für dieses Verhalten in Frage kommen? Es gibt eine Vielzahl von Stabilitätskriterien (eine kurze Beschreibung einzelner Kriterien findet man in der MOM-Anleitung [48]), die erfüllt sein müssen, damit ein numerischer Code stabile Resultate liefert. Vor dem Programmstart werden deshalb zwei Stabilitätstests durchgeführt. Geprüft wird das Munk-Kriterium, das die Auflösung von Randschichten beschreibt. Da die Breite der Randschicht mit wachsender Viskosität zunimmt, sollte die Viskosität einen bestimmten Wert nicht unterschreiten, damit mindestens ein Gitterpunkt (besser zwei) innerhalb der Randschicht liegt. Ebenfalls wird das ‘Diffusions’-

<sup>5</sup>Dieses Verhalten, dass die Stromfunktion sich im baroklinen Fall in erster Näherung an der potentiellen Energie orientiert  $E \approx f\Psi + const$ , konnte auch von Olbers et al. (2006) [46] und in einer Vorstufe von Borowski et al. (2002) [6] gezeigt werden. Letztendlich steckt hier die geostrophische Balance dahinter.

Kriterium überprüft, das eine obere Schranke für die horizontale Diffusivität und Viskosität in Verbindung mit der Gitterauflösung und dem Zeitschritt angibt. Sind diese Werte zu groß, so breiten sich Informationen (Wellen) zu schnell aus. Durch die Einhaltung dieser beiden Kriterien können diese als Ursache für die Oszillationen weitgehend ausgeschlossen werden.

Ein weiteres Kriterium, das eine gewisse Ähnlichkeit mit dem 'Diffusions'-Kriterium hat, ist das CFL- Kriterium, das die numerische Stabilität im Zusammenhang mit Prozessen der Wellenausbreitung kontrollieren soll. Dabei gibt es abhängig von der Gitterweite und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit (z.B. von Schwerewellen oder Rossbywellen) eine obere Grenze für den Zeitschritt vor, die nicht überschritten werden sollte. Bei Überschreiten dieses Kriteriums wird das Modell sehr schnell instabil, so dass man dieses gut erkennen und durch Verminderung des Zeitschrittes reagieren kann. Auch dieses Kriterium ist vermutlich nicht für die Oszillationen verantwortlich.

Es gäbe dann noch ein Kriterium, das zu starke Gradienten in der Topographie für die Instabilitäten verantwortlich macht. Ich glaube aber nicht daran, da die Topographie sehr oft geglättet wurde und die Instabilität eher von der Parameterwahl abzuhängen scheint.

Doch was könnte diese Oszillationen verursachen? Ich habe keine ganz eindeutige Erklärung hierfür, so dass ich auf Vermutungen angewiesen bin. Es gibt aber eine Reihe von Beobachtungen, die auf eine potentielle Quelle der Instabilitäten in der  $E$ -Gleichung (dem baroklinen System) hinweisen.

So scheinen die Läufe interessanterweise ihr oszillatorisches Verhalten zu verlieren, sobald man die Dissipation in der  $E$ -Gleichung einführt. So ist z.B. der Lauf bac0 ohne Dissipation instabil, während der Lauf bach mit Dissipation ein numerisch stabiles Ergebnis liefert. Auch scheint eine erhöhte Stabilitätsfrequenz  $N$  das System zu stabilisieren. So sind z.B. die Läufe bac0, bad0 und baa0 instabil, während die Erhöhung im Lauf bag0 auf  $N = 4 \cdot 10^{-3} s^{-1}$  das System stabilisiert.

Weiterhin beeinflusst die Wahl eines anderen Schließungsparameters  $\gamma$  die Stabilität des Systems. Der Lauf bacb ist stabil, während der Lauf bacbG mit dem Schließungsparameter  $\gamma = 0$  instabil ist.

Was nun im baroklinen System zu den Oszillationen führt, ist mir nicht ganz klar. Vielleicht sind es barokline Wellenprozesse. Allerdings können auch numerische Prozesse nicht endgültig ausgeschlossen werden. Es bedarf al-

so weiterer Untersuchungen, um die Ursachen für diese Oszillationen zu finden. Dieses konnte aber leider nicht im Rahmen dieser Arbeit geleistet werden.

**Zusammenfassung** Wenn die Parameter nach ihrem Einfluss auf den Transport sortiert werden, so kann man insgesamt sagen, dass die Parameter, die unmittelbar auf die potentielle Energie wirken ( $N$ ,  $D_E$  und  $K_h$ ), den Transport stärker beeinflussen als die horizontale Viskosität, wie an Abb. 3.3 zu erkennen ist.

Nachdem nun der Einfluss verschiedener Parameterkonstellationen auf den stationären Zustand und den Transport durch die Drakepassage untersucht worden ist, sollen nun die Parameter vorgestellt werden, die für die weiteren Untersuchungen verwendet werden:

$A_h$	$5 \cdot 10^4 m^2/s$	$K_h$	$2 \cdot 10^3 m^2/s$
$\gamma$	$0.3921 m^2/s$	$D_E$	$1.5 \cdot 10^{-10} s^{-1}$
$N$	$1.5 \cdot 10^{-3} s^{-1}$		

Für die Auswahl der einzelnen Parameter wurden unterschiedliche Kriterien verwendet. So wurde z.B. die horizontale Viskosität nach der Glattheit der Stromfunktion ausgewählt. Die Stabilitätsfrequenz wurde im Wesentlichen nach Abb. 3.2 bestimmt, die auf dem Levitus Datensatz aufbaut. Die Dissipationskonstante  $D_E$  wurde als Kompromiss zwischen notwendiger Dissipation und Dauer bis zum Erreichen des stationären Zustandes gewählt. Damit die Transporte nicht zu niedrig werden, ist dann die horizontale Diffusivität  $K_h$  schließlich so klein gewählt worden, wie es im Rahmen der Stabilität möglich war.

Ich möchte jedoch hinzufügen, dass ich mit der Wahl der Stabilitätsfrequenz im Nachhinein nicht ganz glücklich bin. Wie man Tabelle 3.1 entnehmen kann, bedingt dieser Parametersatz (bach) einen Transport von 114 Sv. Dieser ist verglichen mit den üblicherweise in der Literatur gehandelten 136 Sv zu klein. Wenn ich alle Läufe noch einmal machen könnte, würde ich einen Wert von  $N = 0.002 s^{-1}$  wählen, den der Levitus-Datensatz im Übrigen auch noch gut hergibt. Allerdings sind weniger die absoluten Zahlenwerte des Transportes als vielmehr die Schwankungen um seinen Mittelwert für die Variabilitätsuntersuchungen von Bedeutung, so dass sich diese unglückliche Wahl nicht so gravierend auf die zukünftigen Untersuchungen auswirkt.

Lauf	$A_h [m^2/s]$	$K_h [m^2/s]$	$N [s^{-1}]$	$D_E [s^{-1}]$	$\gamma$	$\Psi$ Drake [Sv]	Abb.
aac0	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	134	
bdc0	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	oszillierend	
bda0	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	272	3.6
bec0	$5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	oszillierend	
baf0	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	0	0	0.3921	31	
bac0	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	oszillierend	
bad0	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	oszillierend	
baa0	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	oszillierend	
bag0	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	346	
bba0	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0	0.3921	161	
fach	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	124	3.5
aach	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	118	
aacf	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	116	
eacb	$3.5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0.3921	120	
eacf	$3.5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	112	
egcf	$3.5 \cdot 10^4$	$2.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	102	
bdch	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	oszillierend	3.7
bech	$5 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	oszillierend	
bafh	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	0	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	31	3.6
bacb	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-10}$	0.3921	117	
babh	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	65	
bach	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	114	3.5, 3.7
baah	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	221	
bacf	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	109	
bace	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	98	
baca	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-9}$	0.3921	52	3.6
bbch	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	73	
bbch	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	73	
bbdf	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	106	
bfch	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	50	3.7
cach	$7 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	107	
gach	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0.3921	104	3.5
eacbG	$3.5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0	oszillierend	
bacbG	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0	oszillierend	
bgebG	$5 \cdot 10^4$	$2.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0	oszillierend	
bbdfG	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	0	106	

Tabelle 3.1: Übersicht über die Parameter und Transporte durch die Drakepassage für die verschiedenen Läufe (forcing fsnoro7\_ecmwf).

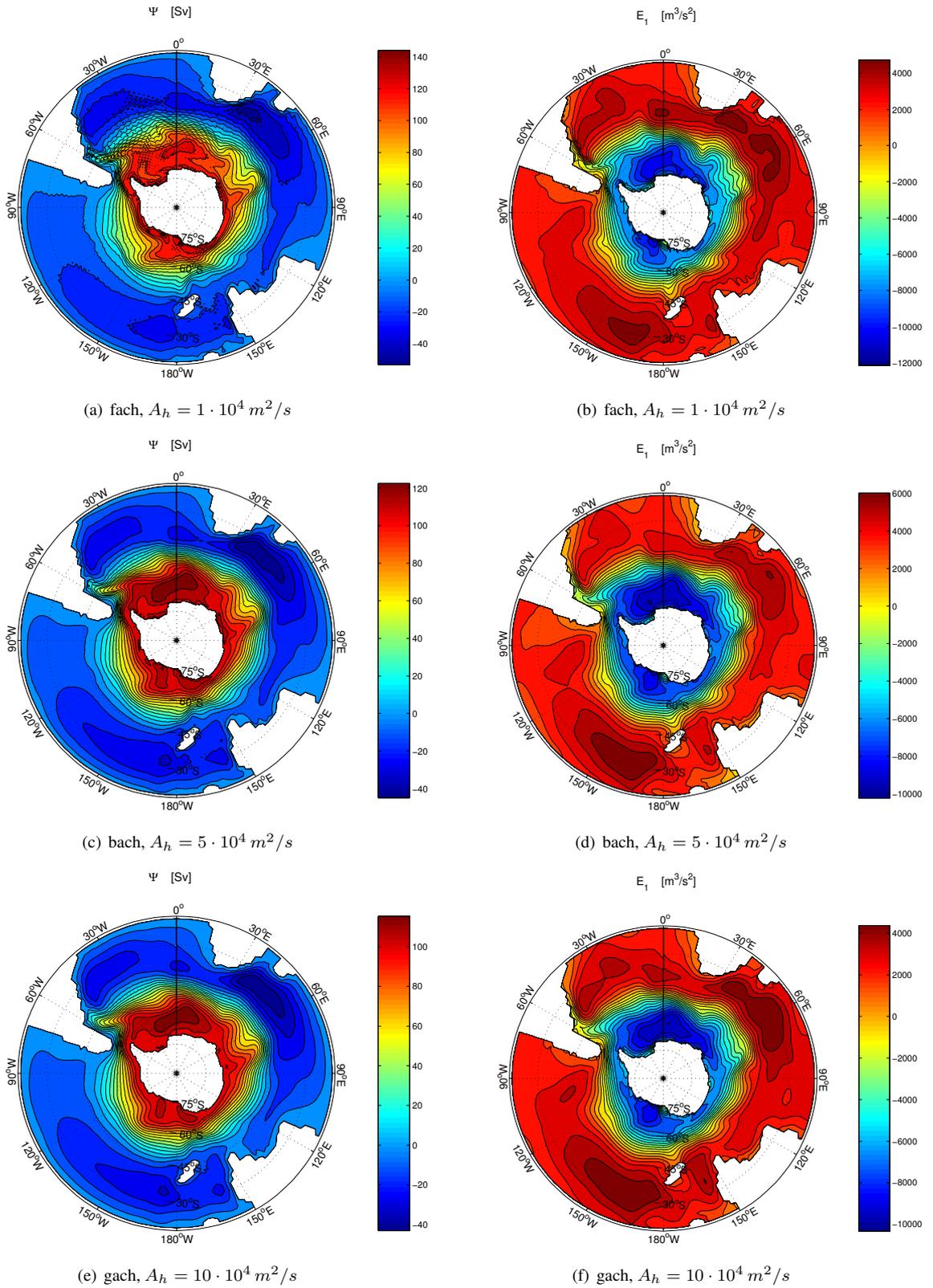


Abbildung 3.5: Stromfunktion und potentielle Energie für ausgewählte Läufe. Die hauptsächliche Variation liegt auf der horizontalen Viskosität  $A_h = 1 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4, 10 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$ .

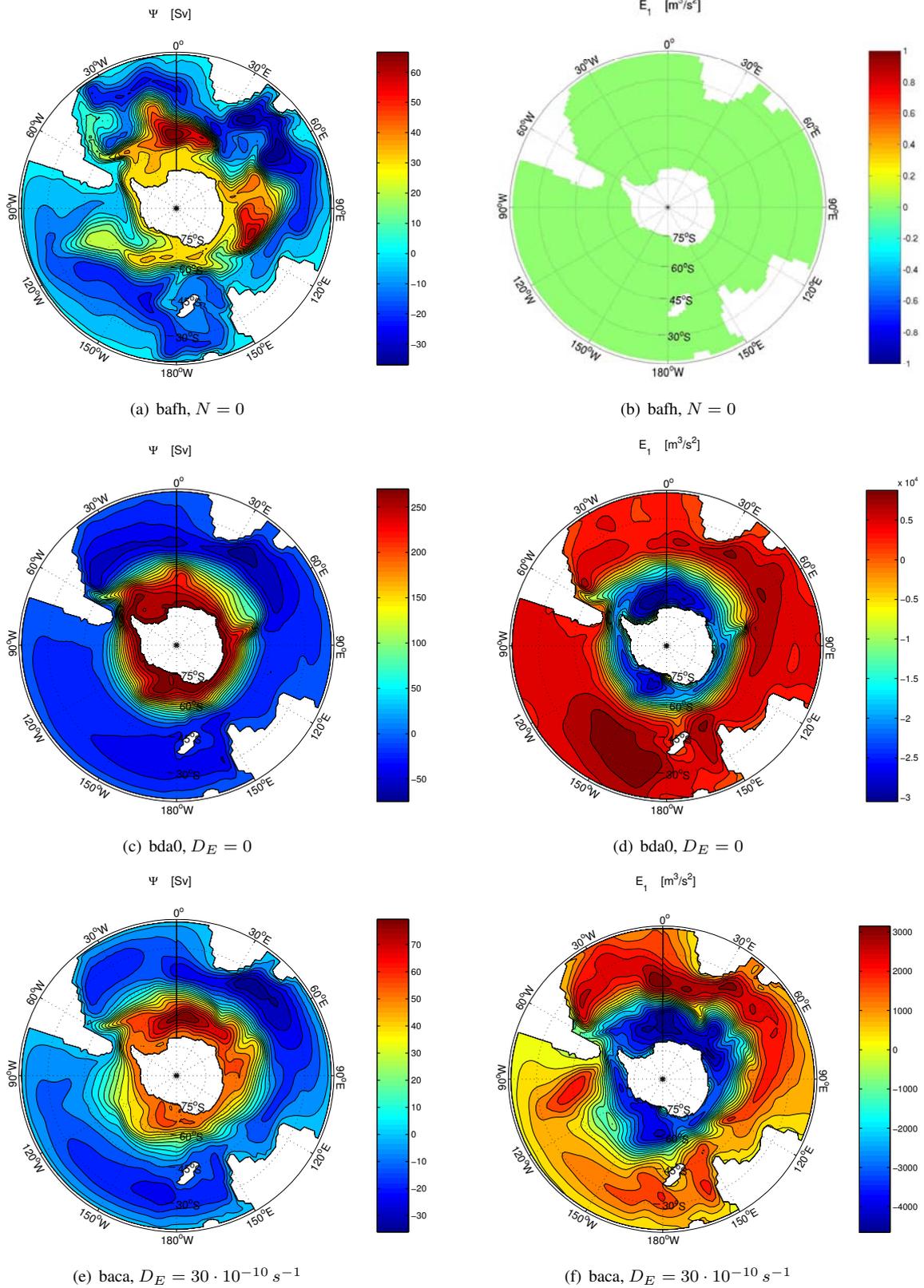


Abbildung 3.6: Stromfunktion und potentielle Energie für ausgewählte Läufe. Das Augenmerk liegt hauptsächlich auf der Stabilitätsfrequenz  $N$  und der Dissipation  $D_e$ .

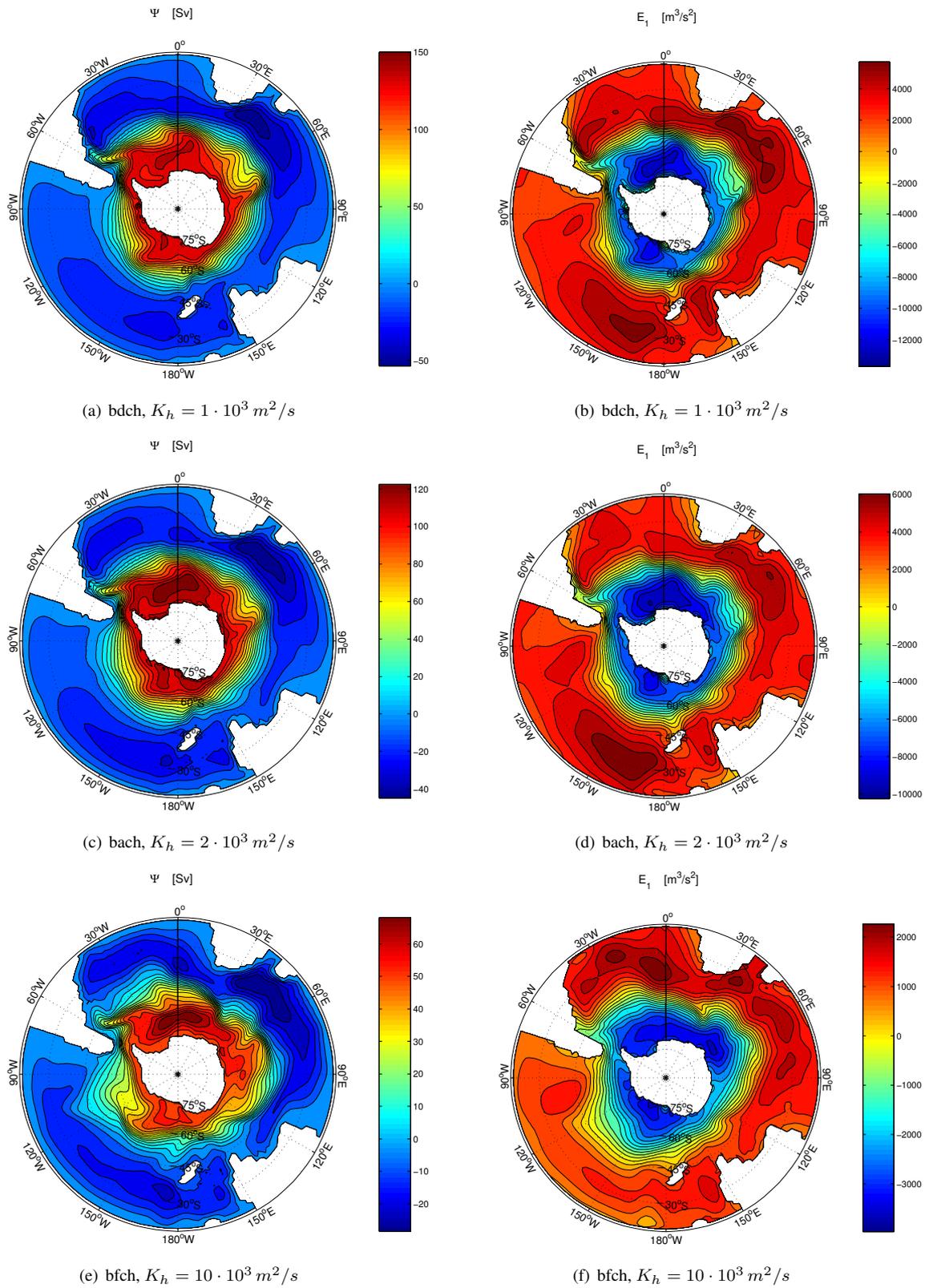


Abbildung 3.7: Stromfunktion und potentielle Energie für ausgewählte Läufe. Die hauptsächliche Variation liegt auf der horizontalen Diffusivität  $K_h = 1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 10 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ .



# Kapitel 4

## Wellenausbreitung

### 4.1 Motivation

Wellenprozesse spielen im Ozean eine sehr wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe können kinetische oder potentielle Energie bzw. etwas allgemeiner Signale in relativ kurzer Zeit über große Distanzen übertragen werden. Weiterhin stellt sich der Ozean mit ihrer Hilfe auf Veränderungen in den antreibenden Faktoren wie z.B. dem Windschub oder der Verteilung der Oberflächentemperatur ein. In diesem Kapitel sollen nun drei Aspekte der Wellenausbreitung im Ozean mit Hilfe von BARBI untersucht werden.

Der erste Aspekt kann mit Hilfe von Abb. 4.1 veranschaulicht werden. Diese zeigt ein Hovmöllerdiagramm<sup>1</sup> der potentiellen Energie entlang  $30^\circ S$  aus einem BARBI Experiment mit realer Bodentopographie und täglich wechselnden Winden. Die Daten wurden mit Hilfe einer Bandpassfilterung in der Zeit aufbereitet, die nur Perioden zwischen 1.5 und 7 Jahren berücksichtigt. Unterhalb des Hovmöllerdiagrammes ist zur Veranschaulichung die Modelltopographie mit dem zonalen Schnitt noch einmal dargestellt.

In diesem Diagramm kann man ein paar interessante Phänomene der Wellenausbreitung erkennen. Zunächst entstehen an den Westküsten der Kontinente (insbesondere von Afrika und Südamerika) nach Westen propagierende wellenartige Strukturen, bei denen es sich vermutlich um Ross-

---

<sup>1</sup>Ein Hovmöllerdiagramm stellt eine Größe in Raum und Zeit dar, wobei hier auf der x-Achse der Ort und auf der y-Achse die Zeit aufgetragen ist. Das klingt komplizierter, als es letztendlich ist. Da man in einem 2-dimensionalen Bild eben nur zwei Achsen hat, muss man sich im Raum auf eine Koordinate beschränken, so dass man die Größe z.B. nur an allen Orten längs eines zonalen Schnittes betrachtet. Auf der Zeitachse trägt man dann immer wieder die Größe entlang desselben Schnittes zu aufeinander folgenden Zeitpunkten auf. Betrachtet man z.B. eine Welle, die sich entlang dieses Schnittes ausbreitet, so ist ihre Signatur im Hovmöllerdiagramm durch ein schräg nach oben laufende Struktur gegeben. Deshalb verwendet man Hovmöllerdiagramme häufig, um Wellenphänomene sichtbar zu machen.

bywellen handeln dürfte. Betrachtet man z.B. die Wellen, die von der Küste Südamerikas loslaufen, so erkennt man, dass nach einer kurzen Strecke ungestörter Propagation die Wellen auf den Ostpazifischen Rücken laufen, an dem eine Störung bzw. Blockierung der Propagation stattfindet. Im Hovmöllerdiagramm ist dieser Bereich durch die rechte gestrichelte schwarze Linie westlich von Südamerika angedeutet. Die linke schwarze Linie markiert den Bereich, in dem die Wellen aus dem Südpazifischen Becken in die Tasmansee laufen. Auch hier wird die freie Propagation durch die Bodentopographie gestört.

Ein weiteres Phänomen wird durch die roten Linien am rechten Rand beschrieben, welche die Ausbreitung von Wellen andeuten, die sich von der Westküste Afrikas ablösen. Nachdem sie das Argentinische Becken durchquert haben, scheint sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit beim Auflaufen der Welle auf den Kontinentalschelf Südamerikas zu verändern.

Dieses Beispiel ist von exemplarischer Bedeutung: Ozeanische Rücken beeinflussen bzw. blockieren die Ausbreitung von Rossbywellen stark, und die Bodentopographie kann ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit verändern. Aus diesem Grund beschäftigt sich ein Abschnitt dieses Kapitels mit dem Einfluss von Rücken auf die Ausbreitung von Rossbywellen. Literaturbeispiele zu dieser Fragestellung sind u.a. die Arbeiten von Barnier (1988) [4], Schmidt und Johnson (1997) [53] und Owen et al. (2002) [47].

Der zweite Aspekt ist schon angeklungen und umfasst die veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit barokliner Rossbywellen. Mit ihrem Artikel 'Global Observations of Oceanic Rossby Waves' im Jahre 1996 haben Dudley B. Chelton und Michael G. Schlax [13] für Aufsehen gesorgt und eine Lawine von weiteren Untersuchungen angestoßen. Auf der Grundlage von Satelliten-Messungen mit dem TOPEX/POSEIDON Altimeter konnten sie zeigen, dass sich die Amplitude von Rossbywellen in Gegenwart besonde-

rer topographischer Gegebenheiten verstärkt, und dass die Phasengeschwindigkeit der Wellen Abweichungen von der Theorie freier linearer Rossbywellen über flachem Boden zeigt. In der rechten Spalte der Abb. 4.1 sind ihre Ergebnisse bezüglich der Phasengeschwindigkeiten graphisch dargestellt, wobei in der oberen Abbildung die absolut gemessenen Geschwindigkeiten in cm/s und in der unteren das Verhältnis von gemessenem zu theoretischem Wert zu sehen sind. In dieser Abbildung erkennt man deutlich, dass ein großer Teil der Werte zwischen 1 und 3 liegt, während wenige Werte unter 1 oder gar über 4 liegen.

Eine Übersicht über die Erklärungsversuche dieser Diskrepanz zwischen gemessener und theoretischer Phasengeschwindigkeit findet sich bei Chelton 2003 [14]. Diese lassen sich grob in fünf Gruppen einteilen:

1. Zusammenspiel von stehenden und laufenden Wellen (White 1977, Qiu et al. 1997)
2. Einfluss der mittleren Meeresströmungen auf die Wellenausbreitung (Killworth et al. 1997, Dewar 1998, de Soeke und Chelton 1999, Liu 1999, Yang 2000)
3. Gekoppelte Interaktionen zwischen Ozean und Atmosphäre (White et al. 1997, White 2000, White 2001, White und Annis 2003)
4. Einflüsse der Bodentopographie (Killworth und Blundell 1999, Tailleux und McWilliams 2000, Tailleux und McWilliams 2001, Tailleux 2003)
5. Einflüsse der Bodentopographie und der mittleren Meeresströmungen (Killworth und Blundel 2003a/b, Killworth und Blundel 2004)

An dieser Stelle soll aber nicht weiter auf diese Artikel eingegangen werden.

Der dritte Aspekt schließlich ist der Einfluss, den der Südliche Ozean auf den gesamten Weltozean mit Hilfe diverser Wellenprozesse ausüben kann. Diese Fragestellung soll im dritten Abschnitt dieses Kapitels untersucht werden.

## 4.2 Eine Dichteanomalie überquert einen meridionalen Rücken

Kommen wir nun zum ersten der drei Aspekte, dem Einfluss, den ein meridionaler Rücken auf die Ausbreitung einer Dichteanomalie ausübt. Im realen Ozean könnte eine solche Situation z.B. entstehen, wenn Rossbywellen auf den Mittelatlantischen Rücken treffen, der sich einmal der Länge nach von Norden nach Süden durch den Atlantik zieht.

Bernard Barnier untersuchte 1988 (Barnier (1988) [4]) in einem vereinfachten quasigeostrophischen Modell die Wechselwirkung zwischen baroklinen Rossbywellen und einem meridionalen Rücken. Er beobachtete, dass barokline Wellen, die an der Ostküste des Modellgebietes erzeugt wurden, durch den Rücken blockiert wurden. Für diese Blockierung waren nach seiner Auffassung im Wesentlichen zwei Mechanismen verantwortlich. Zunächst wird ein Teil der potentiellen Energie am Rücken in kurze barokline Wellen mit Wellenlängen von der Größenordnung des internen Deformationsradius reflektiert, die in kurzer Zeit dissipiert werden. Der zweite Mechanismus lässt sich gut an den BARBI-Gleichungen des 1-order Modells veranschaulichen und hängt mit dem JEBAR-Term zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \frac{1}{h} \nabla \Psi + \dots = -J\left(\frac{E}{h^2}, h\right) + \dots$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + hU \cdot \nabla \frac{E}{h^2} = \frac{N^2 h}{3} U \cdot \nabla h + \dots$$

An sich verändernder Topographie kann über den JEBAR-Term potentielle Energie in kinetische Energie bzw. in ein Signal in der Stromfunktion umgewandelt werden. Dieser Anteil der kinetischen Energie konnte dann bei Barnier über die im Modell vorhandene Bodenreibung ausgelöscht werden. Auf diese Weise konnte nach seiner Auffassung keine potentielle Energie den Rücken überqueren.

Die weiteren Untersuchungen in diesem Abschnitt sollen u.a. dieses Wechselspiel zwischen potentieller und kinetischer Energie mit Hilfe des JEBAR-Termes bei der Wechselwirkung einer Dichtestörung mit einem meridionalen Rücken betrachten. Dabei soll ein Doppelspiel des JEBAR-Termes gezeigt werden, der auf der einen Seite die Störungen blockieren, auf der anderen Seite jedoch auch dazu beitragen kann, dass potentielle Energie den Rücken

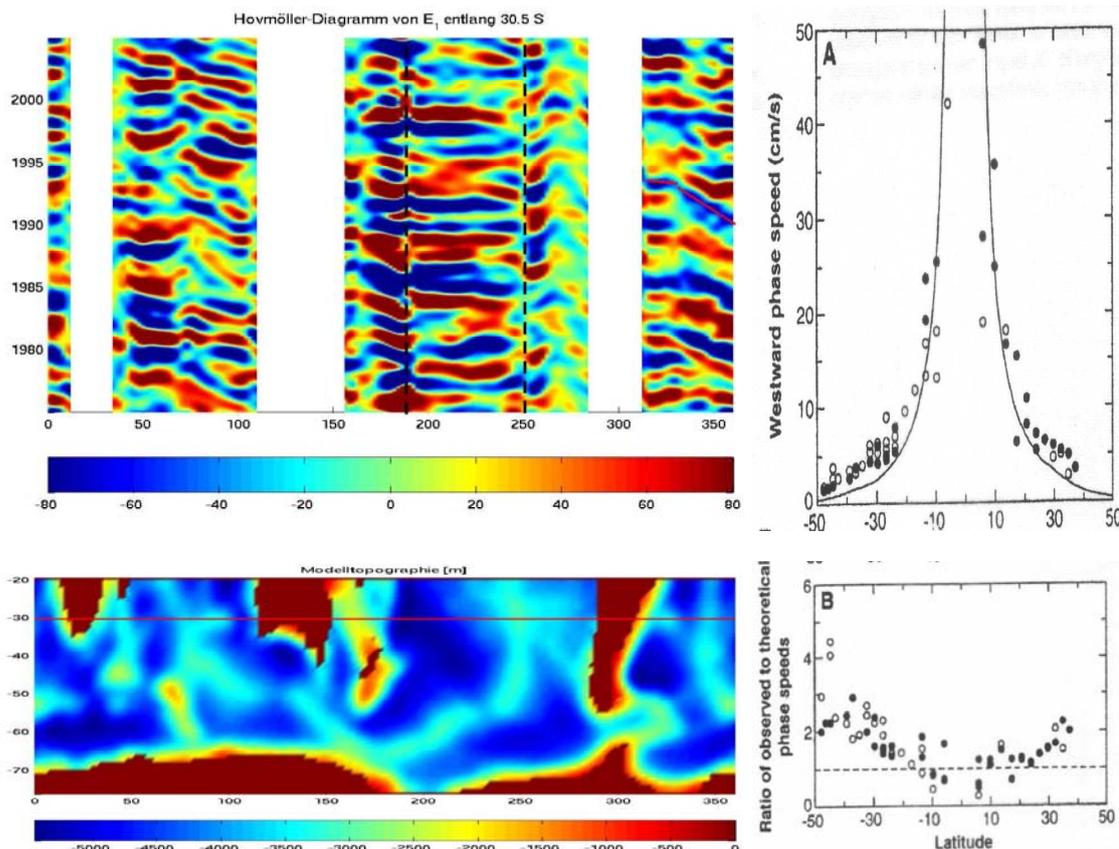


Abbildung 4.1: **Links:** Hovmöllerdiagramm der potentiellen Energie entlang  $30^\circ S$  aus dem Lauf mit den NCEP-täglichen Winden (Bandpassfilter 1.5 bis 7 Jahre.) und die Modelltopographie. **Rechts:** Abb. 5 aus Chelton und Schlax 1996 [13]. Im oberen Bild sind die Phasengeschwindigkeiten barokliner Rossbywellen aus TOPEX/POSEIDON Altimeter Daten und die theoretische Geschwindigkeit der ersten baroklinen Mode über flachem Boden als durchgezogene Linie eingetragen. Im unteren Bild sieht man das Verhältnis zwischen gemessener und theoretischer Ausbreitungsgeschwindigkeit.

überqueren kann. Um dieses zu zeigen, werden nur qualitative Beobachtungen mit dem Auge durchgeführt.

Im Einzelnen soll nun in einem idealisierten Kanalexperiment untersucht werden, auf welche Art und Weise eine Dichtestörung von gaussförmiger Struktur <sup>2</sup> mit einem solchen Rücken wechselwirkt. Genauer werden im Folgenden Störungen im ersten Dichtemoment  $E$  mit einer anfänglichen Amplitude von  $100 \text{ m}^3/\text{s}^2$  untersucht, was einer Erhöhung der Dichte entspricht. Insbesondere sollen freie Rossbywellen untersucht werden, die sich in der Regel nach Westen bewegen, so dass die Störung im östlichen Teil des Kanales platziert wird. Generell könnte man diese Untersuchungen auch als eine Art Streuexperiment deuten, bei dem untersucht wird, welcher Anteil der Störung die Barriere überwindet.

Das numerische Experiment besteht aus einem entlang

<sup>2</sup>Zerlegt man eine solche Störung nach ebenen Wellen - betrachtet man also ihre Fourierdarstellung-, so haben die Anteile mit Wellenvektor  $\mathbf{K} = 0$  (die langen Wellen) die größte Bedeutung.

$60^\circ S$  zentrierten zonalen Kanal von  $20^\circ$  Breite und  $120^\circ$  Länge mit einem meridionalen Rücken, der sich über eine zonale Distanz von  $L = 20^\circ$  erstreckt. Die Enden des Kanales im Osten und Westen sind zyklisch verbunden, so dass Wasser, das auf der einen Seite den Kanal verlässt, auf der anderen Seite wieder hineinfließt. Die mittlere Tiefe des Kanales beträgt  $4000 \text{ m}$  und seine Geometrie ist in Abb. 4.2 dargestellt. Für den Coriolisparameter wird die Näherung einer  $\beta$ -Ebene gemacht, und die übrigen Modellparameter sind in der folgenden Tabelle zusammen gestellt:

Gitterauflösung	$\Delta x \times \Delta y = 1^\circ \times 0.5^\circ$
Brunt-Väisälä-Frequenz	$N = 0.0026 \text{ s}^{-1}$
Anzahl der Momente	1
Dissipationskonstante	$D_E = 0$
horizontale Viskosität	$A_m = 1 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
horizontale Diffusivität	$A_h = 1 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

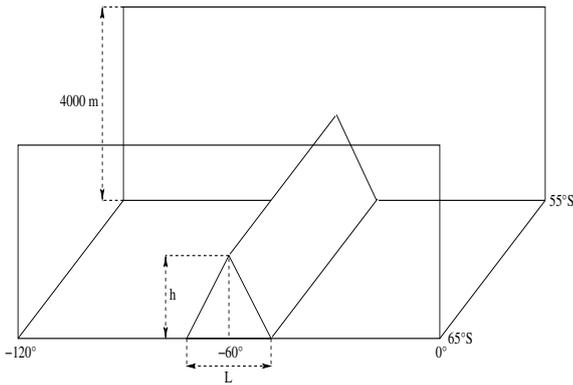


Abbildung 4.2: Skizze der Kanalgeometrie für das Streuexperiment einer gaussförmigen Dichtestörung an einem meridionalen Rücken.

**Dichtestörung ohne Rücken** Zur Einstimmung betrachten wir zunächst die Dichtestörung über flachem Boden ohne Rücken.

Im linken Teil der Abb. 4.3 ist die Ausbreitung der Störung im Laufe der Zeit in vier Schnappschüssen dargestellt, wobei man deutlich die für Rossbywellen typische westwärtige Bewegung der Störung erkennen kann. Mit Hilfe eines Hovmöllerdiagrammes, das im rechten Teil zu sehen ist, kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu  $-0.771$  cm/s bestimmt werden<sup>3</sup>. Der theoretische Wert für eine freie Welle über flachem Boden, wie ihn die quasigeostrophische Näherung liefert, liegt bei  $-0.767$  cm/s und weicht kaum vom gemessenen Wert ab. Dies sollte auch so sein, da der Schließungsparameter  $\gamma$  ja gerade so bestimmt wird, dass die Flachbodengeschwindigkeiten stimmen.

**Dichtestörung vor dem Rücken** Um die Sache etwas spannender zu machen, bringen wir nun den meridionalen Rücken ins Spiel, wobei die Dichtestörung östlich von diesem platziert wird.

Zunächst wird ein flacher Rücken von  $h = 100$  m betrachtet. In der linken Spalte von Abb. 4.4 sind die Ergebnisse aufbereitet. Man erkennt im oberen Bild, wie sich die Störung auf den Rücken bei  $-60^\circ$  zu bewegt. Bei Erreichen des Rückens wird die Störung zum Teil blockiert, was

<sup>3</sup>Um dieses Diagramm zu erstellen, wurde der zonale Datenvektor zu jedem Zeitpunkt normiert (Abziehen des Mittelwertes und Division durch die Standardabweichung). Auf diese Art und Weise kann man die Ausbreitung des Maximums der Störung besser verfolgen. Diese Methode weicht also von der üblicherweise verwendeten Darstellung der Isolinien des unbehandelten Feldes ab und wird im Folgenden öfter verwendet. Im Folgenden werden Abbildungen, die auf diese Weise erstellt wurden, einfach als normiert bezeichnet.

man gut in dem darunter liegenden Hovmöllerdiagramm sehen kann. Diese Blockierung ist jedoch im Gegensatz zu den Beobachtungen von Barnier nicht vollkommen, so dass man nach kurzer Zeit auch hinter dem Rücken ein Signal sehen kann. Allerdings hat es eher den Anschein, dass hinter dem Rücken eine neue Störung gleichen Vorzeichens erzeugt wird als dass die Störung über den Rücken läuft.

Wird der Kopplungsterm  $\nabla E$  in der barotropen Modellgleichung ausgeblendet, was einer Eliminierung des JEBAR-Termes in der Vorticitygleichung entspricht, so ist die Umwandlung von potentieller nach kinetischer Energie unterbrochen.

In der rechten Spalte Abb. 4.4 sind die Ergebnisse ohne den JEBAR-Term dargestellt. Betrachtet man das oberste Bild<sup>4</sup>, so hat man den Eindruck, dass ohne JEBAR-Term die Störung scheinbar ohne Behinderung über den Rücken fließt. Für diese Rückenhöhe scheint also tatsächlich der JEBAR-Term eine blockierende Wirkung auf die Ausbreitung der Störung zu haben, obgleich diese nicht vollkommen ist.

Doch was passiert, wenn man den Rücken wesentlich erhöht? In Abb. 4.5 sind die Resultate für einen Rücken mit einer Höhe von  $h = 2000$  m dargestellt. In der linken Spalte ist wieder das volle Modell mit JEBAR-Term und in der rechten ohne JEBAR-Term zu sehen. Zusätzlich zum vorhergehenden Fall ist die Stromfunktion dargestellt. Man sieht deutlich, wie nach Eintreffen der Störung auf der östlichen Seite des Rückens sich westlich des Rückens mit JEBAR-Term wieder eine neue Dichtestörung formiert, die dann weiter nach Westen propagiert.

Im Fall ohne JEBAR gelangt die Störung scheinbar gar nicht über den Rücken, obgleich man aus dem entsprechenden Hovmöllerdiagramm durchaus den Eindruck bekommen könnte. JEBAR scheint also auch für einen größeren Rücken dafür zu sorgen, dass zum einen zwar einlaufende Rossbywellen blockiert werden, zum anderen aber dennoch ein Signal über den Umweg der Stromfunktion über den Rücken gelangt, das dann weiter nach Westen propagieren kann. Ohne JEBAR jedoch scheinen die Wellen sehr stark blockiert zu werden.

Unabhängig von der Problematik des JEBAR-Termes kann man in den Abbildungen eine weitere interessante Beobachtung machen. Nach dem Abklingen der ursprünglichen Dichtestörung kann man sowohl im Feld der potentiellen

<sup>4</sup>Und das untere, das dem oberen entspricht mit dem Unterschied, dass nur die Bereiche dargestellt sind, die die Schwelle von 90% des Maximums der potentiellen Energie im Kanal überschreiten.

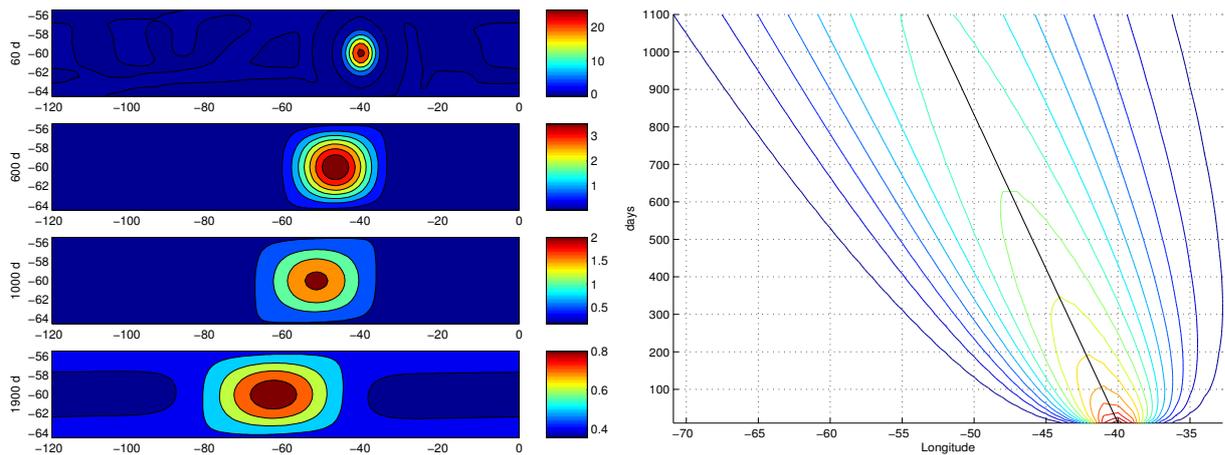


Abbildung 4.3: **Links:** Ausbreitung einer Dichtestörung mit einer anfänglichen Amplitude von  $100 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$  über flachem Boden. **Rechts:** Hovmöllerdiagramm des ersten Dichtemomentes auf einem zonalen Schnitt durch die Mitte des Kanals (normierte Darstellung).

len Energie als auch im Feld der barotropen Stromfunktion einen Fingerabdruck der Topographie erkennen.

Die soeben gezeigten Ergebnisse können eher als eine Einführung in die Problematik als eine erschöpfende Lösung derselben betrachtet werden. Es bedarf noch weiterer Untersuchungen, um die Rolle des JEBAR-Terms und generell die Wechselwirkung einer Dichtestörung mit einem Rücken zu beschreiben.

### 4.3 Einfluss von Topographie auf die Ausbreitung barokliner Rossbywellen

Kommen wir nun zum zweiten Abschnitt dieses Kapitels. Nachdem in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits auf die Arbeit von Chelton und Schlax und die Fülle der Folgeuntersuchungen in einem Überblick kurz eingegangen wurde, soll in diesem Abschnitt nun BARBI's Beitrag zu dieser Problemstellung vorgestellt werden. Dabei soll BARBI besonders den Einfluss der Bodentopographie unter die Lupe nehmen.

1999 schlossen Killworth und Blundel (1999) [35] mit ihrer theoretischen Arbeit noch aus, dass die Bodentopographie einen so gravierenden Einfluss auf globaler Ebene auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit haben kann. Sie fanden jedoch, dass lokal östlich und äquatorwärts von Hügeln die Geschwindigkeit gegenüber der entsprechenden Flachbodengeschwindigkeit erhöht sein kann, während sie auf der westlichen Seite verringert ist.

Ebenso können Tailleux und McWilliams (2000) [57] mit einem Zwei-Schichten Modell zeigen, dass ein meridionaler Rücken eine beschleunigende Wirkung auf barokline Rossbywellen ausüben kann.

Und sich an der Arbeit von Peter Rhines (1977) [50] orientierend, untersuchen Dirk Olbers in einem (noch) unveröffentlichten Skript und Fabian Schlösser (2005) zusammen mit Carsten Eden [52] Rossbywellen in BARBI über einer beliebig geneigten Ebene. Diese Arbeiten sollen im folgenden Paragraph als Vorbild genommen werden, um eine theoretische Beziehung für das Verhältnis zwischen Flachbodengeschwindigkeit und wirklicher Geschwindigkeit zu finden.

**Theoretischer Ansatz** Ziel dieses Abschnittes ist es, aus den BARBI-Gleichungen eine theoretische Beziehung abzuleiten. An dieser Stelle sollen die Ausführungen, die in einem (noch) unveröffentlichten Skript von Dirk Olbers zu diesem Thema stehen, leicht modifiziert dargestellt werden. Dabei hoffe ich, die Theorie durch meine leichten Änderungen nicht falsch dargestellt zu haben.

Für einen flachen Boden ist die Situation vergleichsweise einfach zu lösen. Ist die Bodentopographie jedoch veränderlich, so sind manche Koeffizienten in den BARBI-Gleichungen nicht mehr konstant und ein Ebener-Wellen-Ansatz ist streng genommen nicht möglich.

Abhilfe kann hier eine Bedingung an die Bodentopographie schaffen. Nimmt man an, dass diese sich weniger stark verändert als die betrachteten Wellenphänomene, so kann man diese lokal als nahezu konstant betrachten und somit

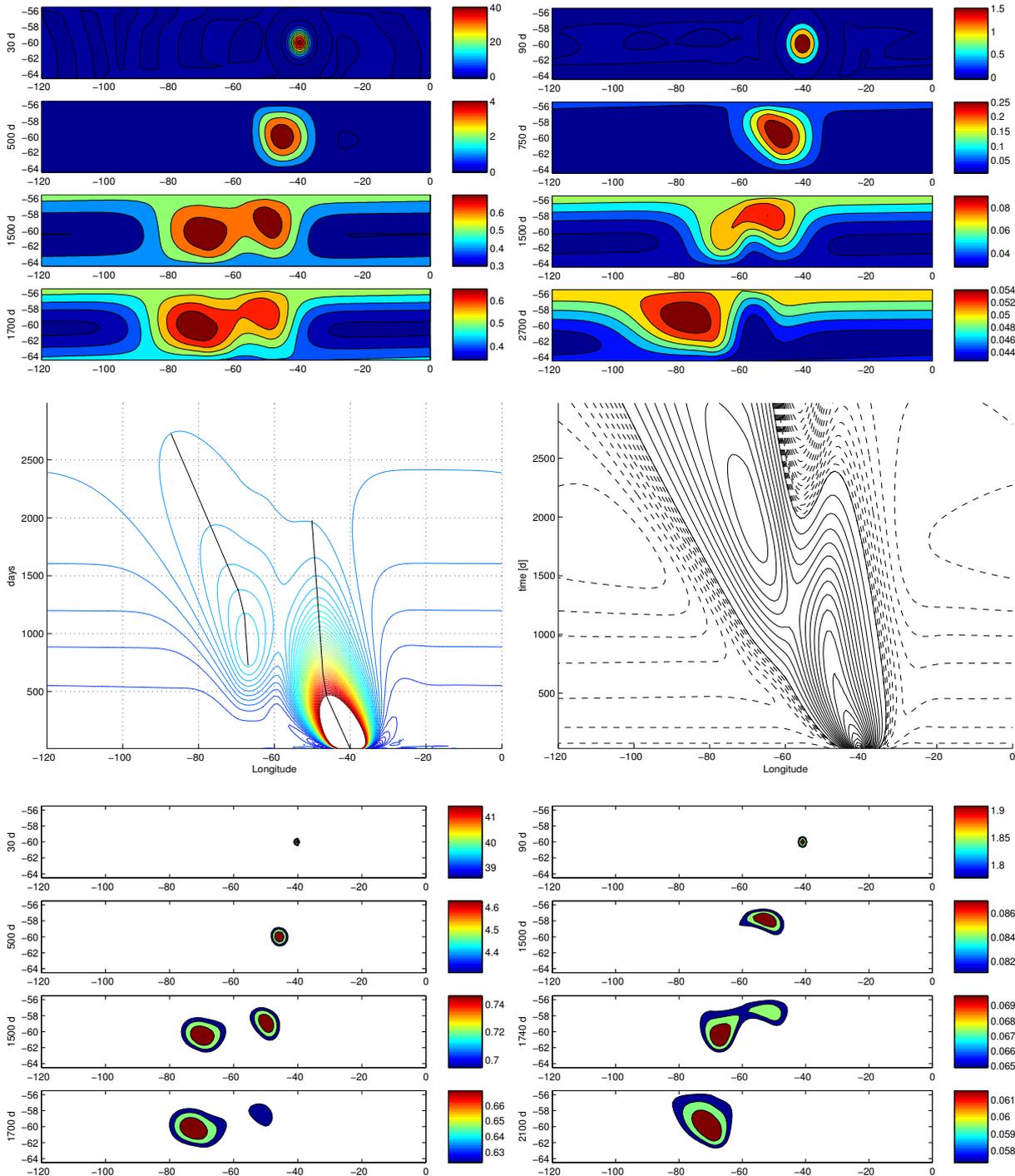


Abbildung 4.4: Kanal mit einer Höhe des Rückens von 100 m. In den oberen Bildern ist die Dichtestörung zu aufeinander folgenden Zeitpunkten zu sehen. In den untersten Bildern ist dieses im Prinzip noch einmal zu sehen, wobei nur die Bereiche der potentiellen Energie dargestellt sind, die mehr als 90% des Maximums aufweisen. **Links:** mit JEBAR-Term. **Rechts:** ohne JEBAR-Term. (Das rechte Hovmöllerdiagramm ist normiert, das linke nicht.)

einen Ebenen-Wellen-Ansatz rechtfertigen<sup>5</sup>.

Ausgangspunkt sind die linearisierten Barbi-Gleichungen erster Ordnung (Gleichungen (2.11) -

(2.13)) ohne Windstress, jede Art von Viskosität und Dichteforcing  $Q$ . Die barotrope Gleichung wird für die folgende Theorie so modifiziert, dass die rigid-lid Randbedingung aufgehoben wird, und somit die langen barotropen Wellen in BARBI wieder der QG-Theorie entsprechen (siehe Kapitel 2).

<sup>5</sup>Ein solcher Ansatz fällt in den allgemeineren Bereich der WKB-Theorie. Eine kurze Einführung in diese Theorie ist z.B. in Le Blond und Mysak (1978) [37] zu finden.

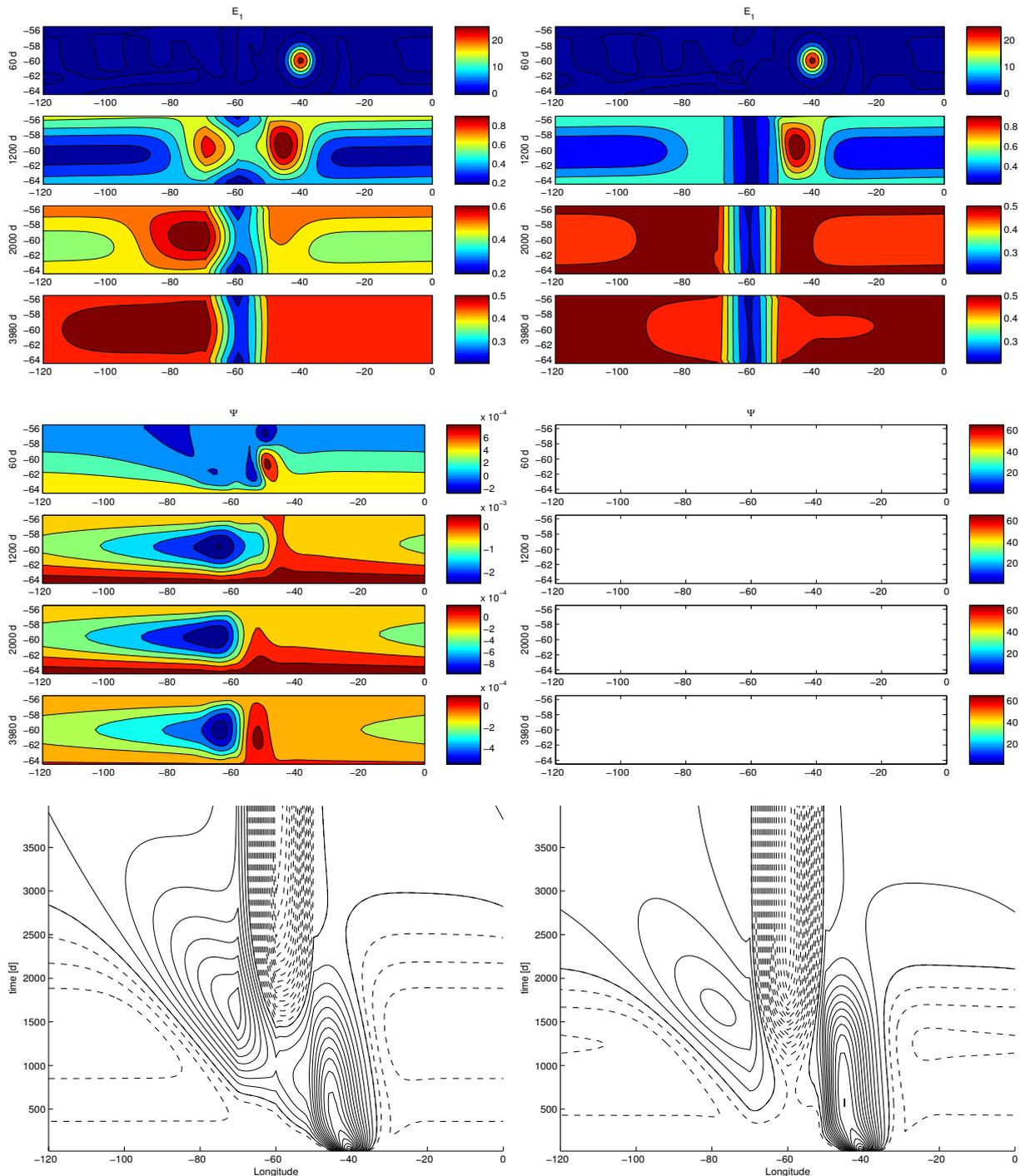


Abbildung 4.5: Kanal für einen großen Rücken mit einer Höhe von 2000 m. Die mittlere Bildreihe zeigt zusätzlich die Stromfunktion. **Links:** Experimente mit JEBAR-Term, **rechts:** ohne. (Beide Hovmöllerdiagramme sind normiert.)

Diese Gleichungen werden nun nicht für eine beliebige Topographie gelöst, sondern lokal wird die Topographie durch eine schiefe Ebene mit beliebiger Neigung angenähert, die nicht zu groß gewählt werden darf, um den Ebenen-Wellen-Ansatz nicht zu gefährden. Insgesamt gelten also folgende Näherungen:

- Die Tiefe  $h(x, y)$  wird nicht einheitlich behandelt. Das bedeutet, dass  $h$  bei der Differentiation von Termen

mit dem Faktor  $1/h$  als konstant<sup>6</sup> angesehen wird. Die Ausnahme bildet der Term  $f/h$ . Für die Tiefe wird weiterhin ein linearer Ansatz verwendet der Form:

$$h(x_0+x, y_0+y) = h_0 + \nabla h \cdot (x, y)^T = h_0 + h_x x + h_y y,$$

wobei  $h_0 = h(x_0, y_0)$  die Tiefe an der Stelle  $(x_0, y_0)$

<sup>6</sup>Der Grund für dieses Vorgehen liegt darin, dass  $\nabla(1/h) = -1/h^2 \nabla h \ll 1$  für die betrachteten Tiefen und Bodenneigungen gilt.

darstellt. Bei der Berechnung wird an den Stellen, an denen  $h$  nicht mehr differenziert wird,  $h$  durch  $h_0$  ersetzt.

- Der Coriolis-Parameter wird durch  $f = f_0 + \beta y$  mit  $f_0, \beta = \text{const.}$  angenähert. Bei der Berechnung wird an den Stellen, an denen  $f$  nicht mehr differenziert wird,  $f$  durch  $f_0$  ersetzt. Weiterhin soll analog zu  $\nabla(1/h)$  gelten:  $\nabla(1/f) \approx 0$ .

Mit Hilfe dieser Approximationen ergeben sich schließlich folgende Gleichungen:

$$(\nabla^2 - R^{-2}) \frac{\partial f_0 \Psi}{\partial t} - h \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla(f_0 \Psi) - \frac{f}{h} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla E = 0 \quad (4.1)$$

$$(1 - \lambda^2 \nabla^2) \frac{\partial E}{\partial t} + \lambda^2 \left[ (1 - \gamma) h \hat{\boldsymbol{\eta}} - (1 + \gamma) \frac{f}{h} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right] \cdot \nabla E + 2\lambda^2 \frac{f}{h} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla(f \Psi) = 0 \quad (4.2)$$

Gleichung (4.1) ergibt sich aus Gleichung (2.11) und Gleichung (4.2) aus den Gleichungen (2.12) und (2.13). Weiterhin bedeuten in diesen Gleichungen  $\boldsymbol{\alpha} = \nabla h$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \nabla(f/h)$ ,  $R = \sqrt{gh/f_0^2}$  (externer Rossbyradius),  $\lambda^2 = (1/6)(Nh_0/f_0)^2$  und der Operator  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  steht für  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\alpha}$ , wobei  $\mathbf{k}$  den Einheitsvektor in  $z$ -Richtung beschreibt.

In diese Gleichungen kann man nun einen Ebenen-Wellen-Ansatz der Form

$$(f_0 \Psi, E) = (f_0 \tilde{\Psi}, \tilde{E}) \exp(i(K_x x + K_y y - \omega t))$$

einsetzen, der auf das folgende Gleichungssystem für die Fourieramplituden  $f_0 \tilde{\Psi}, \tilde{E}$  führt:

$$\begin{pmatrix} \omega - \omega_R & \omega_T \\ 2\omega_A & \omega - 2\omega_A - \omega_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \tilde{\Psi} \\ \tilde{E} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_P &= -\frac{\beta K_x}{K^2 + R^{-2}}, & \omega_C &= -(1 - \gamma) \frac{\beta \lambda^2 K_x}{1 + \lambda^2 K^2} \\ \omega_R &= h_0 \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}}{K^2 + R^{-2}}, & \omega_T &= -\frac{f}{h} \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}}{K^2 + R^{-2}} \\ \omega_A &= -\frac{f_0 \lambda^2}{h_0} \frac{\mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}}{1 + \lambda^2 K^2} \end{aligned}$$

Um die Dispersionsrelationen zu bestimmen, aus denen man wiederum die Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit bestimmen kann, kann man ausnutzen, dass das Gleichungssystem (4.3) nur dann eine nicht triviale Lösung besitzt, wenn die Determinante der Systemmatrix gleich Null ist. Dieses führt dann auf die zwei Lösungen:

$$\omega^\pm = \frac{1}{2}(2\omega_A + \omega_C + \omega_R) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_R - \omega_C)^2 + 4\omega_A(\omega_A + \omega_C + 2\omega_T - \omega_R)}$$

Für einen flachen Boden ergeben sich hieraus die zwei Lösungen

$$\omega_1 = \omega_P \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_C,$$

die man als barotrope und barokline Dispersionsrelation von Rossbywellen über flachem Boden identifizieren kann.

Mit Hilfe dieses Ansatzes kann man nun versuchen, das Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten einer Flachbodenwelle und einer Welle über Topographie darzustellen. Dazu geht man an eine beliebige Stelle im Südlichen Ozean, ermittelt dort die Meerestiefe, die Gradienten der Bodentopographie und das  $\beta$ , und bestimmt damit aus obigen Beziehungen den Wert der Dispersionsrelation.<sup>7</sup>

Weiterhin muss man sich auf die Wellenlänge der betrachteten Wellen festlegen, was dieses Verfahren etwas einschränkt. Von Interesse sind hier besonders die langen Wellen mit Wellenlängen über 500 km, da kurze Wellen durch das numerische Gitter fallen und im Folgenden experimentellen Verfahren Wellenpakete betrachtet werden. Letztere sind im  $K$ -Raum um den Ursprung zentriert, so dass sie sehr lange Wellen beschreiben.

Die Ausbreitung eines Wellenpaketes wird durch die Gruppengeschwindigkeit beschrieben. Um diese zu berechnen, müsste man obige Dispersionsrelationen nach  $K_x$  bzw.  $K_y$  ableiten. Ich habe allerdings den weniger eleganten Weg gewählt, die Ableitungen numerisch durch finite Differenzen zu bestimmen, da mir dies etwas schneller und einfacher erschien. Möchte ich die Ableitung von  $\omega$  für einen bestimmten  $\mathbf{K}$ -Vektor etwa in  $x$ -Richtung bestimmen, so verwende ich folgende Näherung

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{\partial \omega(K_x, K_y)}{\partial K_x} \\ &\approx \frac{\omega(K_x + \Delta K_x, K_y) - \omega(K_x - \Delta K_x, K_y)}{2\Delta K_x} \end{aligned}$$

**Experimenteller Ansatz** Neben diesem theoretischen Ansatz soll zusätzlich ein etwas pragmatischerer Ansatz verwendet werden, um den Einfluss der Bodentopographie auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit barokliner Rossbywellen zu untersuchen. Dieser Ansatz ist gewissermaßen mit dem Werfen eines Steines in einen Teich und der

<sup>7</sup>Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass diese Prozedur ihre Tücken hat. Das Berechnen der Frequenzen  $\omega$  ist relativ einfach. Diese Werte aber so zu sortieren, dass man das  $\omega^+$  und das  $\omega^-$  immer richtig zuordnet, damit am Ende eine stetige (und differenzierbare) Kurve entsteht, hat Dirk Olbers mit einem kleinen Trick gelöst, den ich so verstanden habe, dass man für eine negative Wellenzahl  $K_x$  an Orten, an denen  $\mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} > 0$  gilt, die Frequenz  $\omega^-$  und an den Orten mit  $\mathbf{K} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} < 0$   $\omega^+$  als barokline Frequenz

Vermessung der dabei entstehenden Oberflächenwellen zu vergleichen. Wirft man den Stein nun an unterschiedliche Stellen im Teich und bestimmt auf irgendeine Weise die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, so kann man bei Kenntnis der unterliegenden Bodenbeschaffenheit untersuchen, ob diese einen Einfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen hat oder nicht.

Analog zu den Kanalexperimenten sollen jedoch im Folgenden keine Steine geworfen werden, sondern es wird die Ausbreitung von gaussförmigen Störungen in der potentiellen Dichte über einer realen Modelltopographie mit ausgeschaltetem Wind untersucht. Die Modellparameter sind die in den Parameterstudien des 3. Kapitels als geeignet befundenen, wobei die Dissipation in der potentiellen Energie und die Diffusionskonstante  $K_h$  gleich Null gesetzt werden, um die Störungen länger am Leben zu erhalten. An sehr vielen Orten im Südlichen Ozean werden diese Störungen nun eingebracht und die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird mit Hilfe von Hovmöllerdiagrammen bestimmt.

Für die hohe Zahl an betrachteten Orten wäre die Auswertung des entsprechenden Hovmöllerdiagrammes zu aufwendig, und deshalb habe ich einen kleinen Auswertungsalgorithmus erarbeitet, der automatisch die Ausbreitungsgeschwindigkeit aus diesen Hovmöllerdiagrammen bestimmt. Das Verfahren ist im Anhang B.4 beschrieben.

**Ergebnisse** Abb. 4.6 zeigt sowohl das theoretisch als auch das experimentell bestimmte Verhältnis zwischen topographischer und Flachbodengeschwindigkeit. Als Flachbodengeschwindigkeit wird hier die Gruppengeschwindigkeit langer Wellen  $c_{flat} = -\beta R_{in}$  verwendet, wobei  $R_{in}$  den ersten baroklinen Rossbyradius bezeichnet.

Im experimentellen Fall (das obere Teilbild) konnte an manchen Orten keine Ausbreitungsgeschwindigkeit detektiert werden, während andere Orte sogar über mehr als einen Wert verfügten, da hier Störungen von unterschiedlichen Anfangsorten darüber liefen. In letzterem Fall wurde dann der Mittelwert gebildet. Orte, an denen keine Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt werden konnte, sind im Bild grün dargestellt, was einem Verhältnis von Null entspricht. Vertraut man dem Verfahren (Gründe hierfür werden im Anhang geliefert), so kann man sagen, dass es viele Orte im südlichen Ozean gibt, an denen die experimentell bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit von der theoretischen Flachbodengeschwindigkeit abweicht - ja diese in weiten Bereichen um das Zwei- oder Dreifache übertrifft. Es kann tatsächlich an manchen Orten beobachtet werden,

dass dieses insbesondere beim Anlaufen von Erhebungen geschieht. Weiterhin ist auf den ersten Blick auffällig, dass an Rücken (insbesondere am Kerguelen Plateau) sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit sogar umkehren kann.

Im mittleren Bild der Abbildung sieht man das Verhältnis aus dem theoretischen Verfahren für eine zonale Wellenlänge von 800 km und einer meridionalen Wellenzahl von  $K_y = 10^{-8} m^{-1}$ . Man kann erkennen, dass in weiten Teilen des Südlichen Ozeans der Zahlenwert des Verhältnisses für diese Parameter- und Wellenlängenwahl durchaus in dem von Chelton und Schlax gefundenen Bereich liegt.

Vergleicht man die experimentellen mit den theoretischen Ergebnissen, so fällt auf, dass an Orten, an denen im experimentellen Fall das Verhältnis einen positiven Wert aufweist, dieses im theoretischen Fall in der Regel nicht so deutlich bestätigt werden kann. Dies gilt z.B. für das Kerguelen Plateau, wo im theoretischen Fall keine positiven Werte gefunden werden konnten. Allerdings findet man andere Bereiche, in denen sowohl im theoretischen als auch im experimentellen Fall positive Werte gefunden werden. Andererseits treten im theoretischen Fall positive Werte auf, die nicht im experimentellen gefunden werden können.

Für die negativen Werte jedoch können viele Bereiche gefunden werden, in denen die experimentellen gut zu den theoretischen Werten passen. So sieht man z.B. entlang der antarktischen Küsten in beiden Fällen eine Erhöhung der westwärtigen Gruppengeschwindigkeit um einen Faktor 4 – 5, der in beiden Fällen nach Norden kleiner wird. Oder es gibt den Bereich südlich von Australien, wo in beiden Fällen das Verhältnis von Süden nach Norden betragsmäßig kleiner wird.

Zusammenfassend kann und möchte ich aus diesem Bild keine allgemeingültigen Regeln ableiten. Es sei nur soviel gesagt, dass die Bodentopographie einen beschleunigenden Einfluss auf die Ausbreitung barokliner Rossbywellen haben kann - auch im globalen Maßstab. Man kann in vielen Bereichen eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment finden, während andere Bereiche Diskrepanzen erkennen lassen. Es bedarf also weiterer Untersuchungen, um die Ungereimtheiten zwischen Experiment und Theorie zu erklären. Hier könnten Kanalexperimente mit einfach geneigtem Boden sicherlich eine große Hilfe sein.

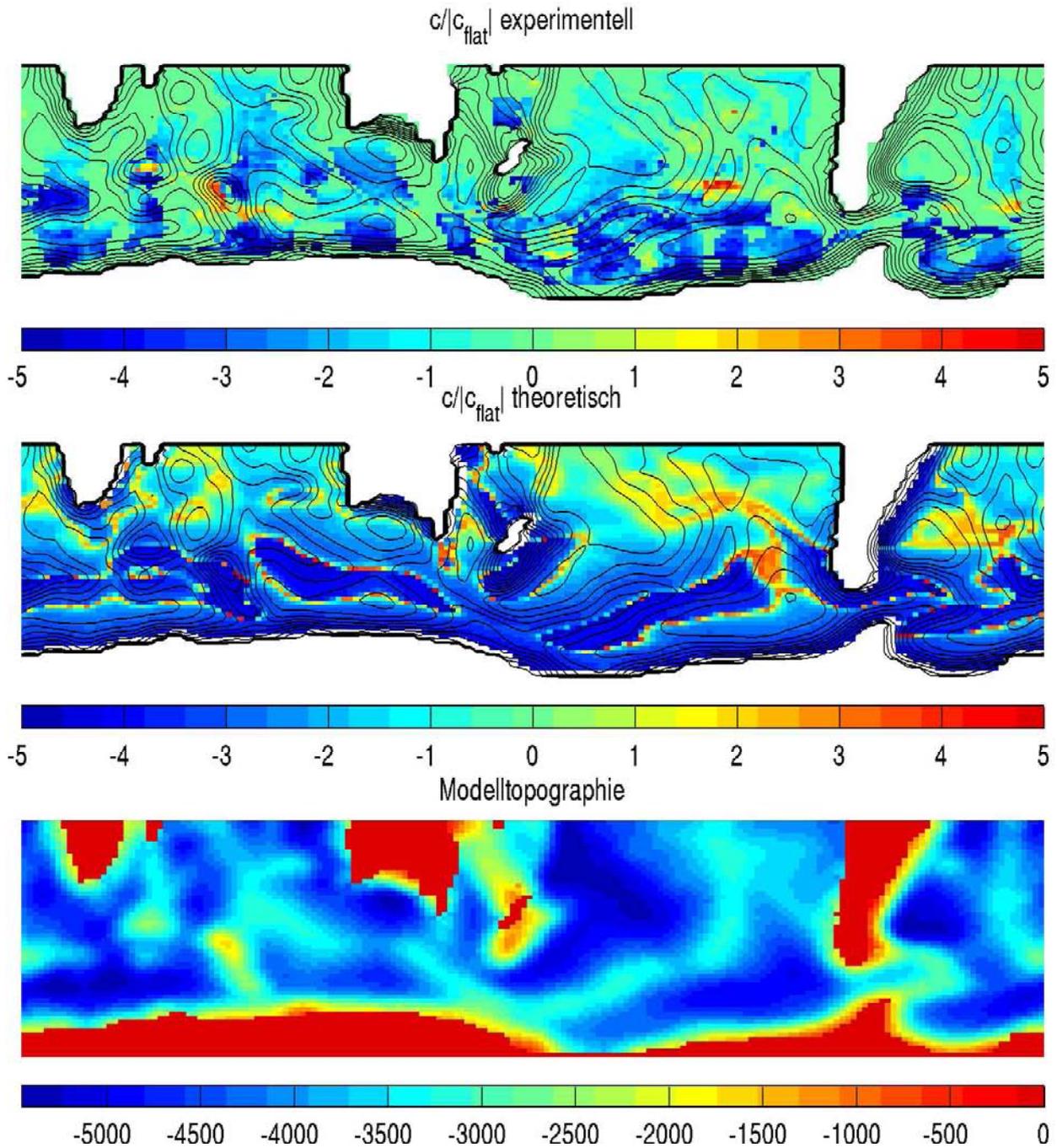


Abbildung 4.6: Das Verhältnis der zonalen Ausbreitungsgeschwindigkeit barokliner Rossbywellen zur theoretischen Flachbodengeschwindigkeit langer Wellen ( $c_{flat} = -\beta R_{in}$ ) im Südlichen Ozean. **Oben:** Experimentell bestimmt. **Mitte:** Theoretisch bestimmt für eine zonale Wellenlänge  $L_x = 800 \text{ km}$ ,  $\Delta K_x = 10^{-9} \text{ m}^{-1}$  und  $K_y = 10^{-8} \text{ m}^{-1}$ . **Unten:** Bodentopographie des Südlichen Ozeans zum besseren Verständnis der Konturlinien der Bodentopographie in den oberen Bildern.

## 4.4 Einfluss auf das globale Ozeangeschehen

### 4.4.1 Einführung

In diesem Abschnitt soll ein Mechanismus untersucht werden, der es dem Südlichen Ozean ermöglicht, auf die Zirkulation in äquatorialen Breiten oder gar in der nördlichen Halbkugel auf Zeitskalen bis zu einem Jahr Einfluss zu nehmen.

Angestoßen wurden die Überlegungen u.a. durch eine Arbeit von Ivchenko et al. (2004) [34], die eine Signalausbreitung durch ein Zusammenspiel von barotropen Rossbywellen, baroklinen Rossbywellen, Küsten- und äquatorialen Kelvinwellen vorschlugen, das entscheidend durch die Wechselwirkung zwischen der barotropen und der baroklinen Mode bedingt ist. Für ihre Untersuchungen verwendeten sie das auf den Primitiven Gleichungen beruhende Ozeanmodell INM (Institut für numerische Mathematik, Moskau), wobei sie die Topographie stark vereinfachten, indem sie den Pazifischen Ozean auf ein rechteckiges Becken und den Bereich des Südlichen Ozeans auf der Höhe der Drakepassage auf einen zonal zyklischen Kanal reduzierten. Weiterhin war der Meeresboden im Kanal flach mit einer Tiefe von 3000 m; nur im Bereich der Drakepassage simulierte eine Schwelle von 1500 m Höhe den dortigen Topographieanstieg. Der Boden des pazifischen Beckens stieg nach Norden hin leicht linear an, und an der westlichen Küste wurde durch einen linearen Anstieg der Topographie der Kontinentalschelf simuliert. Ihre Untersuchungen zeigten, dass diese eingebauten Veränderungen der Meeresbodentiefe entscheidend für das Zusammenspiel der einzelnen Wellenarten waren, und dass ohne diese Veränderungen die Phänomene nicht beobachtet worden wären.

In Abb. 4.7 sieht man die Ausbreitung der Temperaturstörung im Modellgebiet. Dabei wird zunächst unter Mithilfe des Hügels unter der Störung bzw. des JEBAR-Terms das Signal in die barotrope Mode eingekoppelt, so dass barotrope Rossbywellen erzeugt werden, die nach Westen propagieren. Treffen diese barotropen Rossbywellen auf die Westküste des pazifischen Beckens mit ihrer ansteigenden Bodentopographie, so werden dort Küstenkelvinwellen angeregt, die nach Norden laufen. Erreichen diese dann den Äquator, so regen diese wiederum äquatoriale Kelvinwellen an, die dann entlang des Äquators nach Osten propagieren und schließlich nach etwa 100 Tagen die Ostküste des pazifischen Beckens erreichen. Dort angekommen, werden in

einem vierten Schritt wieder Küstenkelvinwellen angeregt, die sowohl nach Norden als auch nach Süden laufen.

Dieser Abschnitt soll sich nun der Frage widmen, ob diese Phänomene auch in einer realen Topographie mit richtigen Kontinenten zu sehen sind bzw. welche Rolle dabei die Bodentopographie spielt. Insgesamt soll also untersucht werden, ob sich mit BARBI etwas ähnliches finden lässt, oder ob man aus der Sicht von BARBI die Thesen von Ivchenko et al. verwerfen muss.

### 4.4.2 Modellsetup

Das Modellgebiet beschränkt sich dieses mal nicht auf den Südlichen Ozean, um auch den Einfluss auf die Äquatorregion und die nördliche Halbkugel zu betrachten, wobei die Modelltopographie in Abb. 4.7 zu sehen ist. Die Gitterauflösung beträgt  $2^\circ \cdot 2^\circ$ . Die Modellparameter unterscheiden sich etwas von den bisher verwendeten und sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

horizontale Viskosität $A_h$	$8 \cdot 10^4 m^2/s$
horizontale Diffusivität $K_h$	$3 \cdot 10^3 m^2/s$
Stabilitätsfrequenz $N$	$0.0026 s^{-1}$
Dissipationsfaktor $D_E$	$1.5 \cdot 10^{-10} s^{-1}$

Die Felder des Spinups sind in Abb. 4.8 dargestellt. Man erkennt deutlich die beckenweiten Wirbel in Atlantik oder Pazifik und den ACC als stärkste Meeresströmung.

### 4.4.3 Ergebnisse

Die Experimente von Ivchenko et al. (2004) werden nun schrittweise nachgebildet, indem eine Dichtestörung in das Gebiet der Drakepassage gesetzt wird. Dabei werden vier verschiedene Varianten betrachtet:

- A) Flacher Boden ohne Hintergrundströmung
- B) Reale Topographie ohne Hintergrundströmung
- C) Reale Topographie mit Hintergrundströmung
- D) Reale Topographie mit Hintergrundströmung, täglich schwankenden Winden und einer Störung, die über eine feste Zeit aufgeprägt wird.

In den Varianten A) - C) hat die Störung eine anfängliche Amplitude von  $\Delta E_1 = 150 m^3/s^2$ , was gering gegenüber dem Spinupfeld ist und in etwa vergleichbar mit einer Temperaturerniedrigung von etwa  $2^\circ C$  auf den oberen 500 m der Wassersäule, wenn man die Umrechnung mit einem exponentiellen Profil verwendet. Die horizontale räumliche

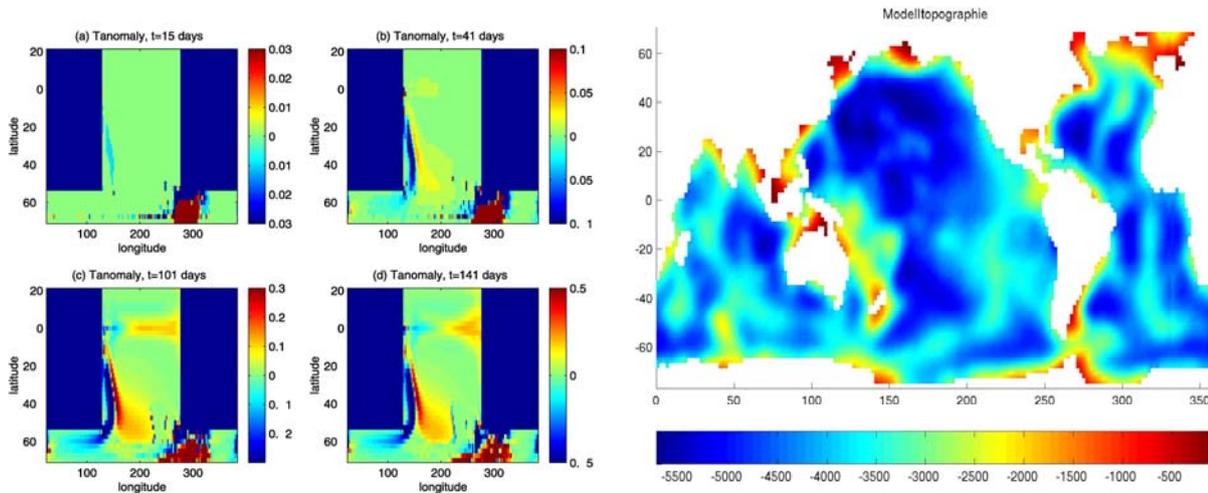


Abbildung 4.7: **Links:** Abbildung 1 aus Ivchenko et al. (2004) [34], auf der man die Ausbreitung einer Temperaturanomalie ausgehend von der Drakepassage sehen kann. **Rechts:** Modelltopographie für die entsprechenden BARBI-Experimente.

Ausdehnung der Störung beschränkt sich im Wesentlichen auf die Drakepassage.

In den Varianten C) und D) wird mit einer Hintergrundströmung gearbeitet. Dazu wird die Störung von derselben Struktur und Amplitude auf das Spinupfeld der potentiellen Energie, das man in Abb. 4.8 sehen kann, aufaddiert, und das Modell wird über einen Zeitraum von etwa 600 Tagen integriert. Gleichzeitig wird das Spinupfeld ohne Störung um 600 Tage weiter integriert, um eventuelle leichte Veränderungen des Spinupfeldes mitzuberechnen. Beide Läufe werden dann voneinander abgezogen, um die Ausbreitung der Anomalie in der potentiellen Energie zu verfolgen. Um in Variante D) das Störungszentrum für einen Zeitraum von 4 Monaten auf einem konstanten Störungswert zu halten, wird in etwa immer soviel potentielle Energie dazu addiert wie abfließt.

Um schließlich in Variante D) ein variables Windfeld zu erzeugen, wird im täglichen Wechsel an jedem Ort die Windgeschwindigkeit mal um 50% erniedrigt, mal um 50% erhöht.

**A) Flacher Boden, kein Wind** Die reale Bodentopographie wird zunächst durch einen flachen Boden von 4000 m Tiefe ersetzt, der Windschub ausgeschaltet, damit sich keine Hintergrundströmung aufbaut, und eine gaussförmige Störung im ersten Dichtemoment in die Drakepassage gesetzt. Die zeitliche Entwicklung der Störung ist in Tabelle 4.1 zu sehen. Man sieht, wie zunächst zwei Küstenkelvinwellen ausgelöst werden. Die eine läuft entlang der antark-

tische Küste nach Westen und die andere an der Ostküste Südamerikas nach Norden. Nach etwa 400 Tagen ist die antarktische Kelvinwelle fast einmal um die Antarktis gelaufen und erreicht wieder ihren Ausgangspunkt, die Drakepassage.

Die Kelvinwelle an der Küste Südamerikas erreicht nach etwa 100 Tagen den Äquator, wo eine äquatoriale Kelvinwelle gebildet wird, die nach Osten entlang des Äquators auf die Westküste Afrikas zu läuft. Diese erreicht sie nach etwa nach 140 Tagen und teilt sich dort wieder in eine nach Norden und Süden laufende Küstenkelvinwelle. Der nach Norden laufende Arm breitet sich über die Küsten Europas weiter ins Nordpolarmeer aus, während der südwärtige Arm gegen den Uhrzeigersinn um Afrika herum in den indischen Ozean läuft und den Äquator nach etwa 300 Tagen erreicht. Dort bildet sich erneut eine äquatoriale Kelvinwelle, die den Indischen Ozean überquert.

Zusätzlich zu den genannten Formen von Kelvinwellen werden an der Westküste Afrikas und Europas durch diese Kelvinwellen barokline Rossbywellen angeregt, die den Atlantik dann wieder westwärts überqueren. Dabei ist deutlich der Effekt der  $\beta$ -Refraktion zu erkennen, der besagt, dass die Wellen umso schneller laufen, je näher sie dem Äquator sind. Auch im Indischen Ozean werden barokline Rossbywellen angeregt, wobei der Effekt hier schwächer ausgeprägt ist als im Atlantik.

Doch was ist eigentlich mit dem Pazifik? Nach diesen Simulationen gelangt die Störung im betrachteten Zeitraum nicht in das pazifische Becken, da die antarktische Küsten-

kelvinwelle sozusagen an der australischen Küste vorbei läuft, und die Störung als Wellenpaket barokliner Rossbywellen selber zu langsam nach Westen läuft, um in angemessener Zeit die australische Küste zu erreichen.

**B) Reale Topographie, ohne Wind** Nun wird der flache Boden durch reale Topographie ersetzt, was den Experimenten von Ivchenko et al. schon näher kommt.

In Tabelle 4.1 ist die Ausbreitung der Störung zu erkennen. Schon nach 5 Tagen sieht man Signale im gesamten Südlichen Ozean bis hinauf zum Äquator. Diese Signale entstehen dadurch, dass - im Zusammenspiel mit der nun vorhandenen Topographie - potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, die sich dann in Form von barotropen Rossbywellen sehr schnell ausbreitet.

Man könnte sich an dieser Stelle durchaus fragen, ob diese Rossbywellen nicht zu schnell laufen. Nimmt man eine zonale Distanz im Südlichen Ozean von etwa 15.000 km an, die es in etwa 5 Tagen zu überbrücken gilt, so müssten die Rossbywellen etwa eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von 34 m/s haben. Erinnern wir uns an die Aussagen über Rossbywellen im 2. Kapitel, so ist zwar die Gruppengeschwindigkeit in BARBI nach Osten gerichtet, die Phasengeschwindigkeit aber nicht. Letztere kann für die sehr langen Wellen zwar deutlich von den theoretischen Werten abweichen, doch liegt dieser Zahlenwert durchaus noch im Rahmen, was man gut in Abb. 2.1 sehen kann. Hier scheint BARBI also keine gravierenden Artefakte zu erzeugen.

Es gibt aber noch eine weitere interessante Beobachtung, die mit den barotropen Rossbywellen zusammenhängt. Laufen diese Wellen dann über markante Strukturen in der Bodentopographie, so erzeugen sie wieder über den Term der barotropen Advektion und vermutlich besonders den Term  $\frac{N^2}{2}h\mathbf{U} \cdot \nabla h$  (siehe die Einleitung in Abschnitt 4.2) Muster in der potentiellen Energie, die sich eng an die Struktur der Bodentopographie anlehnen. Dies lässt sich vermutlich folgendermaßen erklären: Wechselwirkt eine sehr lange barotrope Rossbywelle mit einer sich auf kleineren räumlichen Skalen verändernden Bodentopographie, so erkennt man hauptsächlich die Struktur der Bodentopographie, die in diese beiden Terme eingeht. Vermutlich ist dabei der zweite Term bedeutender, was man an diesem Wechsel von positiven und negativen Anomalien an topographischen Hindernissen erkennen kann. Denn ein Anstieg und Abfall der Topographie schlägt sich in einer positiven und negativen Ableitung nieder.

Die Abbildung zeigt weiterhin, wie sich das Signal

durch eine Küstenkelvinwelle entlang des südamerikanischen Kontinentes nach Norden ausbreitet, um dann als äquatoriale Kelvinwelle über den Atlantik zu laufen. Dieses Signal ist aber schwächer als im Flachbodenfall, was vermutlich daran liegt, dass die Energie mit Hilfe der barotropen Rossbywellen über einen größeren räumlichen Bereich verteilt wird, so dass für die Küstenkelvinwelle nicht mehr soviel übrig bleibt.

Im Gegensatz zum flachen Boden kommt dieses Mal der Pazifik ins Spiel. Man sieht deutlich, wie sich nach etwa 100 Tagen ein Signal in Form einer äquatorialen Kelvinwelle entlang des Äquators über den Pazifischen Ozean ausbreitet. Dieses Signal wurde (vermutlich) durch die Wechselwirkung der barotropen Wellen mit der Bodentopographie entlang der australischen Küste in die Höhe des Äquators gebracht, was im Einklang mit den Ergebnissen von Ivchenko et al. steht. Allerdings ist die Stärke des Signales schwächer als im Atlantischen Ozean, und die Amplitude ist mit unter 1% der Ausgangsamplitude insgesamt recht klein.

Im Indischen Ozean kann man grundsätzlich ein ähnliches Phänomen beobachten, was jedoch auf dieser Abbildung nicht so gut zu erkennen ist.

Nun sind die beobachteten Signale im Pazifischen Ozean zwar vorhanden, doch sind sie relativ schwach ausgeprägt gegenüber der Anfangsamplitude. Dies könnte möglicherweise daran liegen, dass, wie im 2. Kapitel beschrieben, die Kelvinwellen in BARBI zu stark gedämpft werden. Somit wäre es durchaus möglich, dass diese Signale in der Realität stärker in Erscheinung treten. Diese Frage kann hier aber nicht endgültig geklärt werden.

**Varianten C) und D)** Die Signale, die in Variante B) den Pazifischen Ozean erreichen sind sehr schwach. In den Experimenten von Ivchenko et al. war jedoch zusätzlich eine Hintergrundströmung vorhanden und die Störungen wurden über einen längeren Zeitraum aufgeprägt. Man könnte weiter auf die Idee kommen, dass immer neu angeregte barotrope Rossbywellen mehr Energie an die australische Küste tragen, an der dann Küstenkelvinwellen das Signal zum Äquator bringen. Aus diesem Grund ist in Variante D) zusätzlich das Windfeld variabel, um barotrope Rossbywellen anzuregen. Diese Einflüsse sollen nun mit BARBI untersucht werden.

Die Ergebnisse sind wieder in Tabelle 4.1 zu sehen. Um es kurz zu machen: Weder für die Variante C) noch für die Variante D) kann mit dem bloßen Auge eine nennenswerte

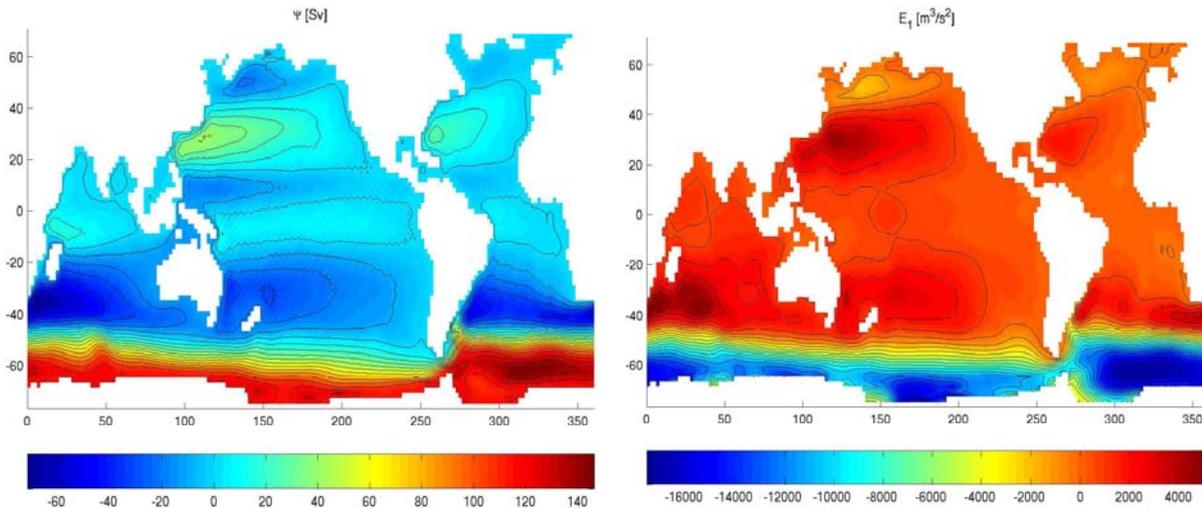


Abbildung 4.8: Die Spinupfelder der Stromfunktion (links) und der potentiellen Energie, die für die Experimente C) und D) von Bedeutung sind.

Vergrößerung des Signales im Pazifik festgestellt werden. Es scheint also so, dass die Hintergrundströmung oder die Tatsache, dass die Störung länger einwirken kann, keinen signifikanten Effekt auf das Signal ausübt.

An dieser Stelle soll noch kurz auf einen weiteren Aspekt eingegangen werden. Chris Hughes (1995) [31] zeigt in seiner Arbeit auf der Grundlage von Experimenten mit einem wirbelaufösenden Ozeanmodell und TOPEX/POSEIDON Altimeter Daten, dass barokline Rossbywellen mit Wellenlängen um 300 km im Südlichen Ozean durch den ACC mittransportiert werden, da die ostwärtige Strömungsgeschwindigkeit des ACC die westwärtige Ausbreitungsgeschwindigkeit der baroklinen Rossbywellen übertrifft.

Interessanterweise kann dieser Effekt hier nicht beobachtet werden, denn die Störung scheint nicht mit dem ACC transportiert zu werden. Dieses ist etwas verwunderlich, da der ACC in den Breiten der Drakepassage eine zonale Geschwindigkeit von etwa  $5 \text{ cm/s}$  hat, während die Flachbodengeschwindigkeit barokliner Rossbywellen bei etwa  $-1 \text{ cm/s}$  liegt. Eine solche Differenzgeschwindigkeit von  $4 \text{ cm/s}$  sollte in 600 Tagen zu einer ostwärtigen Verschiebung der Störung von etwa  $35^\circ$  führen, was man mit dem bloßen Auge erkennen müsste. Eine mögliche Erklärung dieser Diskrepanz könnte mit der Topographie zusammenhängen. Sowohl das Hovmöllerdiagramm (Abb. 4.1) aus der Einleitung als auch die Experimente zur Wechselwirkung einer Dichtestörung mit einem meridionalen Rücken zeigen, dass die Ausbreitung einer Dichtestörung, durch einen solchen Rücken blockiert bzw. gehemmt wird. Nun befindet

sich in der Drakepassage und unmittelbar östlich von ihr ein Rückensystem, welches die Ausbreitung der Störung blockieren könnte.

**Zusammenfassung** Zusammenfassend kann ich die Thesen von Ivchenko et al. qualitativ unterstützen. Die Ausbreitung der Wellen in den Pazifischen Ozean scheint, wie von ihnen behauptet, auf der Wechselwirkung zwischen der potentiellen Energie und der Stromfunktion unter Vermittlung der Topographie zu basieren. Denn ohne Modelltopographie kann diese Wechselwirkung nicht stattfinden, und es kann kein Signal im Pazifik beobachtet werden.

Sollten die Methoden stimmen, und die Experimente richtig durchgeführt worden sein, so scheinen jedoch quantitativ die Einflüsse auf die äquatorialen Breiten oder gar die nördliche Hemisphäre eher gering. Dies gilt auch für die Experimente, bei denen die Störung über einen längeren Zeitraum (1-4 Monate) aufgeprägt wird, was eigentlich genauer dem Vorgehen von Ivchenko et al. entspricht. Bei Platzierung der Störung in der Drakepassage fließt der Hauptteil der potentiellen Energie als Küstenkelvinwelle in den Atlantik, wo sich die Störung dann weiter verteilt, und nicht in den äquatorialen oder gar den nördlichen Pazifik. Genauer liegen die gemessenen Signalamplituden in den äquatorialen Breiten oder auf der nördlichen Hemisphäre in der Regel unter 2% der Störungsamplitude, während sich der Hauptteil der Störung im Südlichen Ozean verteilt.

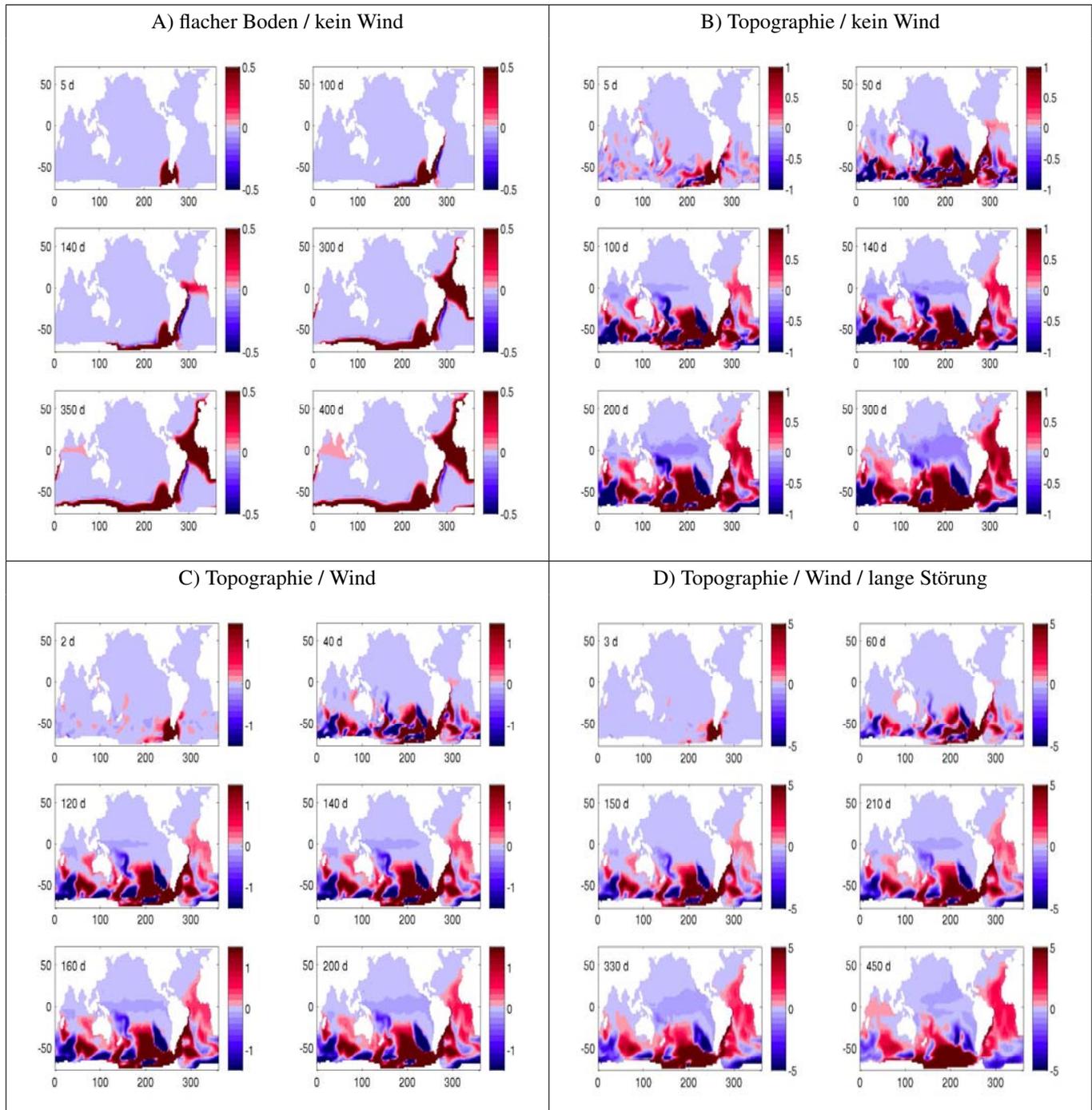


Tabelle 4.1: Ausbreitung der Störung im ersten Dichtemoment für die vier Experimente A) - D). Die Farbskala gibt den prozentualen Wert von der Anfangsamplitude an.

Es muss jedoch eingeräumt werden, dass die Signale in den höheren Breiten in der Realität stärker sein könnten als hier im Modell, was darin liegt, dass Kelvinwellen in numerischen Modellen stärker gedämpft sein können. Insbesondere sollten die Signale in der Realität schneller sein, da, wie im 2. Kapitel gezeigt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Kelvinwellen in numerischen Modellen kleiner sein kann.



# Kapitel 5

## Transport durch die Drakepassage

### 5.1 Einführung

Wie in der Einleitung zu dieser Arbeit beschrieben, spielt der ACC eine wichtige Rolle im weltweiten Stoff- und Wärmeaustausch. Eine wichtige Größe, um den Umfang dieses Austauschprozesses zu quantifizieren, ist der Transport durch die Drakepassage. Dieses Kapitel soll sich nun mit der Variabilität, also den Schwankungen, dieses Transportes beschäftigen.

Im Einzelnen soll eingegangen werden auf mögliche langfristige Trends im Transport, den Einfluss des Windes bzw. des SAM-Indexes und auf die Möglichkeit, den Bodendruck im Süden der Drakepassage als Indikator für die Schwankungen des Transportes zu nehmen. Der Hintergrund zu diesen Aspekten soll nun kurz erläutert werden.

**Kein messbarer Trend im Transport durch die Drakepassage** Eine interessante Frage ist, ob sich der Transport auf längere Sicht (Zeiträume länger als 10 Jahre) verändert, oder ob, abgesehen von kleinen Schwankungen, der mittlere Transport durch die Drakepassage als konstant angesehen werden kann.

Cunningham et al. (2003) [15] präsentieren Messungen des Transportes durch die Drakepassage, die während der ISOS (1970-1980) und der WOCE-Studie (1993-2000) durchgeführt wurden. Auf der Grundlage dieser Daten können sie zeigen, dass der barokline Transport, bezogen auf ein level-of-no-motion bei 3000 m, über die 26 Jahre von 1975 bis 2000 sich nicht nennenswert verändert hat (die Werte lassen sich in Tabelle 1 ihrer Arbeit finden).

Es soll im Folgenden mit BARBI und realen Oberflächenwinden untersucht werden, ob sich diese Beobachtungen bestätigen lassen, oder ob es nicht doch starke Indizien dafür gibt, dass sich der Transport im Laufe der letzten Jahre nennenswert verändert hat.

**Zusammenhang mit dem Windschub** Eine weitere interessante Frage ist, wie und ob der Transport durch die Drakepassage mit den Winden über dem Südlichen Ozean zusammenhängt. Intuitiv wird man vermuten, dass der Transport ansteigen sollte, wenn sich auch der zonale Windschub in östlicher Richtung erhöht. Generell ist diese Aussage vermutlich auch richtig, obgleich die Zusammenhänge scheinbar nicht ganz so geradlinig sind.

Bereits 1980 untersuchten Wearn und Baker (1980) [66] den Zusammenhang zwischen dem Wind über dem Südlichen Ozean und Druckmessungen im nördlichen und südlichen Bereich der Drakepassage. Letztere können über die geostrophische Balance einen Hinweis auf den Transport durch die Drakepassage geben. Ein interessantes Ergebnis war, dass der Druck im Süden weit besser die Schwankungen im Wind widerspiegelte als der Druck im Norden. Ein Ergebnis, das weiter unten in dieser Arbeit noch einmal aufgegriffen werden wird, um einen Proxy (anderes Wort für Indikator) für den Transport abzuleiten.

Betrachtet man Perioden von mehr als 30 Tagen (bis maximal zu einem Jahr), so finden Wearn und Baker, dass die Schwankungen in den Druckdaten eher mit dem gemittelten zonalen Wind über dem gesamten Südlichen Ozean als mit dem lokalen Wind in der Drakepassage korreliert sind. Für diese Perioden laufe der Druck dem Wind etwa 9 Tage hinterher. Der lokale Windschub jedoch habe nur für kurze Perioden Einfluss auf den Transport. Sie untersuchen weiterhin ein einfaches analytisches Modell<sup>1</sup>, das den Transport in Abhängigkeit des Windschubes betrachtet. Dabei finden sie, dass die exponentielle Zeitkonstante, die die Anpassung des Transportes an Veränderungen des Windschubes beschreibt, in der Größenordnung von 7 Tagen liegt.

In weiteren Untersuchungen betrachten Gille (1999)

---

<sup>1</sup>Der Zusammenhang zwischen dem Transport  $T$  und dem Windschub  $F$  wird in Form einer Differentialgleichung der Art  $\frac{dT}{dt} + a \cdot T = F(t)$  angenommen.

[19], und Gille et al. (2001) [20] ebenfalls mit Hilfe von Druckdaten den Zusammenhang zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Wind im Südlichen Ozean. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass die Rotation (genauer der curl) des Windfeldes, der für eine Sverdrup-Bilanz von Bedeutung wäre, kaum mit den Druckdaten korreliert ist, während hingegen die zonal gemittelten Winde im Süden der Drakepassage besonders große Korrelationen mit dem Transport verzeichnen. Letzteres gelte besonders für Perioden zwischen 10 und 256 Tagen, und der Wind eile dem Druck (Transport) in der Regel voraus, wobei sie keine feste Zeitverschiebung angeben können. Lediglich im Norden der Drakepassage scheint die Rotation des Windfeldes einen Einfluss zu haben. Zusätzlich zu den gemessenen Daten untersuchen sie (Gille et al.) den Zusammenhang mit Modelldaten. Hierbei können sie aber keine signifikante Verschiebung der Zeitreihen von Windschub und Transport feststellen, was sie auf eine zu groß gewählte Viskosität schieben.

Gnanadesikan und Hallberg (2000) [22] betonen in ihrer Arbeit mehr die indirekte Wirkung des Windes auf den ACC. Die bestehe darin, dass durch den Wind ein oberflächennaher Ekmantransport angeregt wird, der weiter im Norden zu einem Absinken des Wassers führt und die Pycnokline (Dichtesprungschicht) absenkt. Daraus resultiere ein stärkerer Nord-Süd-Dichtegradient, der über die thermische Windbalance den ACC antreibt. Weder der mittlere Windstress im Bereich der Drakepassage, noch der curl des Windschubes nördlich der Drakepassage (entlang  $51^\circ$  S) hätten einen Einfluss auf den Transport.

Schließlich untersucht Wilbert Weijer (2005) [67] mit dem MITgcm-Modell in vereinfachter Kanalgeometrie die Reaktion des ACC auf einen stochastischen variablen Windschub. Dabei konzentriert er sich im Wesentlichen auf eine Zeitskala bis zu ein paar Tagen, und kann für diese zeigen, dass die Reaktion des Systems durch zwei resonante Moden bestimmt ist, wobei der bedeutendere erste durch topographische Rossbywellen (Resonanzperiode von etwa 3 Tagen) und der zweite durch Rossby-Beckenmoden bedingt sei. Dieser vermutlich barotrope topographische Rossby-mode dominiere auf diesen Zeitskalen selbst im baroklinen Fall mit einer variablen Dichte das Systemverhalten, und führe dazu, dass für diese Resonanzfrequenz die normale Ursache-Wirkung-Beziehung aus den Fugen gerät. Für diese Frequenz kann man nämlich an der positiven Phasenbeziehung zwischen Wind und Transport gut sehen, dass im Gegensatz zu sonst üblichen Konstellation der Wind dem

Transport hinterher läuft.

Weijer stellt seine Ergebnisse insofern in Frage, als dass er nicht genau weiß, ob man diese auf den realen Ozean übertragen könne. An dieser Stelle kann BARBI ansetzen und versuchen, diese Frage mit einer realistischeren Topographie zu beantworten. Darüber hinaus können mit BARBI auch längere Zeitskalen betrachtet werden, um die Wirkung barokliner Effekte zu untersuchen.

**Der Southern Annular Mode (SAM)** Eng verwoben mit den Winden über dem Südlichen Ozean ist der SAM-Index (Southern Annular Mode).

Dieses ist jedoch nur eine von vielen Bezeichnungen für ein Phänomen, das nach Gong und Wang (1999) [23] neben den drei großen Oszillationen NAO (North Atlantic Oscillation), NPO (North Pacific Oscillation) und der SO (Southern Oscillation) eine weitere wichtige Oszillation des atmosphärischen Luftdruckes darstellt. Gong und Wang bezeichnen diese Oszillation z.B. als Antarktische Oszillation ( $AO^2$ ).

Die Struktur des SAM ist so beschaffen, dass ein zonal die Erde umspannendes Hochdruckgebiet auf der Höhe von Argentinien und Chile von einem ebenfalls zonal weitgehend homogenen Tiefdruckgebiet auf der Höhe des Weddel Meeres und des Bellinghausen Meeres (siehe Gong und Wang, 1999) begleitet wird, wie in Abb. 5.1 (b) zu erkennen ist. Im Prinzip ist diese Struktur des Luftdruckes nur ein Abbild der großräumigen atmosphärischen Zirkulation (siehe Abb. 5.1 (c) und (d)), die sich aus der Energiebilanz der Sonneneinstrahlung und der daraus resultierenden Umverteilung der Wärme vom Äquator zu den Polen ergibt. Dadurch entstehen bodennahe Hochdruckgebiete über den Polen und in den mittleren Breiten ( $30^\circ$  bis  $40^\circ$ ) bzw. bodennahe Tiefdruckgebiete über dem Äquator und bei jeweils  $60^\circ$ .<sup>3</sup> Durch den Druckunterschied zwischen dem subpolaren Hoch bei etwa  $30^\circ S - 40^\circ S$  und dem subpolaren Tief um  $60^\circ S - 65^\circ S$  strömt nun Luft aus Äquatornähe in Richtung Pol und wird durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt. Auf diese Weise entstehen die starken Westwinde (eng. westerlies) um  $40^\circ S - 60^\circ S$  mit dem Jetstream (genauer Polarfrontjetstream) in der Höhe darüber (siehe Abb. 5.1 (c)).

Nun ist diese Struktur sowohl auf der Nordhalbkugel

<sup>2</sup>Leider wird diese Abkürzung von Thompson und Wallace 1998 [59] auch für die Arktische Oszillation verwendet

<sup>3</sup>Auf einer nicht geneigten Erde ohne Jahreszeiten; durch die Jahreszeiten werden diese Bänder in meridionaler Richtung verschoben.

(NAM) als auch auf der Südhalbkugel zu finden, wobei das weiträumige Fehlen von Landmassen auf der Südhalbkugel den zonalen Charakter dieser Struktur besser gewährleistet, als dies auf der Nordhalbkugel der Fall ist, wo weite Landmassen der unbegrenzten Entfaltung der Westwinde und des Jetstreames im Wege stehen.

So wie sein nördlicher Bruder, der NAM-Index, wird auch der SAM-Index in der Literatur leider nicht ganz eindeutig definiert. Eine greifbare Definition betrachtet die Stärke des Druckunterschiedes zwischen dem subpolaren Hoch bei etwa  $30^{\circ}S - 40^{\circ}S$  und dem subpolaren Tief um  $60^{\circ}S - 65^{\circ}S$  und ist nach Gong und Wang 1999 definiert durch  $SAM = P_{40^{\circ}S}^* - P_{65^{\circ}S}^*$ , wobei  $P_{40^{\circ}S}^*$  und  $P_{65^{\circ}S}^*$  die normalisierten zonal gemittelten monatlichen Meeresoberflächendrücke (SLP) sind (siehe Gong und Wang (1999) [23]). Schwankungen in diesem Druckunterschied sind mit Schwankungen in der Windgeschwindigkeit der starken Westwinde verbunden (was wiederum Einfluss auf den Ozean hat). Eine andere Definition verwendet eine EOF-Analyse<sup>4</sup>. Welche Definition auch immer verwendet wird, generell kann man sagen, dass sich im SAM-Index die Stärke der Westwinde bzw. die Auslenkungen des Jetstreames (siehe Hall und Visbeck (2002) [24]) widerspiegeln.

Welche Auswirkungen dies auf die Meeresströmungen, die Oberflächentemperatur des Meeres oder die Eisbedeckung um die Antarktis hat, wurde u.a. von Hall und Visbeck (2002) [24] mit einem gekoppelten Ozean-Atmosphäre-Eis Modell untersucht und ist schematisch in Abb. 5.2 dargestellt. In einer positiven SAM Phase vergrößert sich der Druckunterschied und die Westwinde verstärken sich. Dieses bedingt wiederum einen verstärkten nordwärtigen Ekmantransport zwischen  $60^{\circ}S$  und  $40^{\circ}S$ . Auf diese Weise gelangt weniger Wärme nach Süden, was den meridionalen Temperaturunterschied erhöht und über die thermische Windbalance die ostwärtige Strömung verstärkt. Hinzu komme, dass durch den verstärkten Ekmantransport an der Oberfläche die meridionalen Umwälzprozesse verstärkt werden, was zu einem verstärkten Absenken der Dichteflächen führe und somit ebenfalls über die thermische Windbalance den ostwärtigen Transport erhöhe. Somit sei ein positiver SAM-Index mit einer Verstärkung des ACC verbunden. Allerdings vergrößerte sich der Transport des ACC durch die Drakepassage in ihrem Modell nur um 1 Sv bei einer Verstärkung des SAM-Indexes um 1.5 Standardabweichungen. Diese geringe Änderung erklären

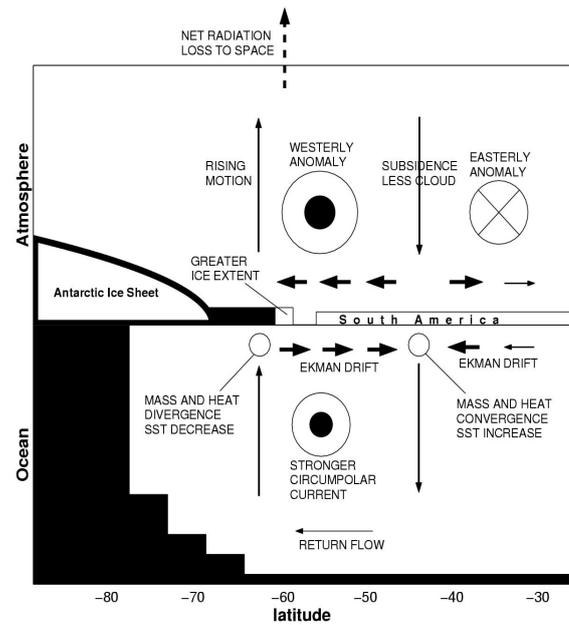


Abbildung 5.2: Reaktion des Ozeans, der Atmosphäre und des Meereises auf einen positiven SAM-Index nach Hall und Visbeck 2002 [24].

sie mit dem relativ kleinen mittleren Transport von 76 Sv. Nach meiner Berechnung würde bei einer Erhöhung des mittleren Transportes auf 134 Sv die Schwankung auf 1.75 Sv ansteigen, was noch immer recht klein gegenüber den gemessenen Schwankungen mit einer Standardabweichung von 13 Sv ist.

Seitdem sind weitere Arbeiten erschienen, die den Zusammenhang des SAM-Indexes mit dem Transport durch die Drakepassage oder mit Druckmessungen um die Antarktis untersuchen. Zu nennen sind hier z.B. Shigeru Aoki (2002) [3], der den SAM-Index mit Messungen des Meeresspiegelniveaus an fünf Stationen um die Antarktis korrelierte und signifikante Korrelationen ohne zeitliche Verschiebung feststellen konnte. Genannt sei auch die Arbeit von Hughes et al. (2003) [33], die sowohl den Zusammenhang mit Bodendruckdaten als auch die Korrelation des SAM-Indexes mit dem Transport durch die Drakepassage aus dem OCCAM Modell (Ocean Circulation and Climate Advanced Modeling project) betrachten. Eine Regression des Modelltransportes auf den SAM-Index ergab einen Anstieg um 3.5 Sv bei einem Anstieg des SAM-Indexes um eine Standardabweichung, was den Wert von Hall und Visbeck (2002) [24] von 0.67 Sv deutlich übersteigt.

Meredith et al. (2004) [41] konnten aufgrund von Bodendruckmessungen seit Anfang der 1980er Jahre an der Faraday Station im Süden der Drakepassage und Modell-

<sup>4</sup>Zur EOF-Analyse siehe z.B. Schönwiese (2000) [54] oder von Storch und Zwiers (1999) [65].

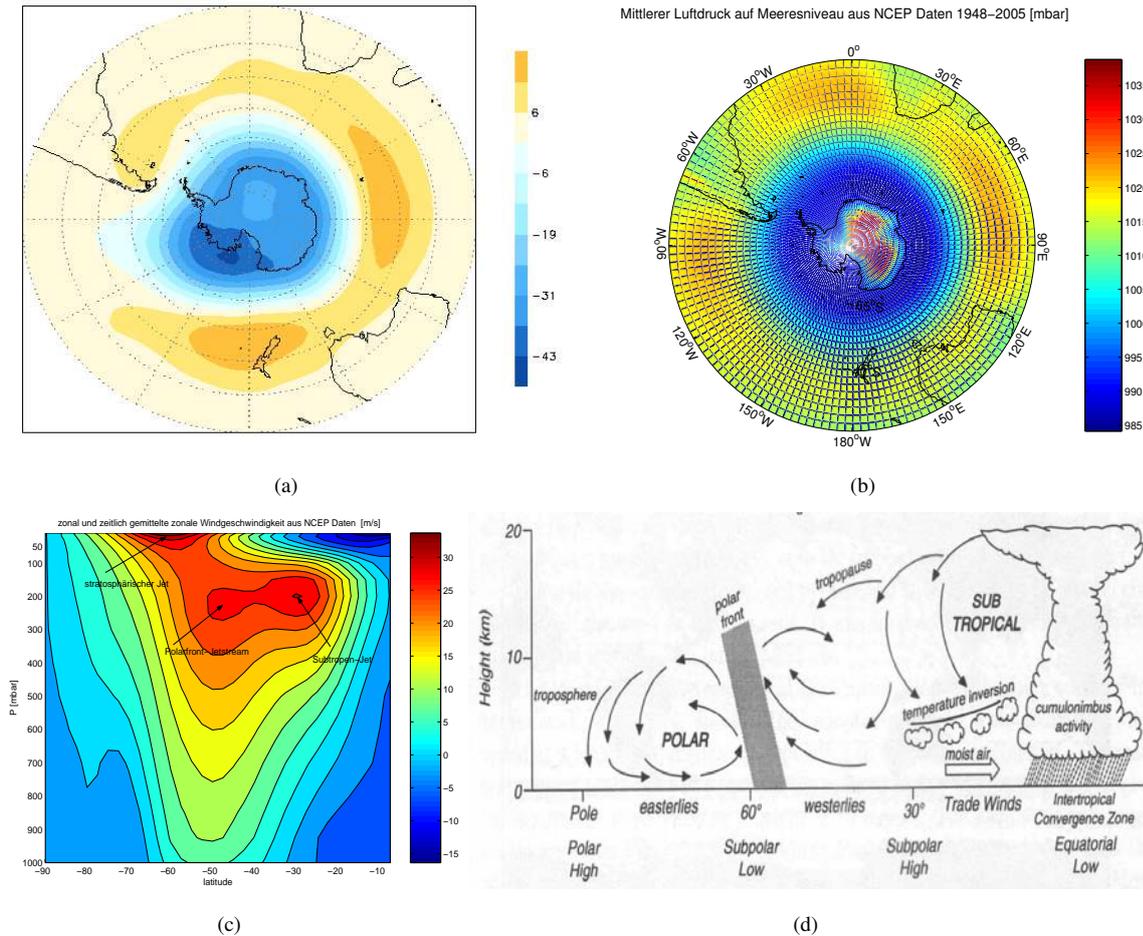


Abbildung 5.1: **(a)**: Typisches Muster des Southern Annular Mode. Der SAM ist hier definiert als die 1. EOF der mittleren monatlichen 850 hPa Höhen Anomalien. Die Einheiten sind in m/std der 1. EOF-Zeitreihe (Aus Thompson und Wallace 2000 [61]). **(b)**: Mittlerer Luftdruck auf Meeresspiegelniveau aus dem NCEP Datensatz von 1948-2005. **(c)** Zeitlich und zonal gemittelte zonale Windgeschwindigkeit aus NCEP Daten. Wegen seiner räumlichen Schwankungen kommt der Jetstream im zonalen und zeitlichen Mittel nicht so zur Geltung. **(d)**: Schema der atmosphärischen Zirkulation auf einer nicht geneigten Erde (aus Stewart 2003, [56])

transporten des OCCAM Modells<sup>5</sup> nachweisen, dass die Schwankungen im SAM-Index sich gut in diesen beiden Zeitreihen wiederfinden lassen, und dass somit die Schwankungen im Transport durch die Drakepassage durch Änderungen im SAM-Index bestimmt werden.

Neben den Schwankungen des SAM-Indexes kann man sich mit seinen langjährigen Trends beschäftigen. Es gibt zahlreiche Untersuchungen, die einen positiven Trend im SAM-Index über die letzten Jahrzehnte festgestellt haben. Zu nennen sind hier Arbeiten u.a. von Thompson et al. (2000) [62] und von Gareth Marshall (2003) [38], der auf einen ausgeprägten Trend seit Mitte der 1970er Jahre hinweist. Nun kann man sich fragen, ob diese Trends Ausdruck einer natürlichen Variabilität sind, oder ob etwa menschl-

ches Handeln hier seinen Einfluss zeigt. Einige Studien zeigen einen Zusammenhang mit dem Anstieg von Treibhausgasen und der daraus resultierenden weltweiten Erwärmung (u.a. Fyfe et al. (1999) [18] oder Kushner et al. (2001) [36]). Andere Studien (u.a. Thompson und Solomon (2002) [60] oder Gillett und Thompson (2003) [21]) dagegen machen den Ozonabbau in der Stratosphäre dafür verantwortlich. Obgleich nicht eindeutig geklärt ist, welcher Mechanismus nun der entscheidende ist, oder ob beide gar zu gleichen Teilen beitragen, so scheint es momentan Konsens zu sein, dass die Änderungen auf menschliches Verhalten zurückzuführen sind. Letztendlich sind die Ursachen für diese Arbeit aber zweitrangig, denn es ist in erster Linie der mit dem Anstieg des SAM-Indexes verbundene Anstieg des zonalen Windschubes von Bedeutung, der das hier verwendete Ozeanmodell antreibt.

<sup>5</sup>Diese Zeitreihe beginnt erst Anfang der 1990er und ist somit etwas kürzer als die Zeitreihe des Bodendruckes.

**Der Bodendruck als Proxy für den ACC Transport durch die Drakepassage** Hinsichtlich der Variabilität des Transportes durch die Drakepassage schlugen Hughes et al. (1999) vor, dass für Perioden zwischen 10 und 220 Tagen diese durch eine barotrope Komponente des Transportes geprägt sei, die ihrerseits durch die nicht blockierten  $f/h$ -Konturen entlang des antarktischen Kontinentschelfes beeinflusst werde. Sie liefern weiterhin theoretische Argumente, nach denen der Bodendruck im Süden der Drakepassage bzw. entlang der nicht blockierten  $f/h$ -Konturen die Schwankungen im Transport am besten widerspiegeln könne, während der Bodendruck im Norden oder gar die Differenz der Werte weniger geeignet erscheine. Insbesondere die letzte These wird durch die Arbeiten von Aoki (2002) [3], Hughes et al. (2003) [33] und Meredith et al. (2004) [41] weiter untermauert. In Abb. 5.3 sind Bilder aus Hughes et al. (2003) [33] zu sehen, die zum einen die Positionen einzelner Messgeräte und zum anderen die gemessenen Zeitreihen inklusive des Modelltransportes aus dem FRAM-Modell enthalten. Schon mit dem bloßen Auge kann man die großen Übereinstimmungen in den Schwankungen der einzelnen Zeitreihen erkennen.

Diese Arbeit soll nun u.a. untersuchen, ob sich ein solches Verhalten auch in BARBI finden lässt und auf welchen Zeitskalen diese Phänomene gelten. Weiterhin soll hierauf aufbauend ein einfaches lineares Regressionsmodell erstellt werden, das den Transport durch die Drakepassage als Funktion des Bodendruckes beschreibt. Doch dazu später mehr.

**Modellsetup** An dieser Stelle soll kurz auf die Modellkonfiguration, die verschiedenen Windantriebe und die Modellparameter eingegangen werden, die in den folgenden numerischen Studien verwendet werden.

Es werden sowohl Modellkonfigurationen mit realistischer Bodentopographie als auch idealisierte Kanalmodelle verwendet, wobei sich letztere nochmal in verschiedene Typen untergliedern lassen. Auf die speziellen Gegebenheiten der Bodentopographie, der Modellparameter und der verwendeten Winde für die Kanalmodelle werde ich an Ort und Stelle eingehen, so dass jetzt nur das realistische Modell kurz behandelt werden soll.

Die Bodentopographie soll nun dieselbe sein, die auch in den Sensitivitätsstudien im 3. Kapitel verwendet wurde und die in Abb. 3.1 zu sehen ist.

Sofern nichts anderes gesagt wird, gelten weiterhin folgende Modellparameter, die sich aus den Parameterstudien

im 3. Kapitel ergeben haben:

$A_h$	$5 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$	$K_h$	$2 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$
$\gamma$	$0.3921 \text{ m}^2/\text{s}$	$D_E$	$1.5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$
$N$	$1.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$		

Als Windantriebe werden fünf verschiedene Typen verwendet:

**Typ A** Zusammensetzung aus einem ECMWF-Mittelwert, der auch schon in den Parameterstudien verwendet wurde, und dazu addierten Anomalien von NCEP/NCAR monatlichen Winden. Zwischen den monatlichen Werten wird linear interpoliert, um tägliche Werte für das Modell zu erzeugen. Der Sinn in der Zusammensetzung besteht darin, dass man dem ECMWF-Mittelwert mehr Vertrauen schenkt als dem NCEP/NCAR Mittelwert. Der Mittelwert des zonalen Windschubes ist in Abb. 5.4 zu sehen.

**Typ B** NCEP/NCAR tägliche Winde ab 1975.

**Typ C** Weißes Rauschen mit einer räumlich konsistenten Korrelation. Es wird so generiert, dass man aus dem Datensatz der Winde vom Typ B für jeden Tag der Modellintegration beliebig die Windfelder  $\tau_x(x, y)$  und  $\tau_y(x, y)$  auswählt. Auf diese Art und Weise sind die Daten zwar räumlich realistisch gebaut, weisen aber in der Zeit keine Erhaltungsneigung auf. An einem festen Ort erzeugt man also auf diese Weise ein weißes Rauschen in der Zeit.

**Typ D1** Rotes Rauschen. Dieses wird mit Hilfe eines AR-Prozesses 1. Ordnung erzeugt. Dabei habe das Windfeld prinzipiell die Struktur:

$$\boldsymbol{\tau} = ar(x, y, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_0(x, y)$$

Für das zeitlich konstante Feld  $\boldsymbol{\tau}_0(x, y)$  wurde das erste Feld aus dem Datensatz des Typs B gewählt. Der AR-Prozess moduliert dann dieses Feld über die Beziehung:

$$ar(x, y, t) = 1 + \alpha [ar(x, y, t - \Delta t) - 1] + Z(x, y, t)$$

Dabei ist  $Z(x, y, t)$  eine gleichverteilte Zufallszahl auf dem Intervall  $[-0.3, 0.3]$  und  $\alpha = 0.98$ . Im linken Bild der Abb. 5.4 kann man das Spektrum eines so erzeugten zonalen Windschubes an einer speziellen Stelle im Südlichen Ozean sehen, wobei das Spektrum des nachträglich aus diesen Daten geschätzten AR-Prozesses rot eingezeichnet ist.

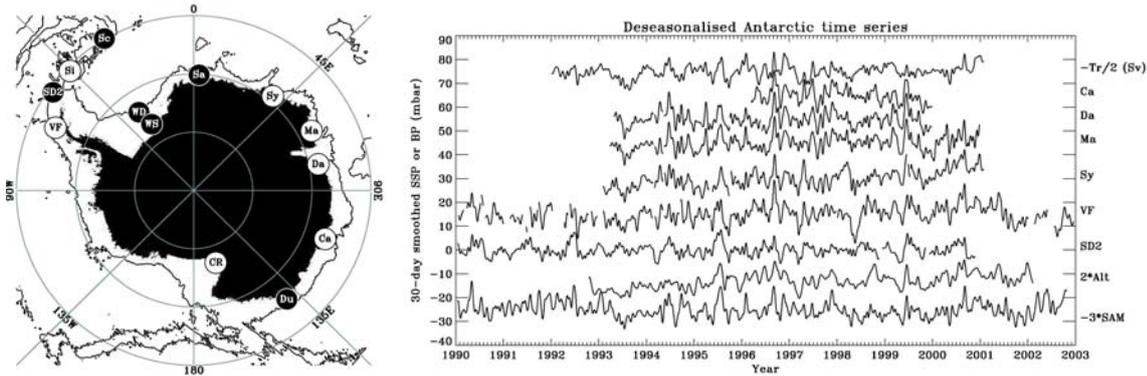


Abbildung 5.3: **Links:** Abbildung 1 aus Hughes et al. (2003) [33], die die Positionen der Bodendrucksensoren (schwarz) und der Gezeitenmesser (weiß) entlang der antarktischen Küste und in der Drakepassage darstellt. **Rechts:** Abbildung 4 aus Hughes et al. (2003) [33]. Es sind die Zeitreihen der Bodendrucksensoren und Gezeitenmesser (Ca, Da, Ma, Sy, Vf, SD2), des Modelltransportes aus dem FRAM-Modell (Tr), des SAM-Indexes (SAM) und eines Satellitenaltimeters (Alt) dargestellt.

**Typ D2** Rotes Rauschen, wobei alle Orte in Phase sind. Die Struktur ist gegeben durch:

$$\tau = ar(t) \cdot \tau_0(x, y)$$

$$ar(t) = 1 + \alpha [ar(t - \Delta t) - 1] + Z(t)$$

wobei dieses Mal  $Z(x, y, t)$  eine gleichverteilte Zufallszahl auf dem Intervall  $[-0.2, 0.2]$  ist.

**Typ E** Winde, die mit Hilfe des SAM-Indexes von Martin Visbeck generiert wurden. Nähere Details dazu finden sich in Abschnitt 5.5.

## 5.2 Trend im ACC Transport durch die Drakepassage

Nach dieser längeren Einleitung soll nun die angesprochene Frage untersucht werden, ob der Transport durch die Drakepassage langjährige Schwankungen oder Trends aufweist.

In Abb. 5.5 sind sowohl die gemessenen Werte aus Cunningham et al. (2003) [15] als auch die Modellergebnisse unter den Windantrieben der Typen A und B für den Zeitraum der ISOS- und WOCE-Studie dargestellt. Die Modellzeitreihen wurden dafür tiefpassgefiltert, wobei Perioden unter 60 Tagen unterdrückt wurden, um sie besser mit den Messwerten vergleichen zu können.

Der gemessene Mittelwert liegt für die Jahre 1975-2000 bei  $\mu = 102.7 Sv$  mit einer Standardabweichung von  $\sigma = 12.6 Sv$ . Für die Jahre 1990-2000 gilt  $\mu = 111.9 Sv$  mit  $\sigma = 5.2 Sv$ . Bei diesen Messwerten sollte man sich noch

einmal vor Augen führen, dass sie sich auf ein level-of-no-motion bei 3000 m (genauer 3000 db) beziehen, so dass der absolute Transport größer sein sollte, da auch unterhalb von 3000 m noch nennenswerte Anteile zum Transport beitragen dürften. Aus diesen Grund findet man üblicherweise in der Literatur einen Wert von etwa 136 Sv, so dass die hier verwendeten Modelltransporte aus diesem Grund scheinbar zu klein sind.

Wie man jedoch sehen kann, stimmen die Modellwerte aus BARBI für beide Typen von Windantrieben relativ gut mit diesen Messwerten überein.<sup>6</sup> Auf der Grundlage der gemessenen Daten kommen Cunningham et al. mit Hilfe eines Student t-Testes und einem Signifikanzniveau von 95% zu dem Schluss, dass die Mittelwerte in diesen zwei Zeiträumen (1975-1980, 1990-2000) zwar unterschiedlich aber eben nicht signifikant unterschiedlich sind. Aus diesem Grund lasse sich aus den Messwerten auch kein langjähriger Trend ableiten.

Wendet man nun dasselbe Verfahren auf die Modelldaten an (die Durchführung eines solchen t-Testes ist z.B. in Schönwiese (2000) [54] beschrieben), so erhält man ein überraschendes Ergebnis: Betrachtet man nur die Transporte (hier für die NCEP täglichen Winde) zu den Zeitpunkten, die mit den Zeitpunkten in Cunningham et al. übereinstimmen (diese Werte werden durch die Kreuze in Abb. 5.5 markiert), so ergibt dies ebenfalls, dass die Mittelwer-

<sup>6</sup>Man könnte an dieser Stelle einwenden, dass man einen Messwert immer in der Nähe einer Modellkurve sehen wird, wenn die Mittelwerte der Modellwerte und der gemessenen Werte annähernd übereinstimmen und die Modellkurve nur schnell genug schwankt. Ich hoffe, dass dieses hier nicht der Fall ist.

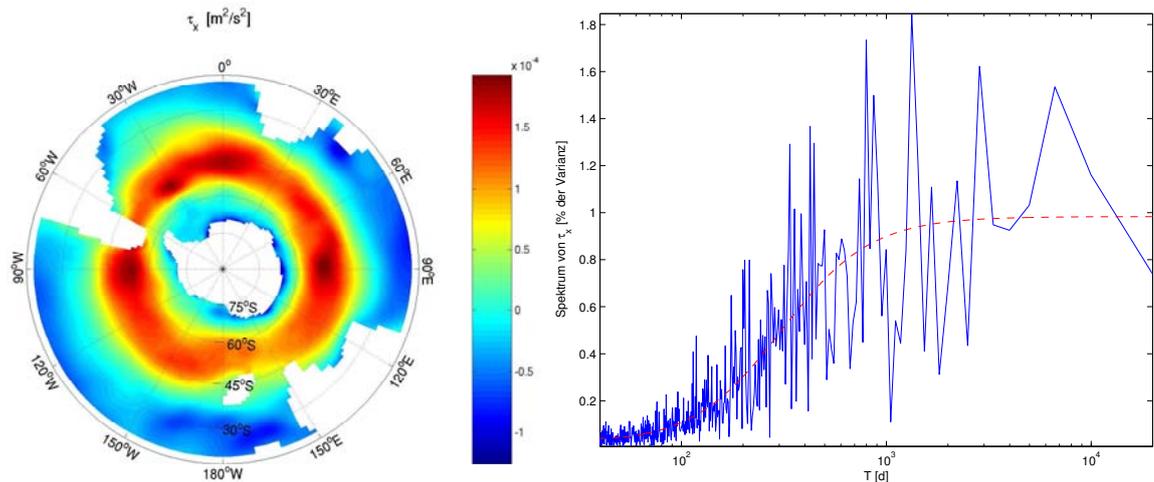


Abbildung 5.4: **Links:** Mittelwert des zonalen Windschubes für den Windantrieb vom Typ A. **Rechts:** Spektrum des zonalen Windschubes an einer speziellen Stelle im Südlichen Ozean für den Windantrieb vom Typ D, wobei das Spektrum des nachträglich aus diesen Daten geschätzten AR-Prozesses rot eingezeichnet ist.

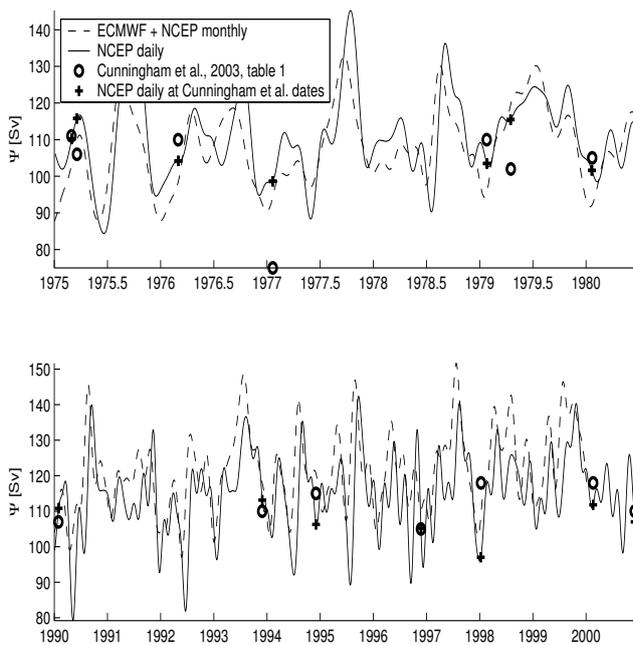


Abbildung 5.5: Vergleich des ACC-Transportes aus BAR-BI mit Messwerten aus Cunningham et al. (2003) [15]. Die Transporte wurden tiefpassgefiltert, wobei Perioden unter 60 Tagen unterdrückt wurden.

te (1975-1980:  $\mu = 111.27 Sv$ ,  $\sigma = 5.79 Sv$  ; 1990-2000:  $\mu = 106.77 Sv$ ,  $\sigma = 11.42 Sv$ ) nicht signifikant unterschiedlich (und sogar fallend) sind, so dass sich kein langjähriger Trend ableiten lässt. Verwendet man jedoch die gesamten Modelldaten in diesen Zeiträumen (1975-1980:  $\mu = 110.61 Sv$ ,  $\sigma = 13.3 Sv$  ; 1990-2000:  $\mu = 114.93 Sv$ ,  $\sigma = 13.8 Sv$ ) , so sind die Mittelwerte signifikant unter-

schiedlich.

Dieses Kriterium suggeriert einen signifikanten Trend im ACC Transport für die Winde vom Typ B, der in diesem Fall in der Größenordnung 0.30 Sv pro Jahr liegt. Bestimmt man für diesen Trend das Trend/Rausch Verhältnis, so kommt man jedoch zu dem Schluss, dass dieser Trend für ein 95% Signifikanzlevel nicht signifikant ist. Die Standardabweichung dieser Zeitreihe ist einfach noch zu groß, und der Trend, obgleich sichtbar, ist zu schwach ausgeprägt.

Abb. 5.6 macht die Situation etwas deutlicher. In ihr sind im oberen Teilbild die Modelltransporte durch die Drakepassage für die zwei unterschiedlichen Windantriebe dargestellt. Im mittleren Teilbild sieht man die Verläufe der jeweiligen zonalen Windschübe, räumlich gemittelt zwischen 68°S und 47°S. Das untere Bild zeigt den SAM-Index nach Gareth Marshall (Details zu diesem Index etwas später).

Betrachtet man zunächst das obere Teilbild, so sieht man den deutlichen Trend im Transport durch die Drakepassage für das Windforcing vom Typ A (1.04 Sv / Jahr) und einen schwächeren Trend für das Windforcing vom Typ B. Für das Windforcing B ergibt sich nun die Situation, dass zwei Tests zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, aber auf der anderen Seite ein leichter Trend in den Daten sehen ist.

Wie kann es zu diesen unterschiedlichen Trends in den beiden Szenarios A) und B) kommen?

Betrachtet man die mittleren zonalen Winde, so erkennt man ebenfalls einen ansteigenden Trend. Dieses scheint erst einmal vernünftig zu sein, denn ein Anstieg im zonalen Windantrieb sollte in irgendeiner Weise zu einem An-

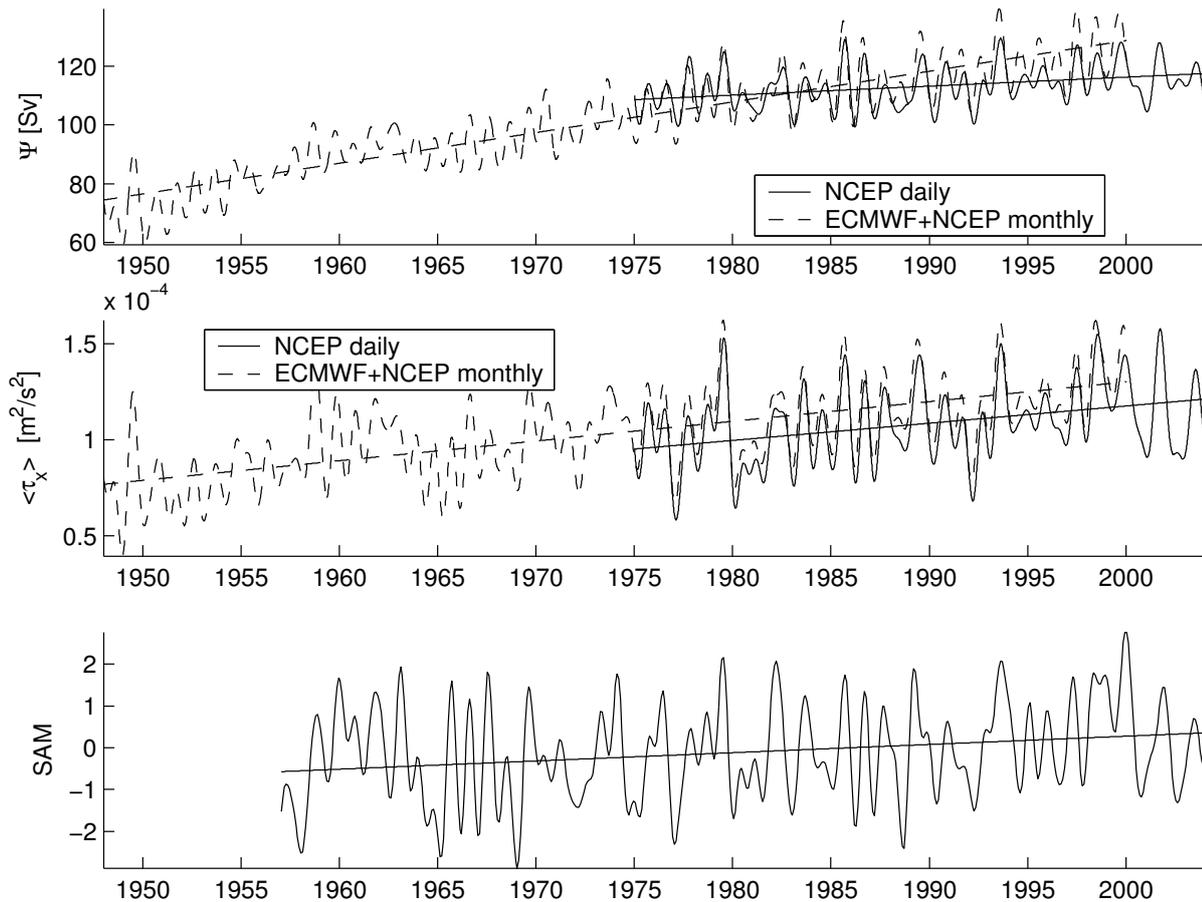


Abbildung 5.6: **Oberes Teilbild:** Modell Transport durch die Drakepassage für die Windantriebe A und B. **Mittleres Teilbild:** Räumlich gemittelter zonaler Windschub zwischen  $68^{\circ}\text{S}$  and  $47^{\circ}\text{S}$ . **Unteres Teilbild:** SAM-Index nach Gareth Marshall. Die Daten sind tiefpassgefiltert worden, um sie besser darstellen zu können.

stieg des Transportes führen. Eine mögliche Ursache für die unterschiedlichen Trends könnte sein, dass die Winde des Typs A stärker sind als die des Typs B, was daran liegt, dass die Wahl dieses 'künstlichen' Mittelwertes im Falle A einen Versatz der beiden Zeitreihen bewirkt. Dennoch sollte der Trend aber für beide Windschübe gleich sein, da dieser durch die NCEP Werte bedingt ist, und somit auch in den Anomalien der NCEP Monatsmittel enthalten ist.

Eine andere Erklärung wäre, dass das Modell träge auf die sich im Wesentlichen nur monatlich ändernden Winde im Falle A reagiert und sich die langen Beschleunigungsphasen unter den monatlich linear interpolierten Winden stärker auswirken. Trotz dieser beiden Überlegungen weiß ich nicht sicher, worin die Ursache für diese unterschiedlichen Trends liegt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es aus diesen Daten Hinweise für einen Anstieg im Transport durch die Drakepassage gibt, auch wenn diese noch mit Vorbehalt zu betrachten sind. Wenn nun aufgrund der letzten Überlegun-

gen der Trend im Falle A etwas zu stark zu sein scheint, so muss man sich immer noch fragen, ob der schwächere Trend unter den NCEP täglichen Winden realistisch ist. Dazu sollte man u.a. zwei Dinge überprüfen:

1. Gibt es im Modell einen künstlichen Trend, den man hier möglicherweise sieht?
2. Wenn das Modell auf die ansteigenden Winde mit einem ansteigenden Modelltransport reagiert, so sollte man den Trend in den Winden überprüfen.

Kommen wir zur Frage nach einem positiven internen Trend. Verlängert man den Einschwingvorgang des Modells um die gleiche Zeitdauer, die den NCEP täglichen Winden zwischen 1975 und 2004 zu Grunde liegt, so findet man eher einen sehr leicht abfallenden Trend von  $-0.0003\text{ Sv/Jahr}$  als einen ansteigenden Trend. Der beobachtete Modelltrend ist somit mit großer Wahrscheinlichkeit nicht auf einen internen Modelltrend zurückzuführen.

Nun zu der Frage, ob die Trends in den Winddaten rea-

listisch sind. Hines et al. 2000 [28] untersuchten die Reanalysedaten, die von NCEP/NCAR zur Verfügung gestellt werden, und kamen zu dem Ergebnis, dass insbesondere in den Daten des Südlichen Ozeans langjährige Trends zu finden seien, die sich nicht mit Messdaten in Einklang bringen lassen. Dies gilt insbesondere für die Jahre vor 1970. Für die nachfolgenden Jahre geben sie zwar keine Entwarnung, dennoch werde die kurzfristige Variabilität in den Daten besser wiedergegeben. Der hier verwendete Windantrieb B beginnt erst 1975, so dass man darauf hoffen kann, dass die künstlichen Trends nicht zu stark sind.

Es gibt aber noch einen weiteren Hinweis dafür, dass der Trend in den Winden realistisch ist. In der Einleitung wurde bereits der Zusammenhang zwischen dem SAM-Index und dem zonalen Windschub beschrieben, nachdem man eine Verstärkung des Windschubes bei einem großen SAM-Index erwarten sollte. Der im unteren Teilbild der Abb. 5.6 dargestellte SAM-Index beruht auf gemessenen Daten und ist demnach nicht mit Fehlern der NCEP/NCAR Reanalyse behaftet. Man erkennt auch hier einen positiven Trend, so dass aus diesem Grund der Trend in den Winddaten plausibel erscheint.

Doch wenn vieles für einen positiven Trend im Transport durch die Drakepassage spricht, wie kann es nun zu der Diskrepanz zwischen den von Cunningham et al. gemessenen Werten und den BARBI-Modellergebnissen kommen?

Zunächst einmal lassen sich sowohl BARBI als auch die Messwerte in Frage stellen. Bei BARBI handelt es sich um ein einfaches Zirkulationsmodell, das nur durch den Wind angetrieben wird. Es ist somit fraglich, ob die Realität richtig wiedergegeben wird, in der neben dem Wind auch thermohaline Antriebe von Bedeutung sind.

Außerdem sind Cunninghams Messwerte und das statistische Verfahren in Frage zu stellen. Bei Untersuchung der Daten ist zu erkennen, dass der Mittelwert in den 1990er gegenüber den 1970er Jahren erhöht ist. Vielleicht liegt hier der recht unwahrscheinliche Fall vor, dass der  $t$ -Test keinen Trend auswirft, obgleich einer vorhanden ist.

Etwas wahrscheinlicher ist, dass die gemessenen Werte noch keinen eindeutigen Schluss darüber zulassen, wie die Realität aussieht, da einfach zu wenig Messwerte vorliegen. Dies kann u.a. durch die Arbeit von Meredith und Hughes 2005 [40] belegt werden, die zeigen können, dass man mindestens jede Woche einmal den Transport durch die Drakepassage messen müsste, um den jährlichen Mittelwert gut wiederzugeben.<sup>7</sup> Wenn ich das nun auf die Messwerte von

Cunningham et al. übertrage, so hätten wesentlich häufigere Messungen vorgenommen werden müssen, um aussagekräftige Mittelwerte auf einer Zeitskala von 5-10 Jahren zu erhalten. Nun kann man Cunningham et al. sicherlich keinen Vorwurf machen, da das Datenmaterial nun einmal so begrenzt ist, und sie die statistischen Methoden sicherlich vorsichtig angewendet haben.

Abschließend bleibt zu sagen, dass der beobachtete Modelltrend durchaus möglich ist, was sich insbesondere auf den positiven Trend im SAM-Index bzw. den Anstieg im zonalen Windschub stützt. Dennoch kann hier nicht vollständig geklärt werden, wie dieses Ergebnis zu bewerten ist, und ob der beobachtete Trend im Szenario B wirklich signifikant ist, obgleich er mit dem bloßem Auge sichtbar ist.

### 5.3 Allgemeine Korrelationskarten des ACC-Transportes

In diesem Abschnitt soll der Transport durch die Drakepassage mit unterschiedlichen Größen korreliert werden, um deren Einfluss auf den Transport zu bestimmen.

Möchte man z.B. wissen, welchen Einfluss der zonale Windschub hat, bzw. ob dieser an einem Ort größer ist als an einem anderem, so kann man die Zeitreihe des Transportes durch die Drakepassage mit den Zeitreihen des zonalen Windschubes an jedem Gitterpunkt des Modellgebietes korrelieren. Auf diese Weise entstehen Korrelationskarten, die auch unter dem Stichwort Telekonnektionen laufen (näheres hierzu lässt sich im Anhang B.3 finden).

In den Abbildungen 5.7 bis 5.8 sind solche Karten für verschiedene Felder (Stromfunktion  $\Psi$ , zonaler und meridionaler Windschub, der Betrag des Windschubes, die potentielle Energie  $E$ , den curl des Windfeldes und für den Bodendruck) für die zwei Windantriebe der Typen B und C dargestellt. Für die Berechnung der Korrelationen wurde der Trend in den Zeitreihen und im Falle des Typs B der Jahresgang inklusive der Halbjahresperiode abgezogen. Weiterhin wurden Korrelationswerte unter einem Signifikanzniveau von 95% auf Null gesetzt.

Kommen wir zunächst zu den Korrelationen für den Typ B. Betrachtet man die Korrelationen mit der potentiellen

die aus den Modelldaten zu den Cunningham et al. Zeitpunkten bestimmt wurden. Diese Daten fallen sogar, obwohl der Gesamttrend positiv ist. Das bedeutet, dass diese wenigen Daten das Modellverhalten nicht adäquat widerspiegeln.

<sup>7</sup>Ein gutes Beispiel für einen solchen Sachverhalt sind die Mittelwerte,

Energie  $E$ , so fällt die feingliedrige Struktur von positiven und negativen Korrelationen ins Auge. Aber die Korrelationen übersteigen kaum einen Betrag von 0.4. Zu den Windfeldern ist zu sagen, dass der zonale Windschub die größten Korrelationen zeigt, welche ringförmig im Gürtel der Drakepassage liegen mit einem Maximum in der Drakepassage. Die Korrelationen mit dem meridionalen Windschub hingegen fallen eher klein aus, so dass die Korrelation mit dem Betrag des Windschubes durch den zonalen Anteil bestimmt sein dürfte. Ebenso zeigt der curl des Windschubes geringe Korrelationen.

Die größten Korrelationen zeigen sich für die Stromfunktion selbst und für den Bodendruck. Für die Stromfunktion ist es nicht verwunderlich, dass die Korrelationen direkt an der antarktischen Küste am Größten sind, da die Stromfunktion hier aus numerischen Gründen räumlich konstant sein muss. Interessanter jedoch ist das Verhalten im übrigen Gebiet, wobei die größten Korrelationen eng mit den  $f/h$ -Konturen um die Antarktis verbunden sind.

Eine sehr ähnliche Struktur sieht man auch in der Korrelation mit dem Bodendruck. Auffällig ist hier nur der starke Wechsel in der Drakepassage mit sehr hoher Korrelation im Süden und betragsmäßig niedrigerer negativer Korrelation im Norden der Drakepassage. In dieser Karte zeigt sich weiterhin der in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochene Zusammenhang zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck entlang der nicht blockierten  $f/h$ -Konturen um die Antarktis.

Es stellt sich nun die Frage, welche Strukturen auch unter den Winden des Typs C Bestand haben, bei denen es sich ja um zeitliches weißes Rauschen handelt.

Betrachtet man Abb. 5.8, so haben die Strukturen der Windfelder scheinbar keinen Bestand. Hier und da sieht man für diese ein paar Orte hoher Korrelation, wobei deren Signifikanz durchaus in Frage gestellt werden könnte. Generell verschwindet das ringförmige Muster großer Korrelationen um die Antarktis.

Von hoher Beständigkeit sind jedoch die Karten der Stromfunktion und des Bodendruckes. Dies bestätigt den wichtigen Zusammenhang zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck entlang der antarktischen Küste.

Ich möchte an dieser Stelle noch anmerken, dass die hier berechneten Korrelationen nur den Zusammenhang auf kurzen Zeitskalen widerspiegeln, da das Zeitintervall zwischen zwei Datenpunkten um 5 Tage liegt. Dies könnte erklären, warum die Korrelation mit dem zonalen Windschub ver-

schwindet, wenn man von dem roten Spektrum der realen Winde mit einer Erhaltungsneigung auf das weiße Rauschen wechselt. Man sollte erwarten, dass die Korrelationen mit dem Windschub auch für das weiße Rauschen wieder steigen, wenn man längere Zeitskalen betrachtet - etwa durch Filterung der Zeitreihen. Diese Zusammenhänge werden im nächsten Kapitel etwas besser herausgearbeitet.

## 5.4 Zusammenhang mit dem Windschub

Kommen wir nun zu einer für diese Arbeit recht wichtigen Frage. Welchen Einfluss haben Schwankungen im Wind auf den Transport durch die Drakepassage?

Da der Wind den einzigen Antrieb für die hier vorliegenden Experimente darstellt, ist die Vermutung naheliegend, dass Schwankungen im Forcing sich auf den Response (Reaktion, Antwort) des Modells auswirken sollten.

Man kann sich diesem Problem nun von verschiedenen Richtungen nähern und es gibt eine Fülle von Analysemethoden. In dieser Arbeit soll sich aber auf spektrale Untersuchungen und die Betrachtung von Korrelationen beschränkt werden.

### 5.4.1 Stufenförmiger Windschub

Eines der einfachsten Experimente dürfte sein, den Wind einfach auf einen konstanten Wert einzuschalten und zu beobachten, wie der Ozean aus dem Zustand völliger Ruhe und Gleichförmigkeit in einen gleichmäßig und statisch strömenden Zustand gerät.

Dieses Experiment wurde mit demselben konstanten Windfeld wie in den Parameterstudien einmal für einen barotropen Ozean mit einer homogenen Dichte ( $N = 0$ ) und für einen baroklinen Ozean mit einer Dichteschichtung von  $N = 0.0015 \text{ s}^{-1}$  durchgeführt.

Die sich aufbauenden Transporte durch die Drakepassage sind in der oberen Zeile der Abb. 5.9 dargestellt. Sowohl für den barotropen als auch für den baroklinen Transport erkennt man, dass die Werte am Anfang stark ansteigen und nach einer gewissen Zeit in einen konstanten Wert einlaufen. Das System reagiert also in beiden Fällen träge auf den eingeschalteten Wind.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Dieser Vorgang scheint vergleichbar zu sein mit dem Einschaltprozess in einem Gleichstromkreis, in dem ein Ohmscher Widerstand und eine Spule in Reihe geschaltet sind. Dadurch dass sich in der Spule nach der Lenzschen Regel ein Gegenfeld aufbaut, das die Wirkung der angelegten

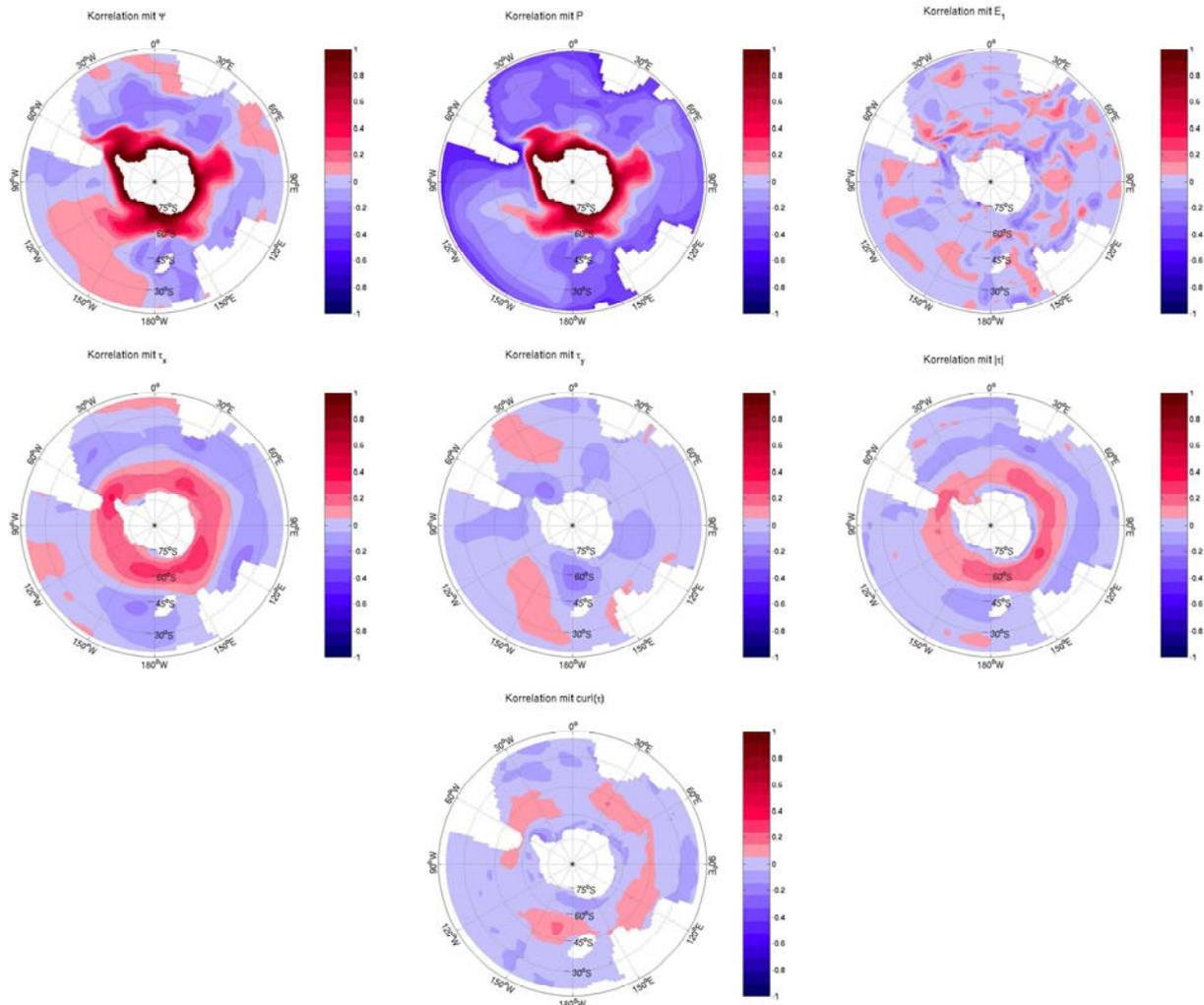


Abbildung 5.7: Korrelationen zwischen dem Transport durch die Drakepassage und verschiedenen Größen für den Windantrieb vom Typ B. Die von Null verschiedenen Korrelationen sind nach dem im Anhang beschriebenen Test auf dem 95%-Niveau signifikant.

Bei Betrachtung der jeweiligen Zeitskala beider Fälle wird deutlich, dass im barotropen Fall das System viel schneller - schon nach etwa 60 Tagen - in einen fast stationären Zustand gerät als im baroklinen Fall - 3000 Tage.

Im barotropen Fall kann man zusätzlich eine weitere Eigenschaft des Systems gut sehen. Dem ansteigenden Transport sind insbesondere zu Beginn der Integration leichte Schwankungen überlagert (rote Kurve), die vermutlich durch barotrope Rossbywellen bedingt sind. Leider sind diese barotropen Rossbywellen im baroklinen Fall nicht zu erkennen, da die Vorgänge zu Beginn der Integration in dieser Abbildung nicht ausreichend aufgelöst werden.

Spannung vermindert, baut sich die Stromstärke nicht sofort auf, sobald die antreibende Spannung angelegt wird. Legt man an diesen Stromkreis eine Wechselfspannung an, so wird der Strom der antreibenden Spannung hinterherlaufen, was sich in einer Phasendifferenz zwischen Stromstärke und Spannung ausdrückt.

Generell lassen sich diese Einschwingvorgänge durch folgende Gleichung beschreiben, die den Transport als Funktion der Zeit darstellt:

$$\Psi(t) = \Psi_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.1)$$

Darin beschreibt  $\Psi_0$  den Sättigungswert und  $\tau$  die Zeitkonstante<sup>9</sup> des Vorgangs. Um die Zeitkonstante  $\tau$  zu bestimmen, kann man die Zeitreihe des Einschwingvorganges aufbereiten. Für aufeinander folgende Werte im zeitlichen Abstand von  $\Delta t$  gilt:

$$\begin{aligned} \Delta\Psi(t) &:= \Psi(t + \Delta t) - \Psi(t) \\ &= \Psi_0(1 - e^{-\Delta t/\tau})e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Bildet man hiervon den natürlichen Logarithmus, so ergibt

<sup>9</sup>Trotz der identischen Notation, bitte die Zeitkonstante nicht mit dem Windschub verwechseln!

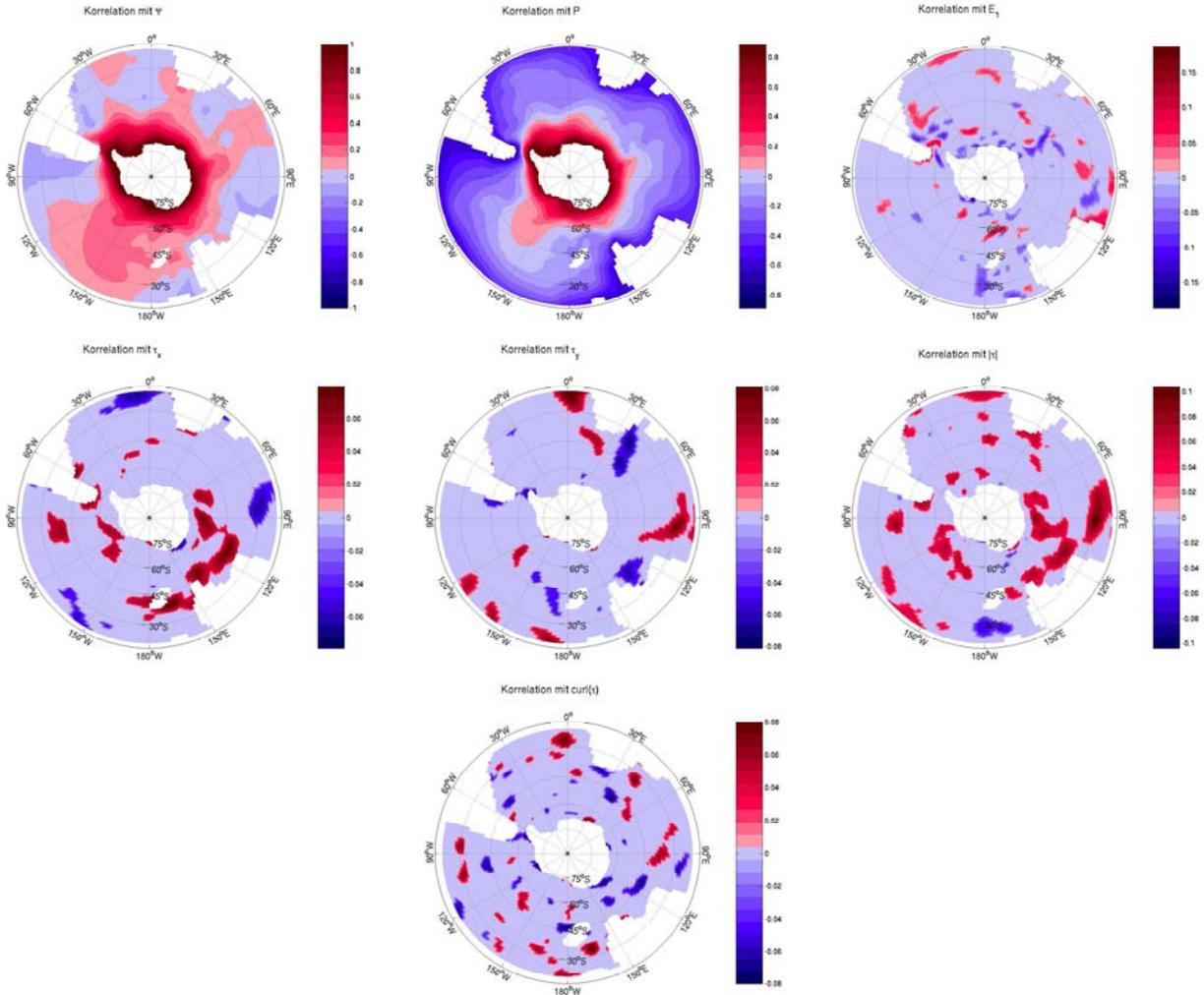


Abbildung 5.8: Korrelationen zwischen dem Transport durch die Drakepassage und verschiedenen Größen für den Windantrieb vom Typ C. Die von Null verschiedenen Korrelationen sind nach dem im Anhang beschriebenen Test auf dem 95%-Niveau signifikant.

sich:

$$\ln(\Delta\Psi(t)) = a - \frac{t}{\tau} \quad (5.2)$$

mit der Konstanten  $a := \ln(\Psi_0(1 - e^{-\Delta t/\tau}))$ . Stellt man diese Beziehung graphisch dar, so ergibt sich eine fallende Gerade. Diese Aufbereitung ist in der unteren Zeile der Abb. 5.9 zu sehen. Die rot gestrichelten Geraden in den unteren Bildern sind die Ausgleichsgeraden, aus deren Steigung die Zeitkonstante  $\tau$  bestimmt werden kann. Im baroklinen Fall erhält man auf diese Weise eine Zeitkonstante von  $\tau_{klin} = 5780 d$  und im barotropen Fall von  $\tau_{trop} \approx 11 d$ . Im barotropen Fall wurden die barotropen Rossbywellen durch eine Gaußsche Tiefpassfilterung (siehe Schönwiese (2000) [54]) herausgeglättet, wobei jedoch der Filterprozess diese Zeitkonstante leicht erhöht zu haben scheint. In der Literatur findet sich z.B. bei Wearn und Baker (1980) [66] eine barotrope Zeitkonstante, die auf

Schätzungen beruht, von  $\tau_{WB} = 7d$ . Es wird sich später zeigen, dass dieser Wert scheinbar etwas besser zu den Ergebnissen passt.

**Woher kommen die Zeitkonstanten?** Generell kann man sich fragen, woher diese Zeitkonstanten kommen, bzw. was sie bestimmt.

Auf der Suche nach einer Antwort bin ich auf eine Zeitskala gestoßen, die die Anpassung des Ozeans auf Veränderungen im Wind mit der Zeitdauer verbindet, die die angeregten Rossbywellen benötigen, um den betrachteten Ozeanbereich einmal zu durchqueren. Verschiedene Autoren (u.a. Middleton und Cirano (2002) [42] oder Cessi und Primeau (2001) [11]) beziehen sich auf diese Erklärung, die im Wesentlichen auf eine Arbeit von Anderson und Gill (1975) [2] zurückgeht.

Bei Verwendung der Flachbodenlösungen, die sich aus

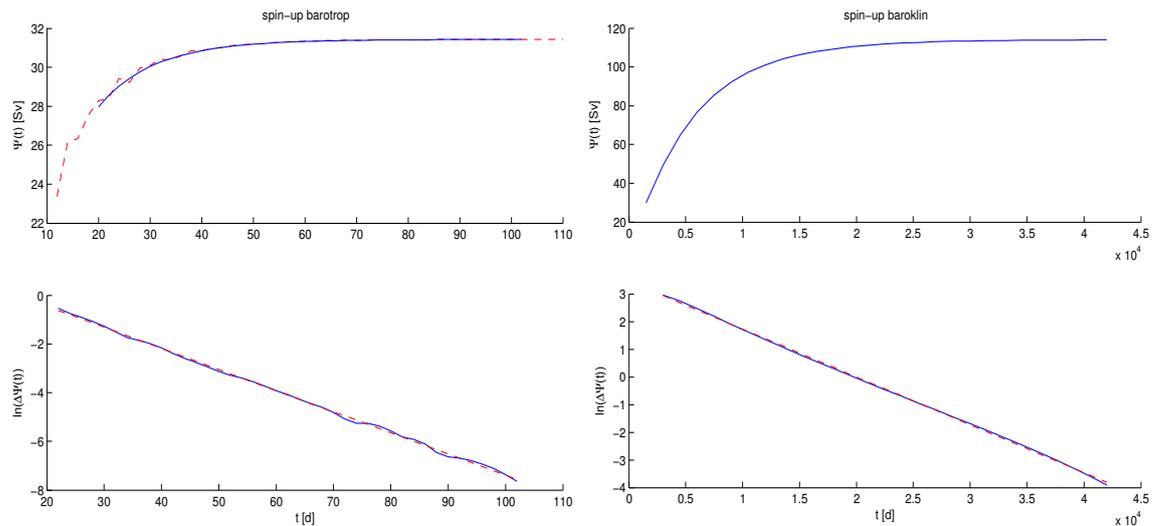


Abbildung 5.9: Einschwingvorgänge für einen stufenförmigen Windstress. Die Darstellungen in der unteren Reihe dienen der Bestimmung der Zeitkonstanten. Näheres im Text. **Links:** Barotroper Lauf mit  $N = 0$ . **Rechts:** Barokliner Lauf mit  $N = 0.0015 \text{ s}^{-1}$ . Die rot gestrichelten Geraden in den unteren Bildern sind die Ausgleichsgeraden, aus deren Steigung die Zeitkonstante bestimmt werden kann.

der quasigeostrophischen Theorie ergeben, findet sich für die sehr langen Rossbywellen im Südlichen Ozean (Distanz etwa 20.000 km, mittlere Breite  $55^\circ S$ , mittlere Tiefe 4000 m, Dichteschichtung  $N = 0.0015 \text{ s}^{-1}$ ) eine Überquerungsdauer von 7.35 d für barotrope und 7914 d für barokline Rossbywellen.

Vergleicht man zunächst die Größenordnungen, so stimmen diese Werte gut mit den oben gemessenen experimentellen Werten überein. Die barotrope Zeitkonstante von Wearn und Baker von 7 d wird sogar ziemlich genau getroffen. Im baroklinen Fall ist die Spinup-Zeit dieses Modells kleiner als die theoretische. Wäre jedoch die Ausbreitungsgeschwindigkeit langer barokliner Wellen nur um einen Faktor 1.3 größer, so würde das experimentelle mit dem theoretischen Ergebnis gut übereinstimmen. Nun haben ja Untersuchungen von Chelton und Schlax (1996) [13] und die Experimente im Kapitel zur Wellenausbreitung gezeigt, dass man durchaus erhöhte Gruppengeschwindigkeiten messen kann, was aber bedeutet, dass sich Andersons und Gills Theorie scheinbar auch auf den baroklinen Fall anwenden lässt<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Zugegebenermaßen kann man bei der Berechnung der Geschwindigkeit an einigen Parametern wie der Referenzbreite oder der Wassertiefe drehen. Auch ist nicht gesagt, welche Wellenlängen von Bedeutung sind. Man kann deshalb sicher nicht erwarten, mit dieser Theorie die exakten Spinup Zeiten vorherzusagen. Dennoch gibt diese Theorie die Größenordnung richtig wieder, was ja schon bemerkenswert ist. Ich muss jedoch gestehen, dass mir nicht ganz klar ist, wie sie funktioniert, und was die zu Grunde liegenden Mechanismen sind.

## 5.4.2 Reale Winde

Nach diesen recht einfachen, aber nicht unwichtigen Experimenten soll nun die Reaktion des Transportes durch die Drakepassage auf realere Windfelder untersucht werden.

**Korrelationen** Die Korrelationsuntersuchungen des letzten Abschnittes haben bereits gezeigt, dass der curl des Windfeldes von untergeordneter Rolle ist, während der zonale Windschub im Gürtel der Drakepassage den Transport maßgeblich beeinflusst.

Dieses kann noch einmal durch Abb. 5.10 untermauert werden, wobei sowohl das Windforcing vom Typ A als auch das vom Typ B mit den täglichen Winden betrachtet wird. Im linken Bild ist der Korrelationskoeffizient zwischen dem Transport und dem zonal gemittelten zonalen Windschub in Abhängigkeit der geographischen Breite dargestellt. Zusätzlich sind die Zeitreihen unterschiedlich weit gegeneinander verschoben. Der Bereich der Drakepassage im Modell wird durch die zwei senkrechten schwarzen Linien dargestellt. Aus dieser Abbildung erkennt man deutlich, dass die maximale Korrelation im Gürtel der Drakepassage liegt, wobei sie leicht in den südlichen Bereich verschoben ist. Dies gilt besonders für das Windforcing vom Typ A. Für letzteres gilt auch, dass die Korrelationen größer werden, wenn man eine Verschiebung der Zeitreihen von 5-10 Tagen so wählt, dass der Wind dem Transport voraus eilt.

In den beiden rechten Bildern ist die Kreuzkorrelations-

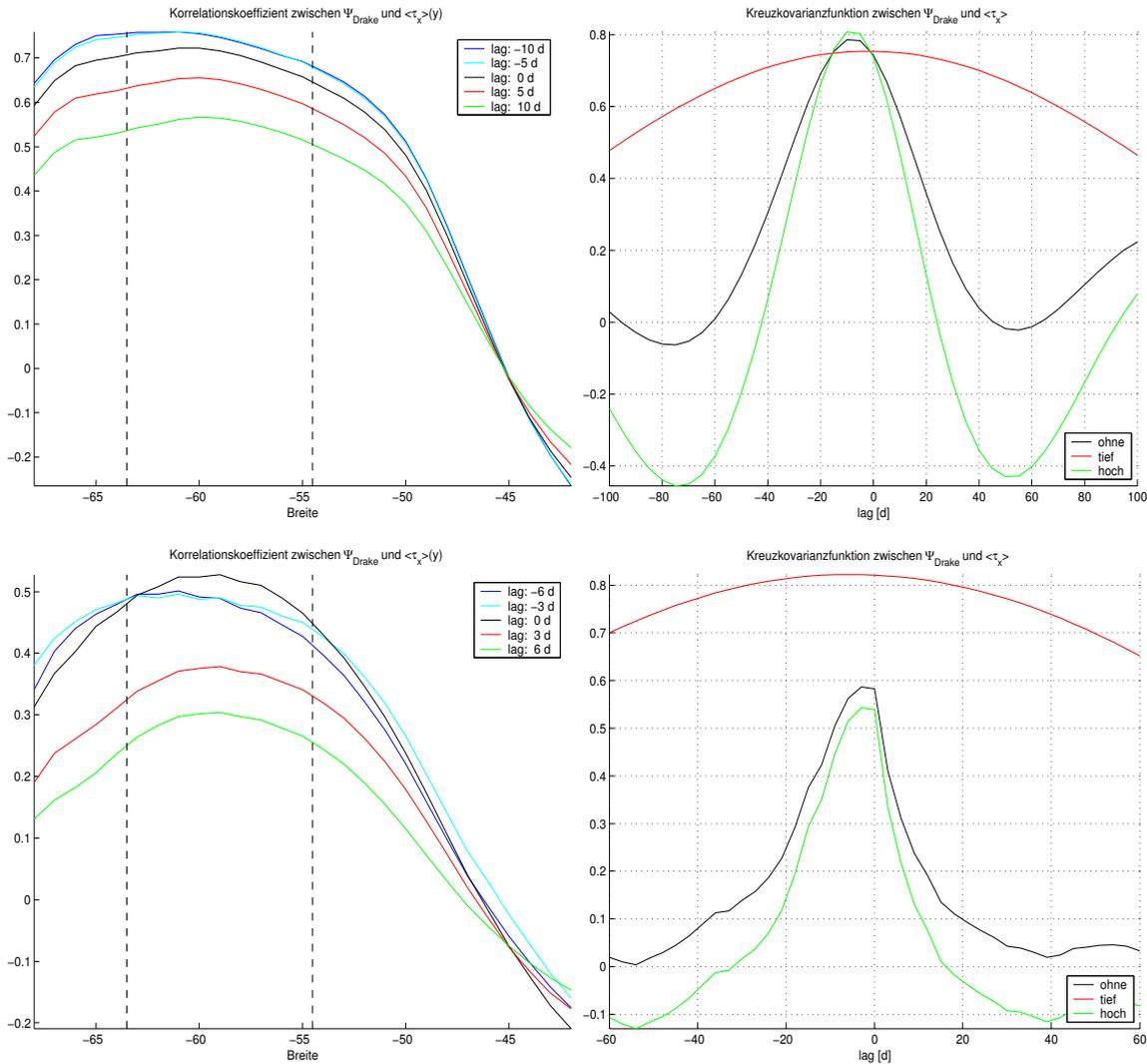


Abbildung 5.10: **Links:** Korrelationskoeffizient zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem zonal gemittelten zonalen Windstress in Abhängigkeit von der Breite. **Rechts:** Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem gemittelten Windstress zwischen 68°S und 47°S. Zusätzlich ist diese Funktion für hoch- und tiefpassgefilterte Daten mit einer Abschneideperiode von 1 Jahr dargestellt. **Oben:** Windantrieb von Typ A. **Unten:** Vom Typ B.

funktion zwischen dem Transport und dem mittleren zonalen Windschub dargestellt, wobei die Daten zusätzlich tief- und hochpassgefiltert sind. Für die ungefilterten und die hochpassgefilterten Daten erkennt man, dass die maximale Korrelation bei einer leichten Verschiebung der Zeitreihen zu Stande kommt. Der Wind eilt dem Transport um 3-10 Tage voraus, was mit dem Ergebnis von Wearn und Baker (1980) [66] vergleichbar ist.

**Spektrale Methoden** Nun soll der Zusammenhang zwischen Windschub und Transport mit spektralen Methoden untersucht werden.

Dazu werden zunächst von den Zeitreihen des Trans-

portes und des mittleren zonalen und meridionalen Windes Spektren<sup>11</sup> berechnet, um mögliche dominante Perioden zu identifizieren. Diese sind in Tabelle 5.1 zu sehen.

Betrachtet man zunächst die Windschübe, so kann man in ihnen im Wesentlichen den Jahresgang und die ersten zwei harmonischen Perioden (1/2 und 1/3 Jahr) wiederfinden.

Den Jahresgang und seine harmonischen Perioden findet man auch im Transport durch die Drakepassage. Die Intensität ist aber unterschiedlich für die Windantriebe A und B. Während im ersten Fall der Jahresgang alles dominiert, ist es im zweiten Fall der halbe Jahresgang. Schwach las-

<sup>11</sup>Die Berechnung der Spektren bzw. des Signifikanzniveaus wird im Anhang B.1 beschrieben.

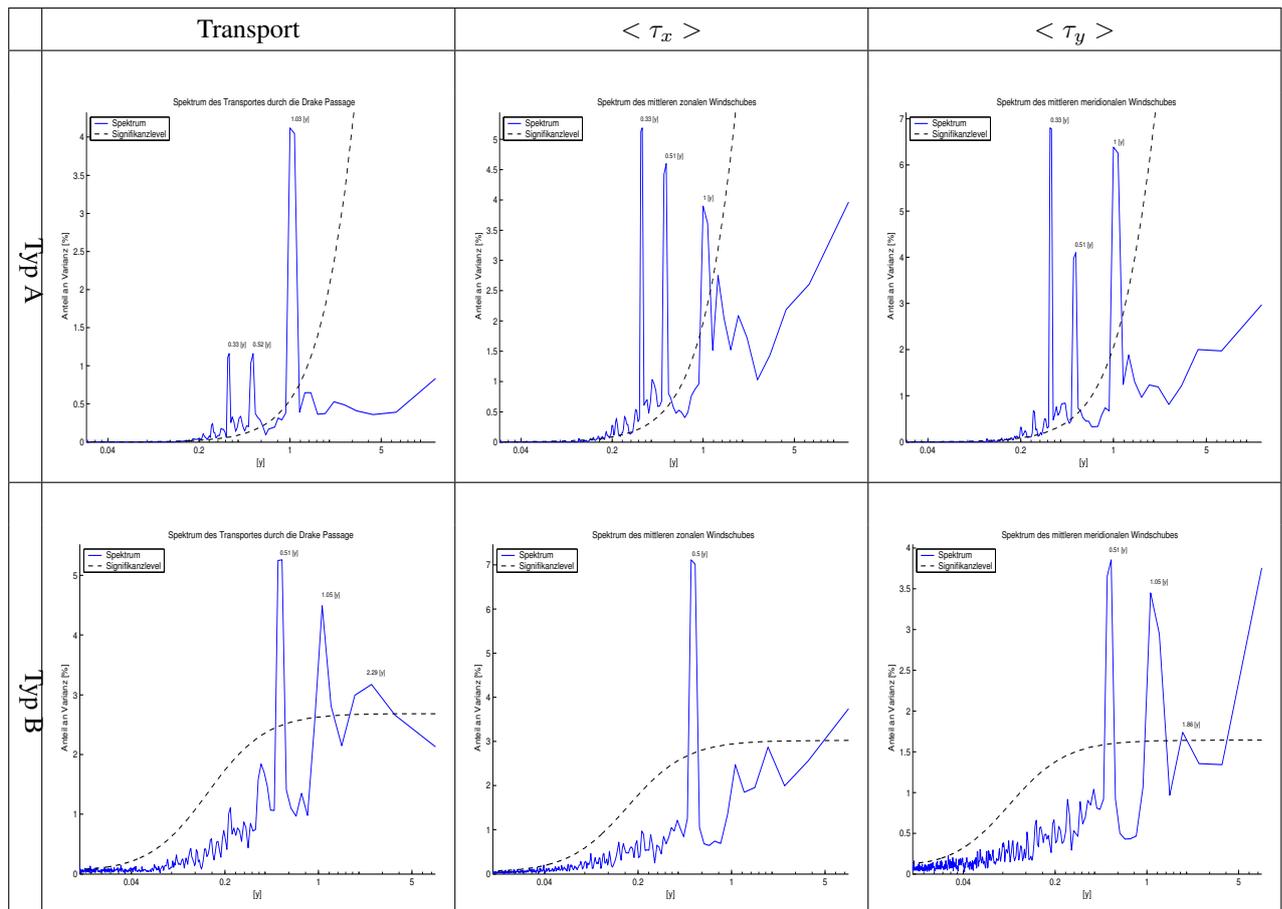


Tabelle 5.1: Dargestellt sind jeweils für das Windforcing A und B das 95%-Signifikanzniveau und Spektrum für: **Links-** den Transporte durch die Drakepassage, **Mitte-** den mittleren zonalen Windschub und **Rechts-** mittleren meridionalen Windschub.

sen sich ebenfalls die dominanten Anteile zwischen 2 und 4 Jahren (für Typ B) finden.

Aus den Spektren ist weiterhin zu erkennen, dass sich der Hauptanteil der Varianz für die längeren Perioden finden lässt in Analogie zu den Windspektren, die ebenfalls zu kleinen Perioden abfallen.

Weder für den Windantrieb vom Typ A noch für den vom Typ B findet man einen dominanten resonanten Mode mit einer Periode um 10 Tage, wie man es nach dem Artikel von Weijer (2005) [67] erwarten könnte. Allerdings wird diese Zeitskala hier nicht ausreichend aufgelöst, und der Jahresgang dominiert zusammen mit seinen harmonischen Perioden die Spektren.

Nachdem die Spektren für jede Zeitreihe einzeln berechnet wurden, sollen nun Kreuzspektren betrachtet werden, woraus sich weitere Größen wie die Kohärenz und die Phasenbeziehung zwischen den Zeitreihen ableiten lassen. Wie diese berechnet werden, ist auch im Anhang beschrieben.

Für das Windforcing von Typ B sind im oberen rechten Doppelbild von Abb. 5.11 die Kohärenz und die Phase zwi-

schen dem Transport durch die Drakepassage und dem mittleren zonalen Windschub im Südlichen Ozean dargestellt. Man erkennt, dass die Kohärenz ab Perioden von 30 Tagen stark ansteigt, während sie vorher eher klein ist. Die Phase zeigt ebenfalls bis zu einer Periode von etwa 30 Tagen ein stark schwankendes Verhalten, während sie danach negativ ist mit einem stetigen Anstieg. Folglich sind für Perioden zwischen 30 Tagen und 500 Tagen das Windfeld und der Transport gut im Einklang, wobei der Wind dem Transport etwas voraus eilt, was auch sinnvoll ist, da die Wirkung der Ursache hinterher eilen sollte.

Dass dieses Verhalten von BARBI durchaus in Ordnung zu sein scheint, zeigt das untere Teilbild in Abb. 5.11 aus der Arbeit von Huges et al. (1999) [32], das ebenfalls die Kohärenz und die Phase zwischen dem Transport durch die Drakepassage, berechnet mit dem FRAM-Modell, und dem gemittelten zonalen Windschub bei  $60^\circ S$  zeigt. In diesem erkennt man zum einen, dass die Kohärenz ebenfalls bei kleinen Perioden bis zu 30 Tage recht klein ist und dann auf Werte bis 0.8 ansteigt. Zum anderen verhält sich auch

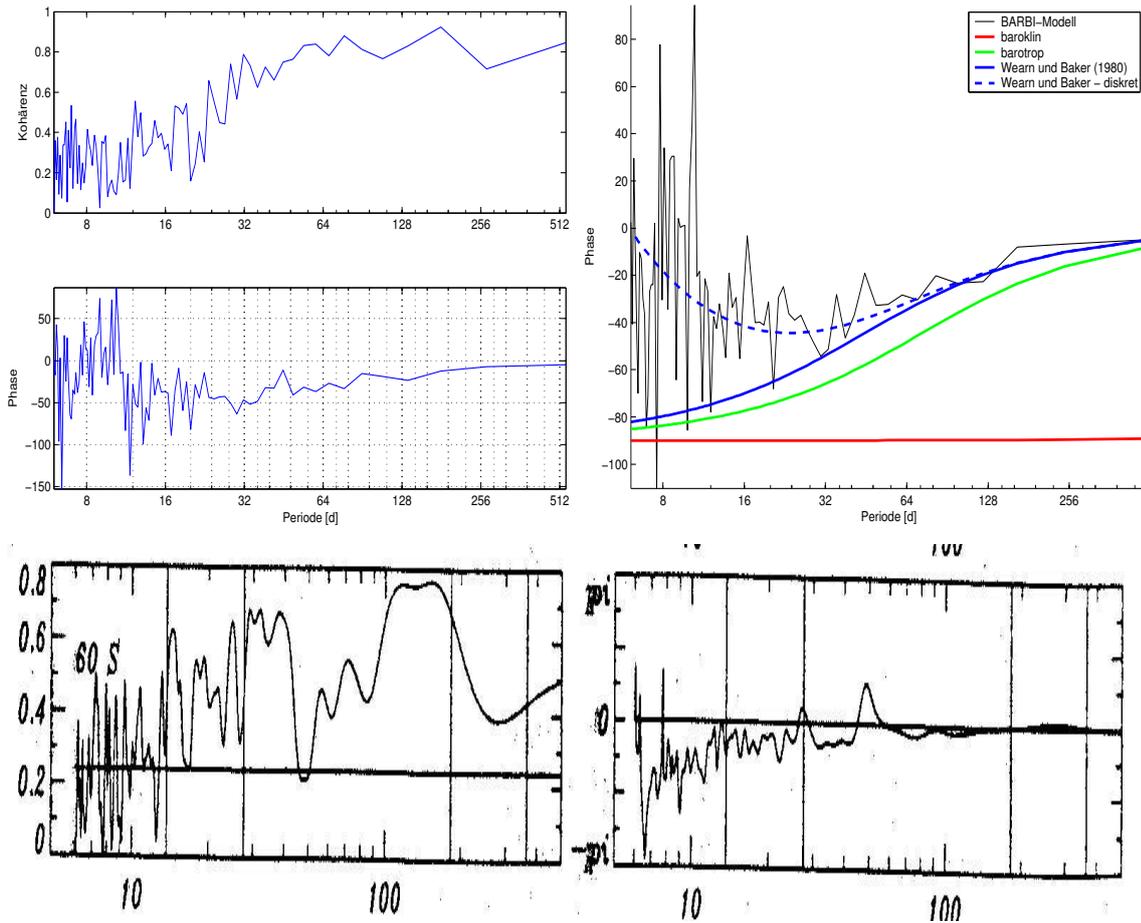


Abbildung 5.11: **Oben links:** Kohärenz und Phasenverschiebung zwischen dem mittleren zonalen Windschub zwischen  $68^\circ S$  und  $47^\circ S$  und dem Transport durch die Drakepassage. **Oben rechts:** Phasenverschiebung aus dem numerischen Experiment mit BARBI (schwarz), und theoretische Kurven für die barokline Zeitkonstante (rot), die barotropen Zeitkonstante (grün) und die Konstante nach Wearn und Baker (1980) [66] (blau), wobei die durchgezogenen Linien das kontinuierliche und die gestrichelte das diskrete Modell bezeichnen. **Unten:** Kohärenzen und Phasenverschiebung zwischen dem gemittelten zonalen Windstress bei  $60^\circ S$  und dem Modelltransport des FRAM-Modells aus Hughes et al. (1999) [32]

die Phase analog zu BARBI.

Dieser Umstand ist umso erfreulicher, da neben dem Anwender (also mir) auch das Modell BARBI nach wie vor auf dem Prüfstand steht. BARBI zeigt hier also, dass es durchaus vergleichbare Resultate liefern kann.

Abb. 5.11 enthält weiterhin das Teilbild oben rechts, über das noch gar nicht gesprochen wurde. Im Wesentlichen handelt es sich nur um eine vergrößerte Darstellung der Phasenbeziehung mit ein paar zusätzlichen Kurven, auf die ich nun näher eingehen möchte.

Ein einfaches Modell, das den Transport durch die Drakepassage in Abhängigkeit des Windes beschreibt, lässt sich u.a. bei Wearn und Baker 1980 [66] finden und ist gegeben durch:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} + \frac{\Psi(t)}{\tau} = F(t) \quad (5.3)$$

Hierbei sollen  $\Psi$  den Transport und  $F$  den Windschub bezeichnen. Für einen stufenförmigen Wind  $F_0$  wird diese Differentialgleichung gelöst durch den Einschwingvorgang (5.1) mit  $\Psi_0 = F_0/\tau$ .

Mit Hilfe dieses dynamischen Modells kann man nun auch für einen schwankenden Wind die Phase zwischen dem Transport und dem Windschub berechnen, wobei es nicht ganz egal ist, ob man dieses in der Zeit kontinuierliche Modell oder ein diskretes Modell verwendet. Für beide Typen sollen die theoretischen Phasenbeziehungen nun berechnet werden:

**kontinuierlich** Um die Lösung dieser Gleichung unter schwankendem Wind zu untersuchen, kann man Glei-

chung (5.3) einer Fourier-Transformation<sup>12</sup> unterziehen. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} -i\omega\hat{\Psi} + \frac{1}{\tau}\hat{\Psi} &= \hat{F} \\ \Leftrightarrow \hat{F} &= \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\hat{\Psi} \end{aligned}$$

Die Phasenbeziehung  $\phi(\omega)$  zwischen dem Wind und dem Transport lässt sich dann aus dem Real- und Imaginärteil des 'Kreuzspektrums'  $\hat{F}\hat{\Psi}^* = |\hat{\Psi}|^2(1/\tau - i\omega)$  berechnen zu:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan\left(\frac{-\omega|\hat{\Psi}|^2}{1/\tau|\hat{\Psi}|^2}\right) \\ &= \arctan(-\omega\tau) \end{aligned} \quad (5.4)$$

**diskret** Die Berechnung der Phasenbeziehung soll hier nicht im Einzelnen beschrieben werden. Stattdessen wird nur das Ergebnis einer Rechnung präsentiert, die sich im Anhang B.2 finden lässt:

$$\phi_{dis}(\omega) = \arctan\left(\frac{\sin(\omega\Delta t)}{\tau^{-1}\Delta t + 1 - \cos(\omega\Delta t)}\right) \quad (5.5)$$

Für große Perioden (kleine Frequenzen) ist  $\sin(\omega\Delta t) \approx \omega\Delta t$  und  $\cos(\omega\Delta t) \approx 1$ , so dass sich in diesem Fall die barotrope Phasenbeziehung mit kontinuierlicher Ableitung ergibt (genauer die negative Phasenbeziehung bei einer Vertauschung von Wind und Transport). Für kleine Perioden (große Frequenzen,  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{\Delta t}$ ) gilt  $\phi_{dis} = 0$ , während für die kontinuierliche Phase  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  gilt. Daran lässt sich erkennen, dass für kurze Perioden die Abweichungen zwischen der Phase mit kontinuierlicher und der Phase mit diskreter Ableitung am Stärksten sind.

Bei Kenntnis der Zeitkonstanten kann also mit Hilfe dieser Modellansätze der Phasenwinkel als Funktion von  $\omega = \frac{2\pi}{t}$  darstellen werden<sup>13</sup>. Um diese Zeitkonstanten zu erhalten, werden die Einschwingvorgänge mit den stufenförmigen Winden verwendet.

Die zusätzlichen Kurven im Teilbild oben rechts der Abb. 5.11 sind also die Phasenkurven dieser einfachen dynamischen Modelle im kontinuierlichen bzw. diskreten Fall nach Gleichung (5.4) und (5.5), wobei die durchgezogenen Linien den kontinuierlichen Ansatz und die gestrichelte Kurve

<sup>12</sup>Man kann auch sagen, dass man für den Transport und den Wind einen Ebenen-Wellen-Ansatz der Form  $F(t) = \hat{F}e^{-i\omega t}$  macht.

<sup>13</sup>Dabei sollte man aber auf die Vorzeichen des Imaginär- und Realteiles achten, um den Bereich  $[-180^\circ, 180^\circ]$  voll abzudecken. Matlab stellt hierfür die Funktion `atan2(Im,Re)` zur Verfügung.

den diskreten repräsentieren. Die theoretischen Phasenkurven sind für die barotrope, die barokline und die Zeitkonstante nach Wearn und Baker (1980) [66] von 7 Tagen dargestellt. Aus der Betrachtung der Kurven des kontinuierlichen Modells zeigt sich besonders deutlich, dass sich der Transport durch die Drakepassage für Perioden zwischen etwa 20 und 500 Tagen gut durch dieses einfache Modell unter Verwendung der barotropen Zeitskala von 7 bis 11 Tagen beschreiben lässt. Dabei scheint der Wert von  $\tau = 7d$  eine bessere Übereinstimmung zu geben, was die barotrope Zeitkonstante von 11 Tagen als zu hoch bestimmt erscheinen lässt. Für kleine Perioden läuft die theoretische Phase des kontinuierlichen Modells jedoch gegen  $90^\circ$  und nicht wie für BARBI gegen Null.

Bei kleinen Perioden wird das Verhalten besser durch die diskrete Kurve beschrieben. Dadurch dass die BARBI-Ergebnisse als eine diskrete Zeitreihe mit einem Zeitschritt von 3 Tagen abgespeichert wurden, stimmt die BARBI-Kurve für kleine Perioden eher mit der diskreten Phasenkurve überein. Für große Perioden erlischt dieser Effekt.

Was in dieser Abbildung an den BARBI-Ergebnissen auffällig ist, sind die ausgeprägten Peaks für Perioden zwischen etwa 8 und 12 Tagen. In diesem Zeitraum scheint der Transport dem Wind voraus zu eilen, was nicht im Sinne des Ursache-Wirkung-Prinzips ist. Möglicherweise sieht man hier barotrope Rossbywellen oder gar diesen resonanten barotropen topographischen Rossbymode, den Wilbert Weijer (2005) [67] in seinen Kanalexperimenten gefunden hat. Dies wäre ein erster Hinweis auf diesen Mode für eine realistischere Topographie. Ich werde etwas später noch einmal auf diesen Punkt eingehen.

Berücksichtigt man die Tatsache, dass es sich bei diesen Modelldaten um einen baroklinen Lauf mit einer nicht verschwindenden Dichteschichtung handelt, so kann man generell an dieser Abbildung erkennen, dass sich die Dynamik auf den betrachteten Zeitskalen bis 500 Tagen durch ein barotropes Modell beschreiben lässt, das bezüglich des Transportes nur den Wind und sonst keinerlei barokline Einflüsse wie etwa den JEBAR-Term benötigt. Die Variabilität des Transportes durch die Drakepassage scheint also auf dieser Zeitskala nur durch den barotropen Anteil des Modells bestimmt zu sein.

### 5.4.3 Ein einfaches baroklines Modell - Variante A

Das im letzten Abschnitt vorgestellte dynamische Modell kann die Einstellungsprozesse auf den Wind recht gut auf einer Zeitskala zwischen etwa 20 Tagen und 1-2 Jahren beschreiben. Dieses Modell lässt aber den Einfluss der Dichteverteilung außer Acht, die, wie in verschiedenen Studien gezeigt (siehe z.B. Borowski et al. (2002) [6]), über die thermische Wind-Balance den Transport deutlich mit beeinflusst. Dieses Verhalten konnte in den Parameterstudien auch für BARBI gezeigt werden, als der Transport sich deutlich beim Wechsel vom barotropen Fall mit  $N = 0$  zum baroklinen Fall mit  $N \neq 0$  erhöhte.

Das von Wearn und Baker verwendete Modell soll nun um einen Antriebsterm erweitert werden, der die meridionale Differenz der potentiellen Energie darstellt. Diese Differenz wird ebenfalls direkt über den Windschub mit Hilfe des Ekmanpumpens beeinflusst, was zu sehen ist, wenn in geostrophischer Näherung die Gleichung des baroklinen Geschwindigkeitsmomentes in die Gleichung der potentiellen Energie eingesetzt wird.

Nun ist dieser Ansatz nicht neu. So verwenden 'einfache' stochastische Klimamodelle nach Hasselmann (siehe z.B. Hasselmann (1976) [26] oder von Storch und Navarra (1999) [64]) einen analogen Ansatz, bei dem sie das Klimasystem grob in schnelle (hier barotrope) und langsame (hier die baroklinen) Variablen einteilen. Es konnte an vielen Beispielen gezeigt werden, dass sich die Dynamik des Klimasystems im Groben durch solche einfachen Modelle beschreiben lässt.

Analog zu Wearn und Baker schlage ich nun folgendes lineare Modell vor:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} + a\Psi &= nF + b\Delta E + Z_\Psi \\ \frac{d\Delta E}{dt} + d\Delta E &= mF + Z_E \end{aligned} \quad (5.6)$$

Aus praktischen Gründen werden dieses Mal die inversen Zeitkonstanten  $a$  und  $d$  verwendet. Zusätzlich taucht eine Kopplungskonstante  $b$  auf, die das barokline Feld mit dem barotropen verbindet. Die Einheit der Konstanten  $a$ ,  $d$  und  $b$  ist  $1/\text{Zeit}$ , und  $F$  bezeichnet den Windantrieb, der über die Konstanten  $n$  und  $m$  an die potentielle Energie bzw. den Transport angekoppelt wird. Die Terme  $Z_\Psi$  und  $Z_E$  beschreiben den Rauschanteil, der nicht durch dieses lineare Modell beschrieben wird. Für diese werde die Annahme getroffen, dass sie nicht weiter mit den Feldern  $\Psi$  und  $E$  korreliert sind, so dass sie bei den folgenden Untersuchungen

vernachlässigt werden können.

Der Einfluss des Transportes auf das  $E$ -Feld wird jedoch nicht berücksichtigt, um die Situation etwas zu vereinfachen. Dies ist zum einen dadurch bedingt, dass das lineare Modell die barotrope Advektion in der  $E$ -Gleichung vernachlässigt, und dass zum anderen die Einflüsse der Strömung auf die Dichteschichtung beim Anströmen von Hindernissen herausgelassen werden (der Term  $\mathbf{U} \cdot \nabla h$ ).

Zur Anpassung der Konstanten an ein numerisches Modell können wieder Spinup-Experimente verwendet werden, wobei nach Anschalten des Windes im baroklinen Fall ( $N \neq 0$ ) aus der Einstellung des Feldes der potentiellen Energie die Konstante  $d$  und im barotropen Fall aus der Einstellung des Transportes die Konstante  $a$  nach dem vorne beschriebenen Verfahren ermittelt werden können.

Für dieses Modell lässt sich nun auch die theoretische Phasenbeziehung zwischen dem Transport und dem Windantrieb bestimmen, wobei hier aufgrund der nun interessierenden langen Zeitskalen der kontinuierliche Fall betrachtet werden kann.

Dafür ist es nötig, die Konstante  $\eta := \frac{bm}{n}$  zu kennen, welche sich aus den stationären Werten des Transportes im barotropen Fall  $\Psi_a = nF/a$  und im baroklinen Fall  $\Psi_d$  folgendermaßen bestimmen lässt:

$$\eta = \left( \frac{\Psi_d}{\Psi_a} - 1 \right) d \quad (5.7)$$

Wie im barotropen Modell des letzten Abschnittes kann man durch eine Fouriertransformation der Gleichungen Aussagen über das Spektrum des Transportes und die Phase zwischen Transport und Windantrieb ermitteln. Zunächst erhält man mit Hilfe einer Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} -i\omega\hat{\Psi} + a\hat{\Psi} &= n\hat{F} + b\widehat{\Delta E} \\ -i\omega\widehat{\Delta E} + d\widehat{\Delta E} &= m\hat{F} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird das Kreuzspektrum zwischen dem Transport und dem Windantrieb bestimmt zu:

$$\hat{F}\hat{\Psi}^* = n|\hat{F}|^2 \frac{1 + \frac{\eta}{d+i\omega}}{a + i\omega} \quad (5.8)$$

Die Phasenbeziehung lässt sich wieder über den Real- und Imaginärteil bestimmen:

$$\phi_{F\Psi}(\omega) = \arctan \left( -\frac{\omega(d^2 + \omega^2 + \eta(a+d))}{a(d^2 + \omega^2 + \eta d) - \omega^2 \eta} \right) \quad (5.9)$$

Sind also aus den Spinup-Prozessen die Konstanten  $a, d$  und  $\eta$  ermittelt, so lässt sich die Phasenbeziehung zwischen dem Windantrieb und dem Transport mit Hilfe von Gleichung (5.9) bestimmen.

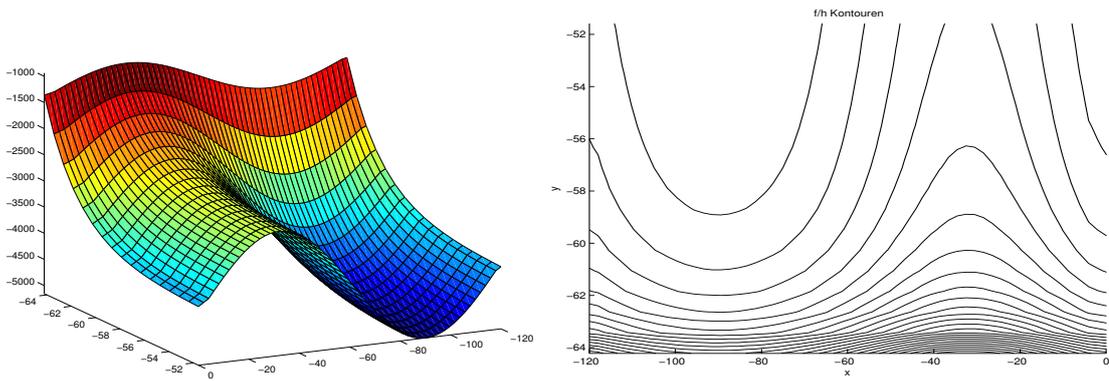


Abbildung 5.12: **Links:** Topographie im Kanal mit einer Amplitude von  $ch = 1200 \text{ m}$ . **Rechts:** Darstellung der entsprechenden geostrophischen ( $f/h$ ) Konturen.

**Testen des Modells mit einem einfachen Kanalmodell**

Leider sind die Läufe mit den realen Windfeldern und dem stochastischen Windfeld für das Modell mit realistischer Topographie zu kurz, um den Einfluss barokliner Effekte auf den Transport zu sehen. Aus diesem Grund soll nun ein kleineres Kanalmodell verwendet werden, um den Zusammenhang zwischen Windantrieb und Kanaltransport zu untersuchen.

In Anlehnung an die Aussage von Hughes et al. (1999) [32] wird die Topographie so gewählt, dass ein Teil der  $f/h$ -Konturen am südlichen Rand nicht blockiert wird. Um den antarktischen Kontinentalschelf zu simulieren, steige die Topographie an diesem Rand exponentiell an. Insgesamt folgt die Topographie dabei der Funktion

$$h(x, y) = (h_0 + ch \cdot \sin(\frac{x}{L} 2\pi)) \cdot (1 - e^{-5y/B})$$

mit der Breite  $B$  und Länge  $L$  des Kanales. Diese ist in Abb. 5.12 zusammen mit den geostrophischen  $f/h$ -Konturen dargestellt.

Der Wind wehe nur in zentraler Richtung mit einem mittleren Profil

$$\tau_x(y) = \tau_0 \cdot \sin^4(\frac{y}{\pi} B)$$

und der Amplitude  $\tau_0 = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Um dieses mittlere Feld zeitlich zu modulieren, wird es mit einem AR-Prozess erster Ordnung multipliziert der Art

$$r(t) = 1 + \alpha(r(t - \Delta t) - 1) + Z(t)$$

mit dem weißen Rauschen  $Z(t)$ , das eine Zufallszahl darstellt, die auf dem Intervall  $[-0.2, 0.2]$  gleichverteilt ist, und  $\alpha = 0.98$ . Somit schwankt der Wind im Kanal an allen Orten identisch.

Weiterhin werde nur ein baroklines Moment verwendet, und die Topographie habe eine Amplitude von  $ch =$

$1500 \text{ m}$ . Die turbulenten Austauschkoefizienten nehmen die Werte  $A_h = 3 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $K_h = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$  an, und die Stabilitätsfrequenz betrage schließlich im baroklinen Fall  $N = 0.002 \text{ s}^{-1}$ .

Zunächst werden mit diesem Modell die Spinup-Prozesse durchgeführt, woraus die Konstanten für das lineare Modell mit dem Verfahren des letzten Abschnittes und Gleichung (5.7) bestimmt werden können. Die stationären Felder der Stromfunktion sind in Abb. 5.13 zu sehen, wobei im baroklinen Fall eine zonalere Struktur mit einem größeren Transport deutlich zu erkennen ist. Für diese Fälle ergeben sich dann folgende Konstanten:

barotrope Zeitkonstante $a^{-1}$ [d]	11
barokline Zeitkonstante $d^{-1}$ [d]	940
barotroper Transport $\Psi_a$ [Sv]	9.4
barokliner Transport $\Psi_d$ [Sv]	37
$\Rightarrow \eta^{-1}$ [d]	320.5

Um nun die Gültigkeit dieses einfachen linearen Modells zu zeigen, werden die Kohärenz und die Phase zwischen dem Windantrieb und dem Transport durch den Kanal betrachtet, wobei beide Größen in Abb. 5.13 zu sehen sind.

Zusätzlich ist die theoretische Phasenbeziehung nach Gleichung (5.9) unter Verwendung der an das numerische Modell angepassten Konstanten durch die rote Linie eingezeichnet. Man erkennt, dass diese Kurve den Verlauf der experimentell (BARBI) bestimmten Phasenbeziehung im Wesentlichen beschreiben kann. Weiterhin zeigen beide Fälle den Übergang von der barotropen in die barokline Zeitskala bei etwa 2-4 Jahren.

Für die kleinen Zeitskalen sind wieder die Anpassungsprobleme des kontinuierlichen Modells an die diskreten

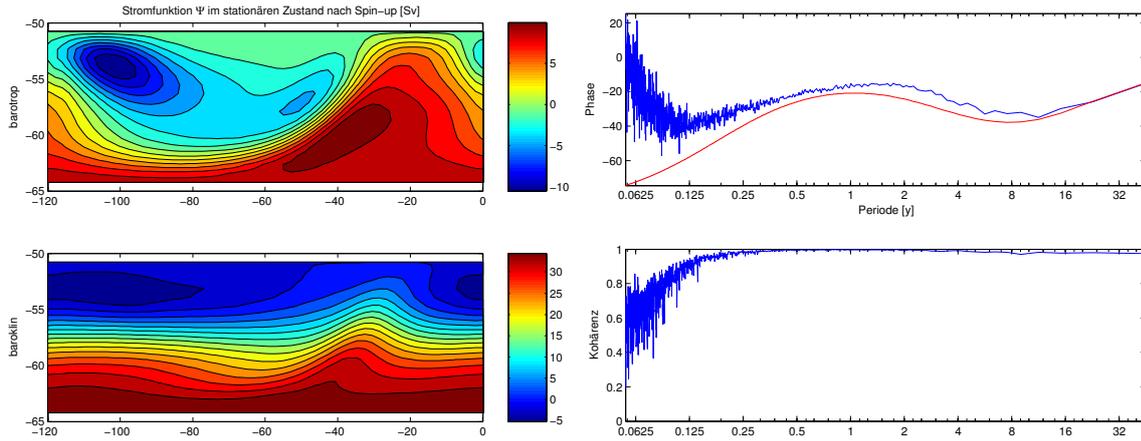


Abbildung 5.13: **Links:** Die Stromfunktion im stationären Zustand am Ende der Spinup-Prozesse für den barotropen und den baroklinen Fall. **Rechts:** Kohärenz und Phasenbeziehung zwischen dem Kanaltransport und dem Windantrieb. Die rote Linie beschreibt die Phase nach dem einfachen linearen Modell mit den angepassten Konstanten.

BARBI-Daten zu erkennen. Aber auch für große Zeitskalen liegt die Kurve etwas unterhalb der 'gemessenen' Kurve, was vermutlich daran liegt, dass die barotrope Zeitkonstante von 11 Tagen etwas zu groß bestimmt wurde, was wieder mit dem Filterprozess zusammenhängen könnte, der die barotropen Rossbywellen herausnehmen soll, die den Spinup-Prozess im barotropen Fall überlagern.

Insgesamt kann das lineare Modell (5.6) trotz dieser Abweichungen die durch den Wind erzeugte Dynamik des Transportes sowohl auf der barotropen als auch auf der baroklinen Zeitskala gut beschreiben.

**Eine kurze Bemerkung** Eigentlich habe ich bei der Anpassung der Konstanten etwas gemogelt. Denn wer sagt eigentlich, dass die barotrope Zeitkonstante im baroklinen Fall  $a_k$  mit der Konstanten im barotropen Fall  $a_t$  gleich ist?

Wie das Beispiel mit den stufenförmigen Windschüben gezeigt hat, ist die Zeitkonstante für den Einschwingvorgang des Transportes im baroklinen Fall um einige Größenordnungen größer als im barotropen Fall ( $N = 0$ ) rechnet. Hätte man nicht eher für  $a_k$  im baroklinen Fall eine solch große Konstante nehmen müssen?

Nun schlägt sich im Einstellungsvorgang des Transportes im baroklinen eben nicht die eigene barotrope Zeitkonstante  $a_k$ , sondern die Einschwingkonstante des baroklinen Feldes der potentiellen Energie nieder. Es scheint also auch im baroklinen Fall sinnvoll zu sein, als barotrope Zeitkonstante  $a_k$  die Konstante zu wählen, die man für  $N = 0$  ermittelt hat - also  $a_k \approx a_t$ .

Der folgende Abschnitt soll dieses Vorgehen noch einmal

untermauern.

### 5.4.4 Ein einfaches baroklines Modell - Variante B

Dieser Abschnitt soll im Wesentlichen das Modell der Variante A um die barotrope Wechselwirkung in der baroklinen Gleichung erweitern und zwei alternative Verfahren zur Bestimmung der Zeitkonstanten vorstellen. Diese Verfahren sollen dann mit synthetischen Daten für das bereits bekannte Kanalmodell des letzten Abschnitts und mit einem barotropen Südlichen Ozean getestet werden.

**Das Modell** Das dynamische lineare Modell der Variante A wird nun um den Term  $c\Psi$  in der Gleichung der potentiellen Energie erweitert, so dass sich ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} + a\Psi &= nF + b\Delta E + Z_\Psi \quad (5.10) \\ \frac{d\Delta E}{dt} + d\Delta E &= mF + c\Psi + Z_E \end{aligned}$$

Somit wird das Anheben und Senken von Dichteflächen beim Überströmen von Topographie explizit mitberücksichtigt. Die Bedeutung der übrigen Terme und Konstanten ist analog zur Variante A.

Zur Anpassung der Konstanten an ein numerisches Modell sollen dieses Mal nicht Spinup-Experimente verwendet werden, da man meiner Ansicht nach auf diese Art nicht alle Konstanten sinnvoll schätzen kann. Stattdessen sollen diese Gleichungen einer Fouriertransformation unterzogen werden, so dass man die Konstanten im Frequenzraum durch

ein 'einfaches' Ausgleichsverfahren bestimmen kann:

$$-i\omega\hat{\Psi} + a\hat{\Psi} = n\hat{F} + b\widehat{\Delta E} \quad (5.11)$$

$$-i\omega\widehat{\Delta E} + d\widehat{\Delta E} = m\hat{F} + c\hat{\Psi} \quad (5.12)$$

Nun zerfallen die Konstanten in diesen Gleichungen in zwei unabhängige Gruppen. Gleichung (5.11) ermöglicht die Bestimmung der Konstanten  $\{a, n, b\}$ , während mit Hilfe von Gleichung (5.12) die Konstanten  $\{d, m, c\}$  bestimmt werden können.

Multipliziert man zunächst Gleichung (5.11) jeweils mit  $\widehat{\Delta E}^*$ ,  $\hat{\Psi}^*$  und  $\hat{F}^*$ , so erhält man die drei Gleichungen:

$$-i\omega K_{\Psi E} + aK_{\Psi E} = nK_{FE} + bA_E$$

$$-i\omega A_{\Psi} + aA_{\Psi} = nK_{F\Psi} + bK_{E\Psi}$$

$$-i\omega K_{\Psi F} + aK_{\Psi F} = nA_F + bK_{EF}$$

wobei  $A_x$  das Autospektrum (oder Spektrum) der Größe  $x$  und  $K_{xy}$  das Kreuzspektrum der Größen  $x$  und  $y$  bezeichnen ( $E$  steht hier für  $\Delta E$ ). Diese Gleichungen sind in der Regel komplex, so dass man eigentlich 6 Gleichungen vor sich hat: 3 für die Realteile und 3 für die Imaginärteile.

Die in diesen Gleichungen auftretenden Spektren lassen sich aus den drei diskreten Zeitreihen  $\Psi(t_i)$ ,  $\Delta E(t_i)$  und  $F(t_i)$  bestimmen, so dass man diskrete Spektren der Frequenzen  $f_i$  bekommt<sup>14</sup>. Bestehen diese Spektren je nach Länge der Zeitreihen aus  $N$  Datenpunkten, so hat man insgesamt ein  $6 \cdot N$  - dimensionales Gleichungssystem bzw. Ausgleichsproblem, zu dem man die Konstanten  $\{a, n, b\}$  bestimmen kann. Dieses Gleichungssystem lässt sich folgendermaßen aufschreiben, wenn man im Hinterkopf hat, dass die Spektren nun Spaltenvektoren sind:

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{g}_1$$

mit

$$\mathbf{M}_1 := \begin{pmatrix} Re(K_{\Psi E}) & -Re(K_{FE}) & -A_E \\ Im(K_{\Psi E}) & -Im(K_{FE}) & 0 \\ A_{\Psi} & -Re(K_{FT}) & -Re(K_{E\Psi}) \\ 0 & -Im(K_{FT}) & -Im(K_{E\Psi}) \\ Re(K_{\Psi E}) & -A_F & -Re(K_{EF}) \\ Im(K_{\Psi E}) & 0 & -Im(K_{EF}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} a \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_1 := \omega \begin{pmatrix} Re(iK_{\Psi E}) \\ Im(iK_{\Psi E}) \\ 0 \\ A_{\Psi} \\ Re(iK_{\Psi F}) \\ Im(iK_{\Psi F}) \end{pmatrix}$$

Um die Konstanten  $\{d, m, c\}$  zu bestimmen, wird analog mit Gleichung (5.12) verfahren, was ergibt:

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{g}_2$$

mit

$$\mathbf{M}_2 := \begin{pmatrix} A_E & -Re(K_{FE}) & -Re(K_{\Psi E}) \\ 0 & -Im(K_{FE}) & -Im(K_{\Psi E}) \\ -Re(K_{E\Psi}) & -Re(K_{FT}) & -A_{\Psi} \\ -Im(K_{E\Psi}) & -Im(K_{FT}) & 0 \\ Re(K_{EF}) & -A_F & -Re(K_{TF}) \\ Im(K_{EF}) & 0 & -Im(K_{\Psi F}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} d \\ m \\ c \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_2 := \omega \begin{pmatrix} 0 \\ A_E \\ Re(iK_{E\Psi}) \\ Im(iK_{E\Psi}) \\ Re(iK_{EF}) \\ Im(iK_{EF}) \end{pmatrix}$$

Eine Lösung dieser Gleichungssysteme im Sinne einer Least-Squares-Näherung ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{x}_{min} = inv(\mathbf{M}'\mathbf{M})\mathbf{M}'\mathbf{g}$$

Nachdem nun diese Konstanten im Prinzip bestimmt sind, erfolgt nun die Herleitung einiger Beziehungen. Dabei soll zunächst das volle Modell und in einem zweiten Schritt das reduzierte barotrope Modell ohne die Wechselwirkungen zwischen der Stromfunktion und der potentiellen Energie betrachtet werden.

Durch Umformen der Gleichungen (5.11) und (5.12) erhält man eine Beziehung zwischen der Fouriertransformierten des Windes und des Transportes:

$$\hat{\Psi} = \frac{nd + bm - n\omega i}{(ad - bc - \omega^2) - \omega(a + d)i} \hat{F} \quad (5.13)$$

Aus dieser Gleichung folgt dann eine Beziehung zwischen den Autospektren des Windes und des Transportes

$$A_{\Psi} = \frac{(nd + bm)^2 + n^2\omega^2}{(ad - bc - \omega^2)^2 + \omega^2(a + d)^2} A_F \quad (5.14)$$

<sup>14</sup>Die in dieser Arbeit verwendete Spektralanalyse arbeitet mit den Frequenzen  $f = \omega/(2\pi)$ , so dass man ein bisschen aufpassen muss.

womit sich die Transferfunktion  $\Phi(\omega)$ , die über die Beziehung  $A_T = \Phi A_F$  definiert ist, angeben lässt:

$$\Phi(\omega) = \frac{(nd + bm)^2 + n^2\omega^2}{(ad - bc - \omega^2)^2 + \omega^2(a + d)^2} \quad (5.15)$$

Mit Hilfe dieser Transferfunktion lässt sich beschreiben, welche Anteile des Windspektrums in das Transportspektrum übergehen und welche Anteile unterdrückt werden. Insbesondere lassen sich gut systembedingte Resonanzprozesse sichtbar machen.

Weiterhin ergibt sich aus Gleichung (5.13) das Kreuzspektrum zwischen dem Transport und dem Windantrieb:

$$\hat{\Psi}\hat{F}^* = \left[ \frac{\lambda(\eta - \omega^2) + n\omega^2(a + d)}{(\eta - \omega^2)^2 + \omega^2(a + d)^2} + \frac{\lambda\omega(a + d) - n\omega(\eta - \omega^2)}{(\eta - \omega^2)^2 + \omega^2(a + d)^2} i \right] A_F$$

mit  $\eta := ad - bc$  und  $\lambda := nd + bm$ , so dass die Phasenbeziehung gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan \left( \frac{\frac{\lambda\omega(a+d) - n\omega(\eta - \omega^2)}{(\eta - \omega^2)^2 + \omega^2(a+d)^2}}{\frac{\lambda(\eta - \omega^2) + n\omega^2(a+d)}{(\eta - \omega^2)^2 + \omega^2(a+d)^2}} \right) \\ &= \arctan \left( \frac{\lambda\omega(a + d) - n\omega(\eta - \omega^2)}{\lambda(\eta - \omega^2) + n\omega^2(a + d)} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Das barotrope Modell ergibt sich, wenn man die Wechselwirkungen mit der potentiellen Energie außer Betracht lässt. Dieses ist gleichbedeutend mit dem Nullsetzen der Konstanten  $b$  und der Konzentration auf Gleichung (5.11). In diesem Fall ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \frac{n}{a - \omega i} \hat{F} \\ A_\Psi &= \frac{n^2}{a^2 + \omega^2} A_F \\ \Phi(\omega)_{trop} &= \frac{n^2}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Im barotropen Fall lautet das Kreuzspektrum

$$\hat{\Psi}\hat{F}^* = \left( \frac{na}{a^2 + \omega^2} + \frac{n\omega}{a^2 + \omega^2} i \right) A_F$$

und die Phase ergibt sich dann zu:

$$\phi(\omega)_{trop} = \arctan \left( \frac{\omega}{a} \right) \quad (5.17)$$

Neben diesem linearen Verfahren, die Konstanten zu bestimmen, gibt es aber noch eine weitere Möglichkeit. Anstatt das lineare Gleichungssystem zu lösen, könnte man auch versuchen die Konstanten so zu bestimmen, dass die theoretische Phasenbeziehung  $\phi_{theo}(\omega) = \arctan(\dots)$  mit der experimentell bestimmten Phase  $\phi_{exp}(\omega)$  möglichst gut übereinstimmt. Möglichst gut könnte hier wieder im Sinne

einer Least-Squares-Lösung gemeint sein, so dass es also das nichtlineare Funktional

$$F(a, n, b, d, m, c) := \|\phi_{theo}(\omega) - \phi_{exp}(\omega)\| \quad (5.18)$$

zu minimieren gilt. Matlab stellt für diesen Zweck die Routine *fminsearch* zur Verfügung, die auf dem Simplexalgorithmus von Nelder und Mead beruht. Als Startwerte könnten die Konstanten aus dem linearen Verfahren verwendet werden.

**Testen des Verfahrens mit synthetischen Daten** Um die Umsetzung des Modells und das Verfahren zur Bestimmung der Konstanten zu testen, soll das Verfahren zunächst auf synthetische Daten angewendet werden.

Zunächst wird ein barotropes Beispiel betrachtet. Zur Anpassung der Konstanten an die Modelldaten wird hier nicht das volle barokline Modell, sondern die reduzierte barotrope Version verwendet, die den Parameter  $b = 0$  setzt und nur die barotrope Gleichung  $\frac{d\Psi}{dt} + a\Psi = nF$  betrachtet.

Um konsistente Daten zu erzeugen, wird zunächst ein normalverteilter Zufallsvektor  $\Psi$  vorgegeben. Danach wird aus  $\Psi$  mittels der Approximation  $\frac{d\Psi}{dt} \approx (\Psi_{i+1} - \Psi_i)/\Delta t$  die zeitliche Ableitung berechnet, so dass sich schließlich das Forcing durch  $F = (\frac{d\Psi}{dt} + a\Psi)/n$  berechnen lässt. Der Zeitschritt  $\Delta t$  wird im Folgenden variiert und der Vektor  $\Psi$  umfasst 100.000 Punkte, so dass man die Anzahl der Teilintervalle<sup>15</sup> zur Berechnung der Spektren hoch wählen kann.

Wie schon für die realen Wind, wird auch hier sowohl die kontinuierliche Phasenbeziehung nach Gleichung (5.17) als auch die diskrete nach Gleichung (5.5) betrachtet.

Die folgende Tabelle enthält die rekonstruierten Konstanten für drei Zeitschritte  $\Delta t$ , wobei als Ausgangskonstanten  $a = 1/8 = 0.125$  und  $n = 100$  gewählt wurden.

$\Delta t$	$a^{-1}$	$n$
4	2.63	101.26
40	6.57	101.26
400	7.75	101.27

Für die Zeitschritte  $\Delta t = 4$  und  $\Delta t = 400$  zeigt Abb. 5.14 die Phasenbeziehungen und die Kohärenzen, wobei zur Berechnung der theoretischen Phasenbeziehungen die rekonstruierten Konstanten  $a$  und  $n$  verwendet wurden.

Für kleine Perioden stimmt die experimentell bestimmte Phasenbeziehung (BARBI) eher mit der diskreten Phasen-

<sup>15</sup>Bei der Berechnung der Spektrum wird die Zeitreihe in Teilintervalle unterteilt. Details werden im Anhang beschrieben.

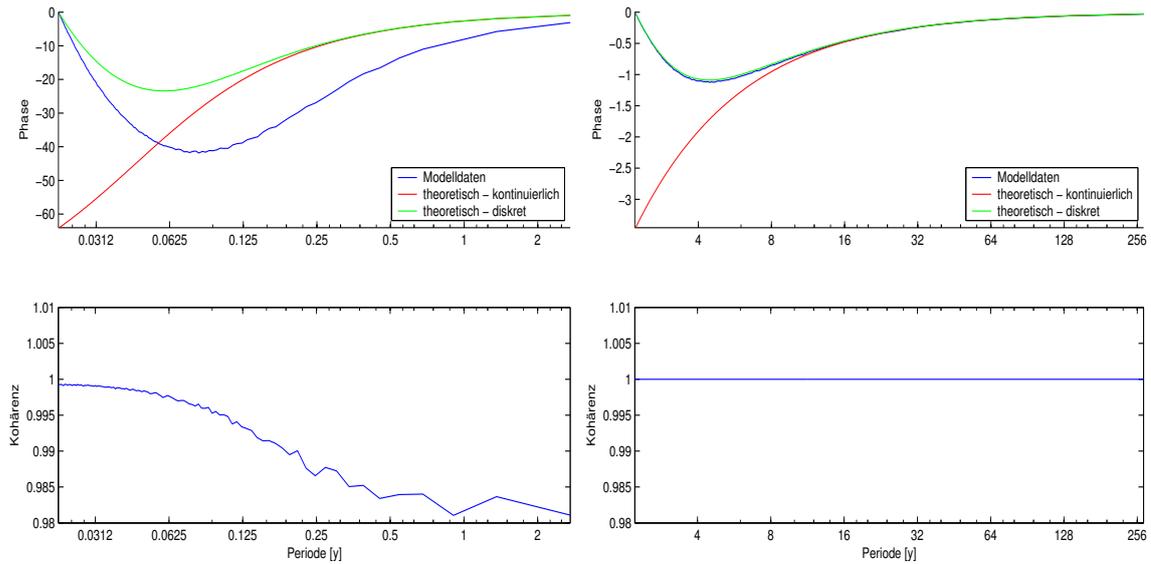


Abbildung 5.14: **Links:** Phasenbeziehung und Kohärenz für das barotrope Modell mit synthetischen Daten und einem Zeitschritt von  $\Delta t = 4$ . **Rechts:** Wie links, nur mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 400$ .

beziehung übereinstimmt, wobei für lange Perioden die Unterschiede zwischen diskreter und kontinuierlicher Phasenbeziehung verschwinden. Man kann weiterhin sowohl an dieser Tabelle als auch an der Abbildung erkennen, dass für eine gute Rekonstruktion der Zeitkonstanten die Zeitreihen sehr lang sein sollten, um viele Informationen bei größeren Perioden zu bekommen. Dieser Umstand ergibt sich aus der dem linearen Verfahren zu Grunde liegenden Annahme kontinuierlicher Ableitungen.

Damit stellt sich einem aber die Frage, was zu tun ist, wenn die zur Verfügung stehenden Zeitreihen nicht lang genug sind, um die Konstanten gut zu schätzen. In diesem Fall würde die Abweichung von den Daten bei kurzen Perioden dominieren, und es bestünde die Gefahr, dass die Konstanten schlecht bestimmt werden.

Um dieses Problem zu lösen, kann man die niederfrequenten Anteile (große Perioden) stärker gewichten. Ein sehr einfacher Weg, dieses zu tun, ist die Daten mit einer Stufenfunktion so zu multiplizieren, dass die erwünschten niederfrequenten Anteile erhalten bleiben und die hochfrequenten Anteile ausgeblendet bzw. gleich Null gesetzt werden.

Die Ergebnisse der Methode sind in der folgenden Tabelle und in der Abbildung 5.15 zu sehen, wobei als Ausgangskonstanten wieder  $a = 1/8 = 0.125$  und  $n = 100$  gewählt wurden.

Anteil	$a^{-1}$	$n$
0.90	2.7	108.6
0.50	4.3	107.9
0.25	6.4	102.9
0.10	7.6	100.5

Dabei bezeichnet die Größe Anteil den Prozentsatz an Datenpunkten des niederfrequenten Bereiches, den man noch zur Bestimmung der Konstanten verwendet hat. Ein Anteil von 100% bzw 1 würde also bedeuten, dass man alle Daten verwendet hat, während ein Anteil von 10% bzw. 0.1 nur die sehr niederfrequenten Daten berücksichtigt.

Wie sowohl an dieser Tabelle als auch an den Abbildungen zu erkennen ist, kann die Rekonstruktion der Zeitkonstanten deutlich verbessert werden, wenn man nicht alle Daten zur Rekonstruktion verwendet.

Es stellt sich nun die Frage, ob ähnliche Resultate im baroklinen Fall zu finden sind. Da die Modellgleichungen, was ihre Konstanten betrifft, unabhängig sind, reicht es, sich auf eine der beiden Gleichungen zu beschränken, um die entsprechenden drei Konstanten anzupassen. Betrachten wir also die zweite Gleichung  $\frac{dE}{dt} + dE = mF + cT$ .

Um konsistente Daten zu erzeugen, werden zunächst zwei normalverteilte Zufallsvektoren  $\Psi$  und  $E$  und die Konstanten  $\{d, c, m\}$  vorgegeben. Dann wird aus  $E$  mittels der Approximation  $\frac{dE}{dt} \approx (E_{i+1} - E_i)/\Delta t$  die zeitliche Ableitung berechnet. Schließlich ergibt sich dann das Forcing durch  $F = (\frac{dE}{dt} + dE - cT)/m$ .

Die folgende Tabelle enthält die mit Hilfe des linearen

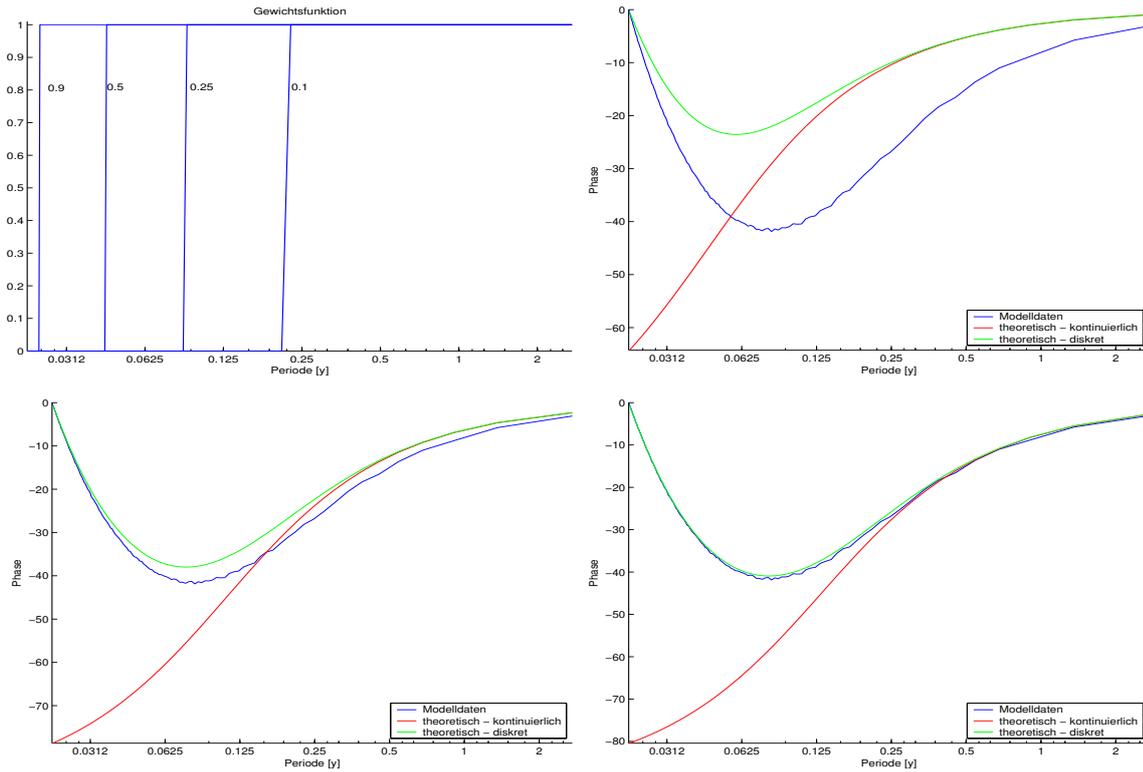


Abbildung 5.15: Diese Abbildung soll das Verfahren veranschaulichen, bei dem man zur Rekonstruktion der Konstanten nur einen gewissen Anteil des niederfrequenten Spektrums berücksichtigt. **Obere Reihe links:** Stufenfunktionen für verschiedene Anteile. **Obere Reihe rechts:** Der Anteil beträgt 90%. **Untere Reihe links:** Anteil 25%. **Untere Reihe rechts:** Anteil 10%.

Ausgleichsverfahren rekonstruierten Konstanten für drei Zeitschritte  $\Delta t$ , wobei als Ausgangskonstanten  $d^{-1} = 800$ ,  $c = 5$  und  $m = 100$  gewählt wurden.

$\Delta t$	$d^{-1}$	$c$	$m$
40	37.3	5.06	101.3
400	258.4	5.12	102.4
10000	724.6	5.13	102.5

Diese Tabelle zeigt, dass man analog zum barotropen Fall zur Bestimmung der inversen Zeitkonstanten  $d$  sehr lange Zeitreihen benötigt. Diese Voraussetzung scheint jedoch für die Konstanten  $c$  und  $m$  nicht zu gelten, die sich auch für kleine Zeitschritte gut rekonstruieren lassen.

Insgesamt zeigt dieses Beispiel synthetischer Daten, dass man das lineare Ausgleichsverfahren nur mit Einschränkungen auf BARBI-Experimente mit realistischem Wind und Topographie anwenden kann, um die barotropen oder gar die baroklinen Zeitkonstanten adäquat zu bestimmen. Da die barotrope Zeitkonstante bedeutend kleiner ist, dürfte man in diesem Fall eher eine Chance haben, die sich durch Ausblenden der hochfrequenten Anteile erhöhen dürfte.

### Testen des Modells mit einem einfachen Kanalmodell

Wie angekündigt soll nun wieder ein Kanalmodell verwendet werden, um das erweiterte dynamische Modell und die Verfahren zur Bestimmung der Konstanten zu testen.

Dabei wird dasselbe Kanalmodell und dieselben Modellparameter wie im letzten Abschnitt verwendet, wobei seine Topographie in Abb. 5.12 und die Spinup-Felder der Stromfunktion im baroklinen bzw. barotropen Fall in Abb. 5.13 zu sehen sind. Weiterhin soll im Folgenden sowohl der einfachere barotrope als auch der komplexere barokline Fall betrachtet werden.

Kommen wir zunächst zum barotropen Kanal. Die barotrope Zeitkonstante wurde ja bereits mit Hilfe von Spinup-Prozessen zu  $1/a = 11d$  bestimmt. Dieses Ergebnis soll nun mit Hilfe des linearen Ausgleichsverfahrens überprüft werden, wobei die Resultate in der folgenden Tabelle zu sehen sind.

Anteil	$a^{-1}$ [d]	$n$ [m]
1.00	8.6	$1.09 \cdot 10^{10}$
0.50	8.7	$1.08 \cdot 10^{10}$
0.10	7.82	$1.20 \cdot 10^{10}$
Spin-up	11	

Vergleicht man die Zeitkonstante des Spinup-Prozesses mit der des linearen Ausgleichsverfahrens, so fällt auf, dass beide zwar von derselben Größenordnung sind, die Konstante aus dem Spinup-Prozess aber größer geschätzt wird. Auch wenn ein größerer hochfrequenter Daten-Anteil ausgeblendet wird, verändert sich das Ergebnis nur wenig (etwa 10%). Es ist somit durchaus möglich, dass die Filterung der Rossbywellen mit Hilfe des Gausschen Tiefpassfilters den Wert der Zeitkonstanten im Falle des Spinup-Prozesses beeinflusst.

Um nun die Gültigkeit des einfachen barotropen Modells zu zeigen, werden mit Hilfe der bestimmten Konstanten  $a$  und  $n$  die Phase, die Transferfunktion und das Transportspektrum, das sich mit Hilfe der Transferfunktion aus dem Windspektrum berechnet, betrachtet. Diese sind in Abb. 5.16 zu sehen sind. Man beachte, dass hier die Phase  $\phi_{F\Psi}$ , und nicht wie oben angegeben  $\phi_{\Psi F}$ , dargestellt ist.

Wie schon weiter vorne gezeigt, nähert sich die Kurve der theoretisch berechneten Phasen der experimentell (BARBI) bestimmten ab einer Periode von ca. 0.25 – 0.5 Jahren an, während für kleinere Perioden (auch für die diskrete Phasenkurve) starke Abweichungen zu sehen sind. Diese sind vermutlich auf Störeffekte barotroper Rossbywellen zurückzuführen.

Analog zur Phase nähert sich die Kohärenz für die BARBI-Daten ab einer Periode von 0.5 Jahren dem Wert 1, was bedeutet, dass eine lineare Beziehung zwischen dem Windantrieb und dem Kanaltransport durchaus möglich ist.

Bei Betrachtung der Spektren fällt auf, dass man mit Hilfe der Transferfunktion das Transportspektrum gut aus dem Windspektrum rekonstruieren kann. Interessanterweise sind die Abweichungen hier für kleine Perioden unterhalb von 0.25 Jahren nicht so gravierend wie im Falle der Phase.

Kommen wir nun zum baroklinen Kanal und der Frage, ob die Verfahren auch hier gut funktionieren, wobei dieses Mal auch das nichtlineare Verfahren verwendet werden soll.

Anhand der rekonstruierten Phasenkurven sollen die Ver-

fahren wieder beurteilt werden. Diese sieht man in Abb. 5.17. In Tabelle 5.2 (siehe Ende des Kapitels) sind die rekonstruierten Konstanten für verschiedene Anteile niederfrequenter Daten aufgelistet.

Betrachtet man zunächst die Abbildung, so fällt auf, dass das lineare Verfahren zwar grob die Form der experimentellen Kurve widerspiegelt, der genaue Verlauf aber nicht getroffen wird. Dies gilt sowohl für einen Anteil von 40% (linkes Bild) als auch für einen Anteil von 20% (rechtes Bild). Dieses schlägt sich auch in den vermutlich zu hoch bestimmten barotropen Zeitkonstanten von etwa 40 Tagen nieder, die man in der Tabelle finden kann.

Wesentlich besser funktioniert das nichtlineare Ausgleichsverfahren. Für einen Anteil von 40% wird zumindest die barotrope Zeitkonstante adäquat geschätzt, während die barokline deutlich zu klein sein sollte (siehe Tabelle). Verringert sich der Anteil auf 20%, so ist das Ergebnis der Rekonstruktion nach meiner Einschätzung ziemlich gut. Welches nun die richtigen Zeitkonstanten sind, vermag ich nicht ganz eindeutig zu sagen. Die Wahrheit dürfte wohl bei  $a \approx 9 d$  und  $d \approx 1000 d$  liegen.

Kommen wir auf die am Ende des letzten Abschnittes aufgeworfene Problematik, ob man aus einem barotropen Spinup-Prozess die barotrope Konstante  $a$  für einen baroklinen Lauf nehmen kann. Anhand der Ergebnisse des nichtlinearen Verfahrens kann dieses Vorgehen bestätigt werden, da man mit Hilfe der Spinup-Prozesse zumindest die Größenordnung richtig beschreiben kann.

Es bleibt weiterhin die Frage, in welchem Fehlerintervall die rekonstruierten Zeitkonstanten liegen könnten, die etwa aus dem nichtlinearen Ausgleichsproblem resultieren. Zu seiner Bestimmung möchte ich folgende Methode verwenden: *Hat man einmal die Konstanten (ab hier als Referenzkonstanten  $x_0$  bezeichnet) bestimmt, so lässt sich die theoretische Phasenbeziehung zwischen dem Kanaltransport und dem Windantrieb nach Gleichung (5.16) berechnen. Um diese Kurve wird dann ein 5-Grad-Schlauch gelegt, der den Bereich der bei der Rekonstruktion möglichen Kurven umfassen soll (siehe Abb. 5.18). Um nun das Fehlerintervall für einen Parameter abzuschätzen, wird dieser Parameter über einen gewissen Bereich um seinen Referenzwert variiert. Als Fehlerintervall wird dann der Bereich verwendet, in dem die resultierenden Phasenkurven innerhalb des 5-Grad-Schlauches liegen.*

In der folgenden Tabelle sind einmal die Resultate eines solchen Verfahrens für die rekonstruierten Konstanten eines baroklinen Kanales mit einem niederfrequenten Anteil von

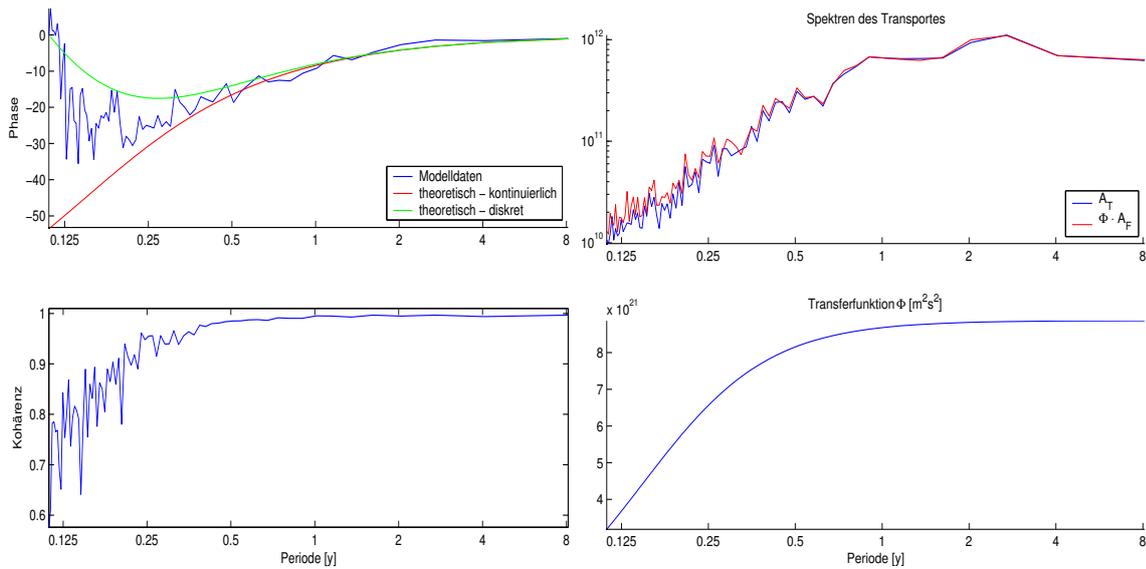


Abbildung 5.16: **Links:** Kohärenz und Phasenbeziehung zwischen dem Kanaltransport und dem Windantrieb für den barotropen Kanal. Die rote Linie beschreibt die Phase nach dem einfachen barotropen Modell mit den angepassten Konstanten. **Rechts:** Die Spektren des Kanaltransportes: blau- das experimentell bestimmte; rot- das mit Hilfe der Transferfunktion aus dem Windspektrum berechnete Transportspektrum.

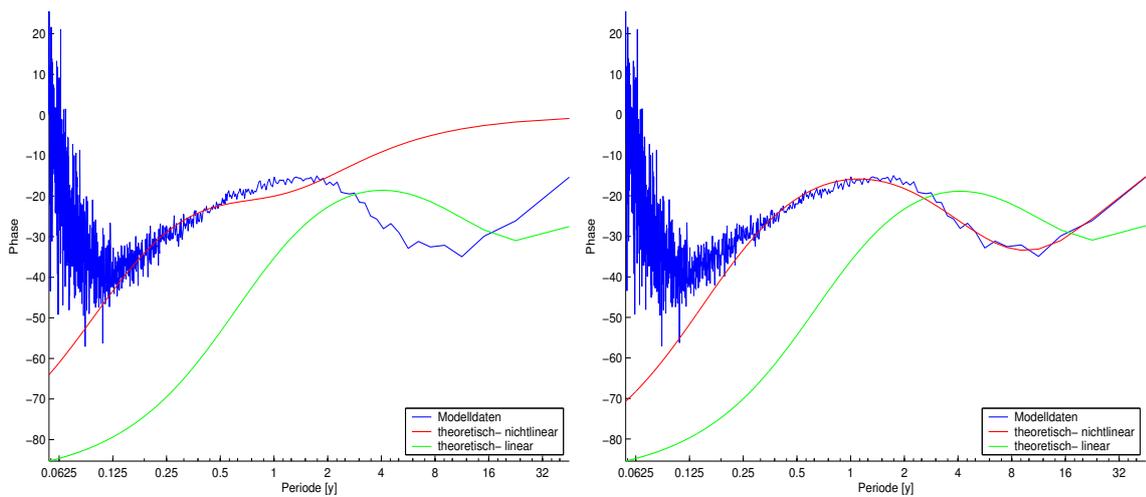


Abbildung 5.17: In dieser Abbildung soll das lineare Verfahren zur Bestimmung der Konstanten mit dem nichtlinearen für einen baroklinen Kanal verglichen werden. **Links:** Der Anteil der berücksichtigten niederfrequenten Daten beträgt 40%. **Rechts:** Hier beträgt der Anteil nur 20%.

10% aufgeführt (siehe Tabelle 5.2).

	$x_{min}$	$x_0$	$x_{max}$
$a^{-1}$ [d]	8.45	9.95	11.6
$d^{-1}$ [d]	500	592	665

Stellt man nun alle drei Verfahren gegenüber, so liefern die Spinup-Prozesse und das Modell der Variante A durchaus gute Ergebnisse. Da mit dem realen Ozean keine Spinup-Prozesse möglich sind, muss man zwangsläufig auf die spektralen Verfahren zurückgreifen, wobei ich also

nach den bisherigen Ergebnissen das nichtlineare Verfahren mit einer Beschränkung auf den niederfrequenten Anteil der Daten bevorzugen würde.<sup>16</sup>

**Barotroper Ozean unter synthetischem Wind** Zum Schluss dieses Abschnittes möchte ich mit Hilfe der vorgestellten spektralen Verfahren versuchen, die barotrope Zeitkonstante zu bestimmen. Wir haben bereits das Gebot von

<sup>16</sup>Fairerweise muss man dazu sagen, dass das lineare Verfahren sinnvolle Startwerte liefern kann.

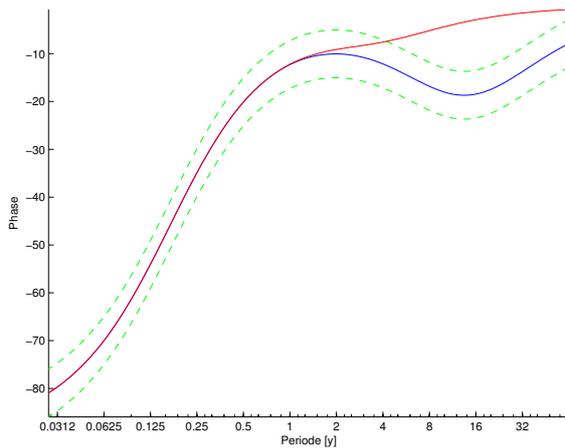


Abbildung 5.18: Veranschaulichung des Prinzips zur Fehlerabschätzung. Die blaue Kurve stellt die Ausgangsphasenbeziehung dar, während die zwei grünen Kurven den 5-Grad-Schlauch beschreiben. Die rote Kurve zeigt eine Beispielkurve, bei der die barokline Zeitkonstante  $d$  verändert wurde.

Wearn und Baker mit 7 Tagen und die Resultate aus den Spinup-Prozessen mit 11.4 Tagen, die vermutlich aufgrund der Einflüsse der Rossbywellen mit Vorsicht zu genießen sind.

Es soll sich hier auf die barotrope Konstante beschränkt werden, da die benötigten Integrationszeiten im baroklinen Fall zu lang wären, und man aufgrund der freien Wahl der Dichteschichtung, die diese Konstante stark beeinflussen dürfte, sowieso kein allgemein gültiges Resultat bekommen würde.

Analog zu den Kanalexperimenten wird ein künstlicher Wind (Typ D2, siehe Einleitung) bestehend aus einem roten Rauschen verwendet, wobei alle Orte im Einklang schwingen. Die meridionale Komponente des Windes wird ausgeschaltet, so dass der Wind nur in zonalen Richtung weht. Die Dichteschichtung betrage also  $N = 0$  und die übrigen Modellparameter seien wie üblich gewählt.

In Abb. 5.19 sind im linken Teil der Transport durch die Drake-Passage bzw. der Windschub an einer ausgewählten (aber beliebigen Stelle, da alle Orte in Phase sind) und im rechten Teil die Phasenbeziehung bzw. die Kohärenz zwischen dem Windschub und dem Transport durch die Drakepassage zu sehen.

Zur Rekonstruktion der Konstanten wurde das barotrope lineare Verfahren verwendet, wobei die hochfrequenten Anteile (Anteil 80%) der Spektren wieder ausgeblendet werden. Die rekonstruierten Konstanten lauten  $a^{-1} = 8.6 d$

und  $n = 4.3 \cdot 10^4 m$ . Das Fehlerintervall dürfte wie für den baroklinen Kanal bei  $\Delta a^{-1} = \pm 1.5 d$  liegen.

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Konstante von Wearn and Baker mit 7 Tagen durchaus sinnvoll gewählt zu sein scheint.

Abschließend soll mit Hilfe dieses Setups auf die Frage nach einem resonanten Mode eingegangen werden, die von Wilbert Weijer aufgeworfen wurde, und die ja schon kurz angerissen wurde.

Um einen solchen resonanten Mode ausfindig zu machen, ist es hilfreich, sich die Transferfunktion (eng. Gain-Function) zwischen dem Windschub (als Ursache) und dem Transport durch die Drakepassage (als Wirkung) anzuschauen. Diese ist im rechten Teilbild der Abb. 5.20 zu sehen, wobei sie mit Hilfe ihres Maximums skaliert wurde.

Im linken Teilbild ist die entsprechende Transferfunktion von Weijer (2005) [67] zu sehen, auf der man für verschiedene Versuchsanordnungen einen deutlichen Resonanzpeak bei einer Periode von etwa 3-6 Tagen erkennt. Die Transferfunktion für das BARBI-Experiment ist im rechten Teilbild zu sehen. Es ist ein Peak bei etwa 4-6 Tagen zu erkennen, der allerdings nicht so scharf ausgeprägt ist wie der in Abb. 7 von Weijer (2005) [67]. Allerdings liegt die hier gefundene 'Resonanzperiode' nahe den 3 Tagen, die von Weijer gefundenen wurden, was die Existenz eines topographischen Modes in diesem BARBI-Experiment vermuten lässt.

Leider zeigt Abbildung 5.11. (rechts oben) eine etwas andere Resonanzperiode (8-12 d), die man den Peaks in der Phasenbeziehung entnehmen kann. Man kann also aufgrund dieses Ergebnisses die Existenz eines solchen Modes in BARBI weder ausschließen noch sicher bestätigen. Möglicherweise gibt es auch ein ganzes Ensemble resonanter Moden, so dass ein klarer Peak gar nicht erst entsteht. Dennoch ist die Frage durchaus interessant und sollte weiter untersucht werden.

## 5.5 Zusammenhang mit dem SAM-Index

Nachdem der Zusammenhang zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Windschub untersucht wurde, soll sich dieser Abschnitt nun der Frage widmen, ob es einen Zusammenhang zwischen dem SAM-Index und dem Transport durch die Drakepassage gibt und wie bedeutend dieser ist.

Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel aus-

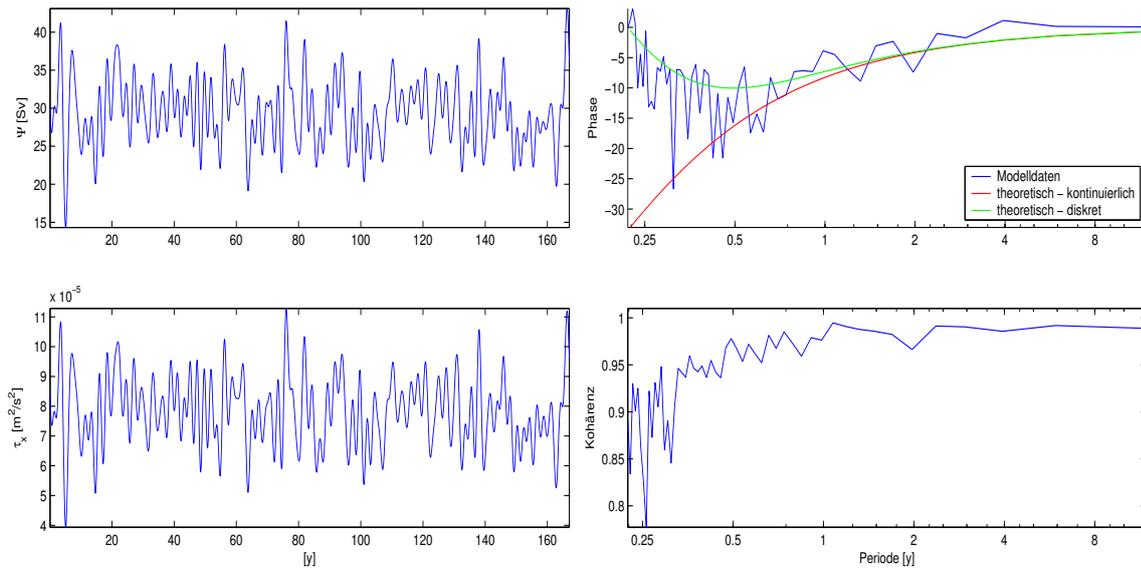


Abbildung 5.19: **Links:** Transport durch die Drakepassage und Verlauf des Windes für den barotropen Ozean mit realer Bodentopographie. **Rechts:** Phase und Kohärenz zwischen dem Transport durch die Drake-Passage und dem Windantrieb.

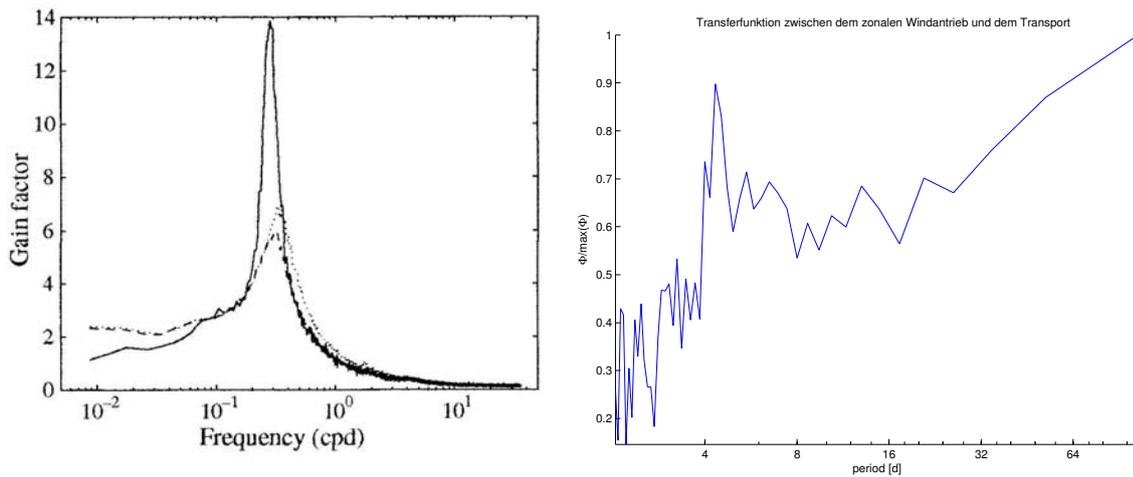


Abbildung 5.20: **Links:** Abbildung 7 aus Weijer (2005) [67], die die Transferfunktion zwischen dem Kanaltransport und der Antriebsfunktion in drei verschiedene Versuchsanordnungen zeigt. **Rechts:** Transferfunktion zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Windschub an einem Ort (Windantrieb D2) für den barotropen Ozean mit realistischer Topographie mit BARBI.

geführt wurde, kann der SAM-Index als ein Maß für die Stärke der westlichen Winde über dem Südlichen Ozean gesehen werden. Es liegt deshalb nahe, dass man einen ähnlichen Zusammenhang zwischen dem SAM-Index und dem Transport finden sollte, wie er zwischen dem mittleren Windschub und dem Transport gegeben ist. Allerdings kann der SAM-Index in BARBI nur über den Wind Einfluss auf den Transport nehmen, da Wärme- bzw. Dichteflüsse in der hier verwendeten BARBI-Version nicht als äußere Antriebe auftreten.

In dieser Arbeit werden drei verschiedene SAM-Indices verwendet, von denen zwei auf gemessenen Druckdaten an einzelnen Stationen beruhen, und die dritte eine großräumige EOF-Analyse von NCEP-Reanalyse Daten verwendet.

**SAM-1** Der erste SAM-Index, der bereits in Abb. 5.6 gezeigt wurde, wird von Gareth Marshall ([www.nerc-bas.ac.uk/icd/gjma/sam.html](http://www.nerc-bas.ac.uk/icd/gjma/sam.html)) zur Verfügung gestellt und basiert auf Druckdaten ab Mitte der 1950er.

**SAM-2** Der zweite Index folgt der Definition von

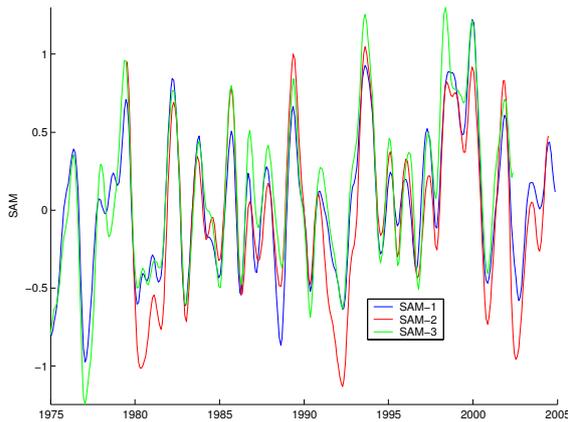


Abbildung 5.21: Darstellung der drei in dieser Arbeit betrachteten SAM-Indices. Die Zeitreihen wurden mit einem Gausschen Tiefpassfilter geglättet.

Thompson and Wallace (siehe z.B. Thompson und Wallace (2000) [61]) und verwendet eine EOF-Analyse der geopotentiellen Höhenanomalie bei 700 hPa südlich von 20°S ab Mitte der 1970er ([www.cpc.ncep.noaa.gov/products/precip/Cwlink/ENSO/verf/new.aao.shtml](http://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/precip/Cwlink/ENSO/verf/new.aao.shtml)).

**SAM-3** Der dritte Index schließlich basiert wieder auf Druckdaten einzelner Stationen und wurde mir von Martin Visbeck zur Verfügung gestellt. Dieser ist zugleich der Index, der in der Zeit am weitesten zurück reicht (ab 1884). Seine Definition wird weiter unten etwas genauer beschrieben.

Abb. 5.21 zeigt eine Zusammenstellung dieser drei Indices. Sie zeigt, dass die Indices im betrachteten Zeitraum im Wesentlichen übereinstimmen. Die Frage, welches die geeignetere Definition ist, soll hier vernachlässigt werden, da die Indices in dem zeitlichen Bereich, in dem man sie vergleichen kann, ein ähnliches Verhalten zeigen.

In diesem Abschnitt sollen zum ersten Mal die Experimente betrachtet werden, die mit dem Windantrieb vom Typ E durchgeführt wurden, für den die Schwankungen des Windschubes identisch mit denen des Sam-3 Indexes sind. Man sollte erwarten, dass das Modell sich unter diesem Antrieb eher im Einklang mit dem SAM Index befindet, als es für die Windantriebe A und B der Fall ist. Es blieb jedoch bisher offen, wie dieser Windantrieb vom Typ E erzeugt wird. Dies möchte ich nun nachholen.

**Erzeugung des Windantriebes vom Typ E mit Hilfe des SAM-3 Indexes** Für die Erzeugung des Windfeldes greife ich auf Daten von Martin Visbeck zurück, die er mir freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat. Dabei handelt es sich zum einen um Messwerte des Druckes auf Meeresspiegelniveau, aufgezeichnet zum Teil seit 1850 in den Breiten des Südlichen Ozeans (die roten und blauen Punkte in Abb. 5.22 geben die Orte der Messstationen wieder), und zum anderen um den daraus abgeleiteten SAM-Index und die Korrelationen mit dem Windfeld<sup>17</sup>.

Der erste Schritt besteht darin, auf der Grundlage dieser Daten einen geeigneten SAM-Index zu definieren. Dazu werden die Stationen zu vier Gruppen zusammengefasst (siehe die grünen Ellipsen in Abb. 5.22). Für jede dieser Gruppen werden die Daten in einer Zeitreihe zusammengefasst und aus dieser dann die zeitliche Anomalie berechnet, so dass insgesamt vier Anomalie-Zeitreihen entstehen. Die drei Zeitreihen der nördlicheren Breiten werden danach zu einer zusammengemittelt und normalisiert. Im letzten Schritt wird dann die normalisierte antarktische Zeitreihe von dieser abgezogen. Der so auf Grundlage von Druckdifferenzen (vergleiche Definition des SAM-Indexes von Gong und Wang (1999) definierte SAM-Index ist monatlich von 1884 bis 2002 gegeben. Er sollte für den nächsten Schritt, die Regression auf das Windfeld, sinnvoller Weise normalisiert werden.

Nachdem nun ein geeigneter SAM-Index gegeben ist, kann ein Windfeld konstruiert werden, das die Struktur des SAM-Indexes widerspiegelt. Dazu setzt man für die zeitliche Anomalie des zonalen Windfeldes an einer Stelle  $(x, y)$  ein lineares Regressionsmodell der Form  $\tau'_x(x, y, t) = a(x, y) \cdot SAM(t)$  an<sup>18</sup>. Sind schließlich die Regressionskoeffizienten an jeder Stelle bestimmt, so erhält man das absolute zonale Windfeld

$$\tau_x(x, y, t) = \bar{\tau}_x(x, y) + a(x, y) \cdot SAM(t) \quad (5.19)$$

Doch wie erhält man die Regressionskoeffizienten  $a(x, y)$ ? Obgleich der SAM-Index bis 1884 zurückgeht, liegen die Winddaten nur ab 1948 (NCEP Reanalyse Win-

<sup>17</sup>Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die Daten für die Antarktis erst ab ca. 1980 vorliegen. Um dennoch konsistente Daten für diese Region ab 1850 zu erhalten, wurde ein Zusammenhang, der zwischen den Daten der Antarktis und den übrigen Regionen nach 1980 gefunden wurde, verwendet, um aus den Daten der übrigen Regionen Daten für die Antarktis vor 1980 zu konstruieren. Dabei wurde voraus gesetzt, dass der gefundene Zusammenhang auch vor 1980 gültig ist.

<sup>18</sup>Der SAM-Index ist über eine meridionale Druckdifferenz definiert, so dass er über Geostrophie den zonalen Wind beeinflusst. Meridionale Winde werden deshalb nicht weiter betrachtet.

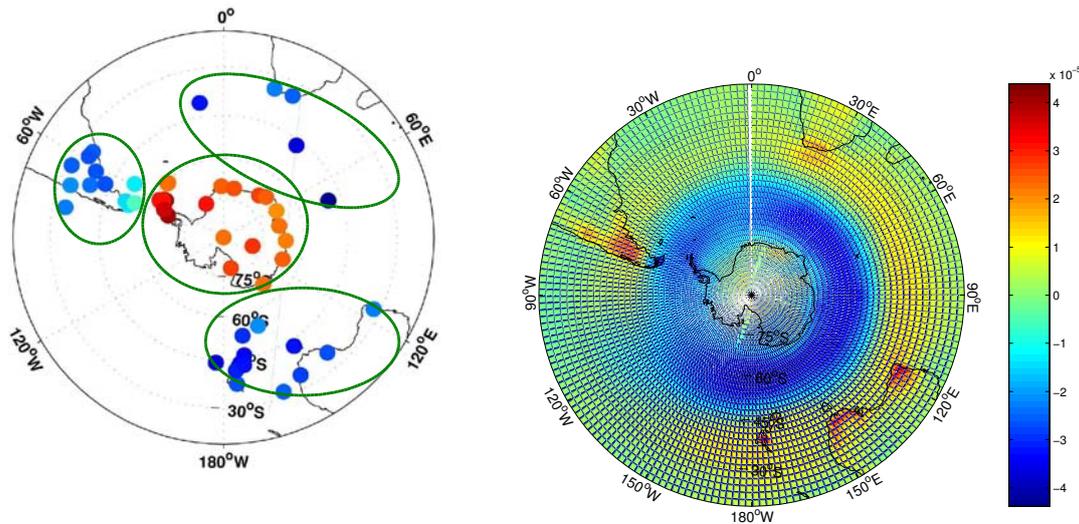


Abbildung 5.22: **Links:** Stationen, an denen Messwerte für SAM-3 Index aufgezeichnet wurden und Art der Zusammenfassung der Stationen. (Zur Verfügung gestellt von Martin Visbeck.) **Rechts:** Lokale Kovarianz zwischen SAM-3 Index und dem zonalen Windstress in  $m^2/s^2$  (nach Division durch  $\rho_0 = 1035 kg/m^3$ ). (Zur Verfügung gestellt von Martin Visbeck.)

de) vor. Aus diesem Grund kann man die  $a(x, y)$  nicht mit dem SAM-Index des gesamten Zeitraumes schätzen, sondern nur ab 1948. Da die Standardabweichung des normalisierten SAM-Index gleich 1 ist, ergibt sich das optimale<sup>19</sup>  $a(x, y)$  als die Kovarianz des Windfeldes an dieser Stelle mit dem SAM-3 Index. Da der SAM-Index keine Einheit besitzt, hat die Kovarianz die Einheit des Windschubes ( $N/m^2$ ). Auf diese Weise erhält man eine weltweite Karte über den Zusammenhang zwischen lokalem zonalen Windschub und SAM-3 Index.

Ich habe die Kovarianzen (siehe Abb. 5.22) von Martin Visbeck übernommen und auf das Modellgitter übertragen. Als mittleren Windstress  $\bar{\tau}_x(x, y)$  habe ich weiterhin den ECMWF Windstress gewählt, der auch schon für die Sensitivitätsstudien verwendet wurde. Um schließlich ein zeitlich langes Windfeld zu erzeugen, wird der SAM-3 Index beginnend ab 1884 verwendet.

**Ergebnisse** Kommen wir nun zu den Ergebnissen dieser Läufe, die hinsichtlich des Transportes durch die Drakepassage ausgewertet werden sollen.

Zunächst kann man die Zeitreihen der verschiedenen SAM-Indices und des Transportes mit dem bloßen Auge betrachten. Für die Experimente mit den Wind-Szenarios A und B sind diese in Abb. 5.6 und für das Wind-Szenario

E in Abb. 5.23 zu sehen.

Aus beiden Abbildungen kann man entnehmen, dass der Verlauf zwischen dem Transport und den entsprechenden SAM-Indices im Wesentlichen synchron ist. Auch für den neuen Windantrieb E kann man gut den ansteigenden Trend im Transport ab Mitte der 1970er erkennen, der ebenso im SAM-3 Index zu finden ist. Abb. 5.23 zeigt aber auch die verschiedenen Phasen seit 1884 mit ansteigendem und fallendem Trend im SAM-Index, die sich im Transport durch die Drakepassage niederschlagen.

Um den Zusammenhang auf quantitative Füße zu stellen, wird die Korrelation ausgerechnet. Betrachtet man zunächst das Experiment mit dem Wind-Szenario B, dann erhält man als Korrelation mit dem SAM-1 Index  $r = 0.55$  und mit dem SAM-2 Index  $r = 0.60$ . Beide sind zwar recht ähnlich, aber noch zu gering. Ein lineares Regressionsmodell für den Transport durch die Drakepassage auf der Grundlage dieser Indices würde nur 36% der beobachteten Varianz beschreiben, was nach meiner Einschätzung nicht viel ist.

Etwas besser sieht die Lage für das Wind-Szenario E aus, das ja extra so konstruiert wurde, dass es den SAM-3 Index gut widerspiegelt. Als Korrelationskoeffizienten kann man der in Abb. 5.24 dargestellten Kreuzkorrelationsfunktion einen Wert von ca.  $r=0.85$  entnehmen. Ein lineares Regressionsmodell würde hier schon etwa 72% der beobachteten Varianz erklären.

<sup>19</sup>Im Sinne einer Least-Squares Lösung.

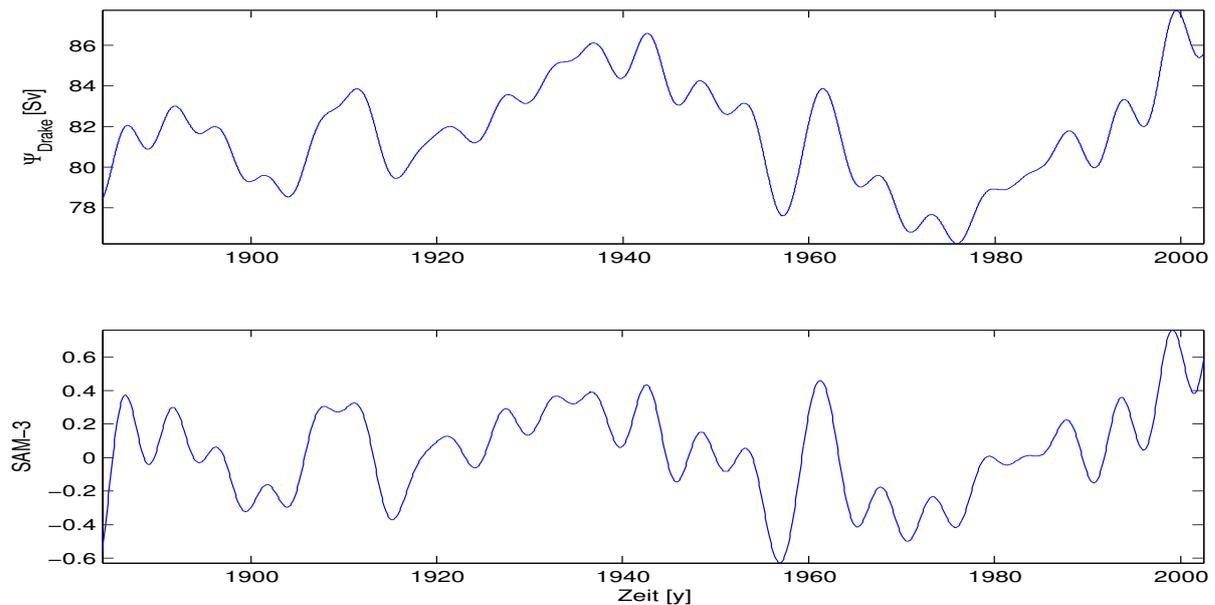


Abbildung 5.23: Transport durch die Drakepassage und SAM-3 Index für das BARBI-Experiment unter dem Wind-Szenario E. Perioden unterhalb von 5 Jahren wurden durch einen Tiefpassfilter unterdrückt.

Der in Abb. 5.24 dargestellten Kreuzkorrelationsfunktion (zur Definition dieser Funktion siehe z.B. Schönwiese (2000) [54]) kann man zusätzlich entnehmen, dass die optimale relative Verschiebung der Zeitreihen zueinander unter einem Monat liegen muss, um die Korrelation zu maximieren.

Wendet man ein lineares Regressionsmodell an, um den Transport (für den Windantrieb B) als Funktion des SAM-Index zu beschreiben, so findet man, dass bei einer Änderung des SAM-Indexes um eine Standardabweichung sich der Transport durch die Drakepassage für den SAM-1 um 5.7 Sv und für den SAM-2 um 6.0 Sv ändert. Hughes et al. (2003) [33] finden zum Vergleich 3.5 Sv, was etwas niedriger ist.

Um die Korrelation auf verschiedenen Zeitskalen zu untersuchen, kann man die Kohärenz zwischen dem Transport und dem SAM-Index betrachten. Da die hier verwendeten SAM-Indices nur als monatliche Werte vorliegen, ist nur das Experiment mit Wind-Szenario E geeignet, die Kohärenz mit dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren (siehe Anhang B.1) zu berechnen, da die übrigen Zeitreihen zu kurz sind.

In Abb. 5.24 sind die Kohärenz und die Phase zwischen dem Transport und dem SAM-3 Index dargestellt. Die Kohärenz ist dabei auf Zeitskalen zwischen 0.5 und 3 Jahren nahe 1. Und auch die Phase verhält sich durchaus so, wie es der letzte Abschnitt zum Zusammenhang mit

dem Windschub allgemein dargelegt hat. Sowohl die Phase als auch die Kohärenz verhalten sich in diesem Bereich so, wie es ein lineares dynamisches Modell mit Windantrieb beschreiben würde.

Auf längeren Zeitskalen (ab 4 Jahren) jedoch sinkt die Kohärenz wieder, und die Phase wird positiv. Den genauen Grund für dieses Verhalten kenne ich nicht, obwohl es sicher sehr interessant wäre, zu wissen, was hier passiert.

Dass es sich hierbei um barokline Prozesse handelt, ist durchaus möglich, aber nicht sicher. Vergleicht man dieses Bild nämlich nochmal mit Abb. 5.13, in der Kohärenz und Phase für einen baroklinen Kanal mit einer Dichteschichtung von  $N = 0.002 \text{ s}^{-1}$  dargestellt sind (hier  $N = 0.0015 \text{ s}^{-1}$ ), so erkennt man, dass der Umschlag in der Phase durchaus mit der baroklinen Zeitskala zusammenfallen könnte. Auch in Abb. 5.13 gibt es einen Umbruch bei etwa 2 Jahren.<sup>20</sup> Allerdings wird die Phase dort wieder negativer und geht nicht über Null hinaus. Auch die Kohärenz bleibt in diesem Fall nahe 1.

Es gäbe noch die Möglichkeit, dass barokline Wellenprozesse die Kohärenz und die Phase stören. Aber es stellt sich auch hier die Frage, warum diese nicht in den Kanalexperimenten zu sehen waren.

Vielleicht liegt es auch an der Erzeugung des Windfeldes, dass man hier ein vom Windschub abweichendes Verhalten finden kann.

<sup>20</sup>In dieser vermutlich etwas früher, da die Dichteschichtung etwas größer ist.

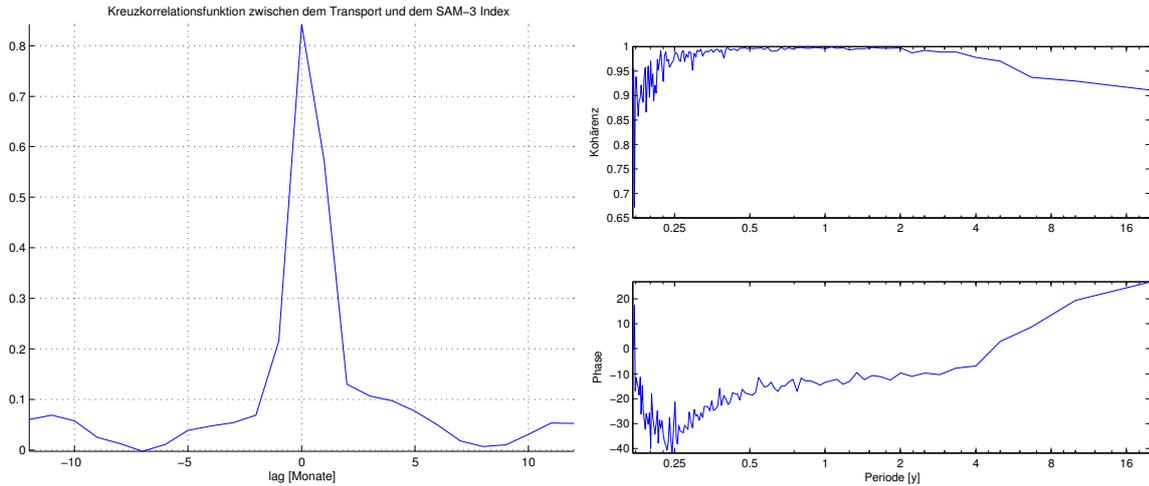


Abbildung 5.24: **Links:** Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem SAM-3 Index für das Wind-Szenario vom Typ D. **Rechts:** Kohärenz und Phase zwischen diesen beiden Zeitreihen.

**Zusammenfassung** Zusammenfassend kann man sagen, dass der Trend im Transport seit Mitte der 1970er sich im SAM-Index widerspiegelt, dass es aber andererseits einen solchen positiven Trend schon früher gegeben haben mag.

Weiterhin gibt es auf einer Zeitskala bis etwa 3 Jahren einen vergleichbaren Zusammenhang zwischen dem SAM-Index und dem Transport, wie es ihn für den Windschub gibt.

Als Regressionsmodell für den Transport durch die Drake-Passage scheinen der SAM-1 und der SAM-2 Index nicht geeignet zu sein. Hier sollte eher der Bodendruck betrachtet werden, was in den folgenden zwei Abschnitten weiter untermauert werden wird.

## 5.6 Die Bedeutung des Bodendruckes und der potentiellen Energie

Es wurde bereits mehrmals erwähnt, dass der Bodendruck entlang des antarktischen Kontinentalschelfes die Schwankungen im Transport durch die Drakepassage gut widerspiegeln sollte. Hierzu hat es einige experimentelle und theoretische Untersuchungen gegeben, die in der Einleitung ebenfalls aufgeführt wurden. Ich möchte nun etwas näher auf diesen Zusammenhang eingehen.

Die entsprechende Korrelationskarte für BARBI ist in Abb. 5.25 noch einmal dargestellt. Zusätzlich sieht man in dieser Abbildung die Korrelationskarte zwischen dem Transport des POCM Modells durch die Drakepassage und der Oberflächenauslenkung, die man u.a. in Hughes et al. (1999) [32] finden kann. Beide Karten zeigen die großen

Korrelationen entlang des Kontinentalschelfes und im Bereich der geostrophischen Konturen, die die Antarktis umschließen. In Bezug auf letztere ist hier besonders das Kerguelen Plateau und der Bereich des Südantillen-Beckens östlich der Drakepassage zu nennen.

Aber warum zeigen die Oberflächenauslenkung des POCM Modells und der Bodendruck in BARBI ein ähnliches Verhalten? Der Bodendruck in BARBI ist gegeben durch  $P := p(z=0) + g \int_{-h}^0 \rho dz$ , wobei der Druck an der Oberfläche in BARBI die Oberflächenauslenkung widerspiegelt:  $p(z=0) = g \rho_0 \eta$ . So gesehen, enthält der Bodendruck ja die Oberflächenauslenkung. Dieser Term scheint auch auf den betrachteten Zeitskalen die Korrelation zu bestimmen, denn der barokline Anteil  $g \int_{-h}^0 \rho dz$  sollte sich auf längeren Zeitskalen verändern.

An diese Beobachtung schließen sich für mich nun zwei Fragen an:

1. Warum ist ausgerechnet der Bodendruck entlang dieser  $f/h$ -Konturen ein gutes Abbild der Schwankungen des Transportes durch die Drakepassage?
2. Gilt das auf allen Zeitskalen?

Betrachtet man nämlich die vertikal integrierte Impulsbilanz

$$\frac{\partial \mathbf{k} \times \psi}{\partial t} - f \nabla \Psi = -h \nabla P - \nabla E + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F},$$

in der die vertikal integrierte Geschwindigkeit durch die Stromfunktion ersetzt wurde, so erkennt man, dass neben dem Gradienten des Bodendruckes und dem

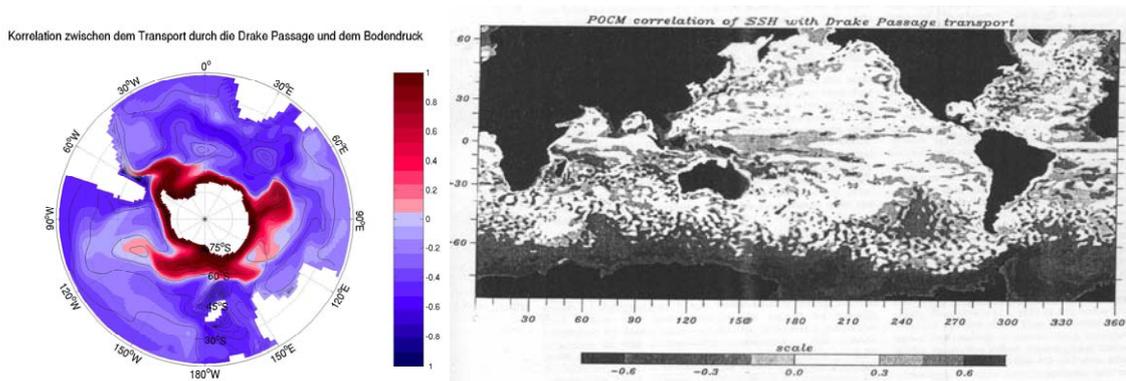


Abbildung 5.25: **Links:** Korrelationskarte zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck im Modellgebiet für den Windantrieb vom Typ A. Zusätzlich sind die geostrophischen Konturen ( $f/h$ ) dargestellt. **Rechts:** Abbildung 15 aus Hughes et al. (1999) [32]. Diese zeigt die Korrelation zwischen dem Modelltransport des POCM Modells durch die Drakepassage und der Oberflächenauslenkung.

Wind auch der Gradient der potentiellen Energie als Antriebsterm erscheint. In ihren Arbeiten zeigen Olbers et al. (2004) [44] oder Borowski et al. (2002) [6], dass im stationären Zustand der Gradient der potentiellen Energie der alles bestimmende Faktor ist. Mit den einfachen linearen dynamischen Modellen der letzten Abschnitte konnte gezeigt werden, dass der Wind auf langen Zeitskalen über den Gradient der potentiellen Energie auf den Transport einwirkt. Während also auf kurzen Zeitskalen der Bodendruck die Schwankungen des Transportes gut beschreibt, sollte für sehr lange Zeitskalen der Gradient der potentiellen Energie die Schwankungen bestimmen. Diese These wird im Folgenden weiter untersucht.

### 5.6.1 Die Bedeutung der $f/h$ -Konturen

Kommen wir nun zur ersten Frage.

**Experimenteller Ansatz** Abb. 5.25 zeigt die Verhältnisse für eine reale Topographie. Doch um die Bedeutung der  $f/h$ -Konturen besser herauszuarbeiten, sollen hier zwei Arten von Kanalexperimenten verwendet werden:

- Die erste Variante verwendet die bekannte Modelltopographie nach Abb. 5.12, bei der die  $f/h$ -Konturen entlang der südlichen Kanalwand nicht blockiert sind.
- Die zweite Variante ist ein flacher Kanal mit einem meridionalen Rücken in Form einer Gaußschen Glockenkurve, dessen Höhe variiert werden kann. Für kleine Rückenhöhen sind die  $f/h$ -Konturen nicht blo-

ckiert, während dieses ab einer gewissen Rückenhöhe der Fall ist.

Die turbulenten Austauschkoefizienten lauten in beiden Varianten  $A_h = 3 \cdot 10^4 m^2/s$ ,  $K_h = 2 \cdot 10^3 m^2/s$  und die Stabilitätsfrequenz nimmt einen Wert von  $N = 0.002 s^{-1}$  an. Als zonales Windfeld wird wieder das rote Rauschen verwendet, wobei dieses Mal der Wind an allen Orten des Kanales unterschiedlich schwingt.

Zunächst wird mit dem zeitlich konstanten mittleren Windfeld die Strömung im Kanal auf einen stationären Wert gebracht. Ist dieser erreicht, so wird das Windfeld mit Hilfe des AR-Prozesses variiert.

Betrachten wir zunächst die erste Variante (siehe Abbildung 5.27), so zeigt sich uns ein ähnliches Bild, wie bei den Telekonnektionen für eine reale Modelltopographie. Insbesondere für den Bodendruck (genauer mit  $-P$ ) sieht man deutlich, dass sich die größten Korrelationen entlang der  $f/h$ -Konturen ergeben. Die Korrelationen werden betragsmäßig geringer in dem Bereich, in dem die  $f/h$ -Konturen blockiert sind. Auch hier zeigt sich also deutlich der Zusammenhang mit den  $f/h$ -Konturen.

Mit Hilfe der zweiten Variante soll dieser Effekt noch einmal genauer studiert werden. Zunächst soll der Rücken mit einer Höhe von 200 m klein sein, so dass die  $f/h$ -Konturen nicht blockiert werden. In der linken Spalte der Abb. 5.26 zeigt sich wieder das bekannte Bild: die Korrelationen mit dem Bodendruck sind an den Orten am größten, an denen die  $f/h$ -Konturen nicht blockiert sind. Gleichzeitig sind die Korrelationen mit der potentiellen Energie eher klein.

Wird nun die Höhe des Rückens vergrößert (1500 m, rechte Spalte in Tabelle 5.26), so werden die  $f/h$ -Konturen vollständig blockiert. Das hat zur Folge, dass die Korrelation mit dem Bodendruck betragsmäßig deutlich kleiner wird. Man kann nun auch nicht mehr sagen, dass es der Bodendruck im Süden des Kanales ist, der die größte Korrelation mit dem Kanaltransport aufweist.

Im Gegenzug vergrößert sich die Korrelation mit der potentiellen Energie und man kann durchaus den Eindruck bekommen, dass die potentielle Energie und der Bodendruck die Rollen tauschen.

Insgesamt legen diese Untersuchungen tatsächlich den Schluss nahe, dass die  $f/h$ -Konturen und insbesondere die Tatsache, dass sie für die reale Topographie um die Antarktis nicht blockiert werden, für die großen Korrelationen des Bodendruckes mit dem Transport durch die Drakepassage verantwortlich sind.

**Theoretischer Ansatz** Auch wenn ich es hier explizit ankündige, so bin ich leider nicht in der Lage, eine theoretische Erklärung für die Bedeutung der  $f/h$ -Konturen im Zusammenhang mit der hohen Korrelation zwischen dem Bodendruck und dem Kanaltransport zu geben, was ich sehr bedauere.

Ich möchte aber auf zwei Arbeiten hinweisen, in denen man einer möglicher Erklärung näher kommt. Die eine ist die bereits mehrmals zitierte Arbeit von Hughes et al. (1999) [32] und die andere ist eine etwas ältere Arbeit von Klaus Hasselmann (1982) [25].

So wie ich es verstanden haben, beinhaltet die gesamte Stromfunktion einen sogenannten 'freien' Anteil, der entlang der  $f/h$ -Konturen unter Vernachlässigung barokliner Effekte nur durch Reibung balanciert ist.<sup>21</sup> Variationen im Windfeld schlagen sich somit unmittelbar in diesem Anteil nieder, der dann die Variabilität der gesamten Stromfunktion dominiert.

## 5.6.2 Die Frage nach den Zeitskalen

Analog zur ersten Frage will ich auch bei der zweiten versuchen, sowohl eine experimentelle als auch eine theoretische Antwort zu geben.

**Experimenteller Ansatz** Betrachten wir zunächst die Experimente mit realistischer Modelltopographie, wobei als antreibende Winde wieder die Szenarien A, B und D1 verwendet werden.

In Abb. 5.28 sind zunächst die Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen dem Transport durch die Drakepassage mit dem Bodendruck im Süden der Drakepassage bzw. mit der Differenz der potentiellen Energie<sup>22</sup> über die Drakepassage dargestellt. Diese wurden so erstellt, dass zunächst von jeder Zeitreihe der lineare Trend abgezogen wurde und danach in zwei Periodenbereichen gefiltert wurde: eine Hochpassfilterung, die Perioden oberhalb von 2 Jahren unterdrückt und eine Tiefpassfilterung, die Perioden unterhalb von 2 Jahren unterdrückt. Zusätzlich sind die Kreuzkorrelationsfunktionen ohne Filterung eingetragen.

Auf den ersten Blick sieht man, dass die Korrelation mit dem Bodendruck unabhängig vom Windantrieb und der zeitlichen Filterung die Korrelation mit der Differenz der potentiellen Energie übersteigt. Betrachtet man weiter den Bodendruck, so liegt das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktionen immer nahe einer Verschiebung von Null. Zumindest für die Szenarien A (oben) und D1 (unten) sinkt das Maximum dieser Funktion, wenn man von den hochpassgefilterten zu den tiefpassgefilterten Zeitreihen übergeht.

Die Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen dem Transport und der potentiellen Energie verhält sich in diesem Fall entgegengesetzt und zwar für alle drei Windantriebe. Hier sieht man den ersten deutlichen Hinweis dafür, dass die Korrelationen mit der potentiellen Energie besser werden, wenn man längere Zeitskalen betrachtet. Man beachte auch, dass das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion durchaus nicht immer bei einer Verschiebung von Null liegt.

Um den Zusammenhang zwischen den genannten Größen in Abhängigkeit der Zeitskala zu untersuchen, wurden die Kohärenzen zwischen dem Transport und dem Bodendruck bzw. zwischen dem Transport und der Differenz der potentiellen Energie für alle Windantriebe berechnet. Diese sind in der rechten Spalte der Abb. 5.28 dargestellt. In allen drei Darstellungen bleibt die Kohärenz mit der po-

<sup>21</sup>Zerlegt man die Stromfunktion durch  $\Psi = \bar{\Psi} + \Psi'$ , so ist dieser freie Anteil  $\Psi'$  gerade der, für den gilt  $J(\Psi', f/h) = 0$ .

<sup>22</sup>Der Schnitt verläuft nicht genau in Nord-Süd-Richtung sondern eher Nordost-Südwest.

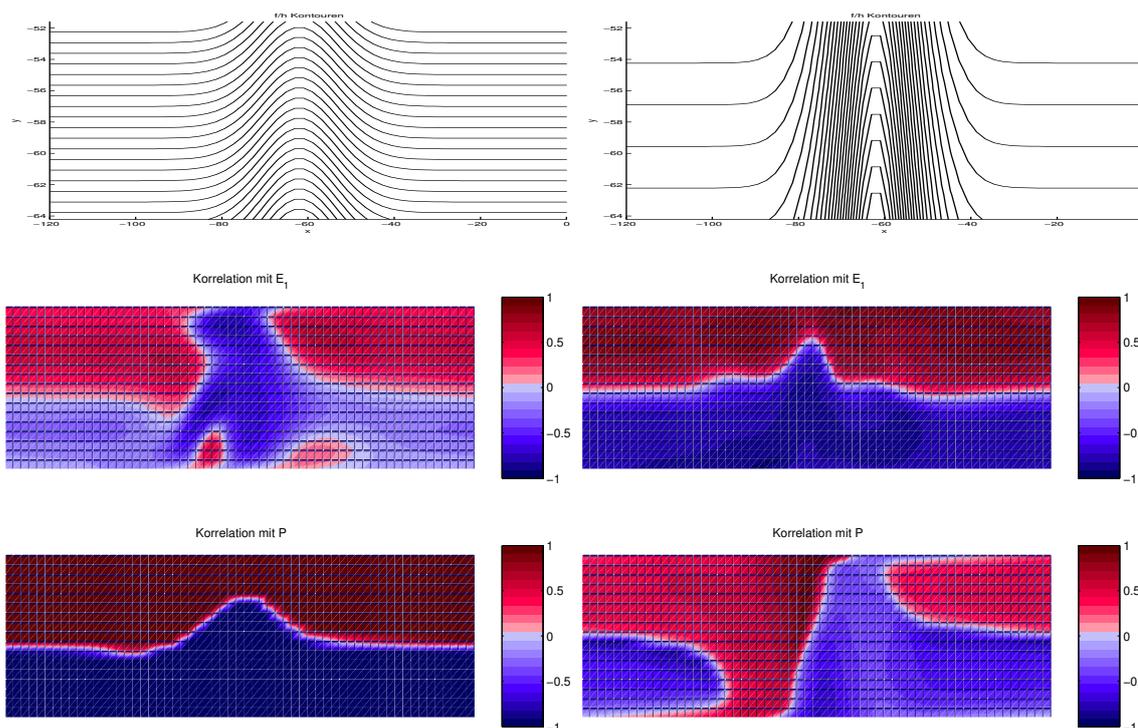


Abbildung 5.26: **Obere Reihe:**  $f/h$ -Konturen. **Untere Reihe:** Korrelationskarten mit dem Kanaltransport für den Gaussschen Rücken und einer Rückenhöhe von 200 m (links) bzw. 1500 m (rechts).

tentiellen Energie unter der des Bodendruckes. Nur im Fall D1 scheint eine Wende möglich.

Leider kann man hier noch keinen Bedeutungswechsel erkennen, was vermutlich daran liegt, dass die drei betrachteten Szenarien nicht lang genug integriert worden sind. Dies gilt leider auch für das Windforcing mit den künstlichen stochastischen Winden vom Typ D1. Hinzu kommt, dass zur Berechnung von Phase und Kohärenz die Zeitreihen in Teilreihen unterteilt werden. Damit die Ergebnisse nicht zu verrauscht sind, muss die Anzahl dieser Teilreihen groß gewählt werden. Ich habe hier 20 Teilstücke gewählt, was zur Folge hat, dass sehr große Perioden nicht mehr untersucht werden können.

Was die Phasenbeziehung betrifft, so sind für diese Perioden der Bodendruck und der Transport bzw. die Differenz der potentiellen Energie und der Transport ohne nennenswerte Phasenverschiebung im Einklang. Nur für den Windantrieb vom Typ D1 wird die Phasenbeziehung mit wachsenden Perioden negativer.

Um Aussagen über einen größeren Zeitraum machen zu können, kann wieder ein Kanalexperiment durchgeführt werden. Als Modelltopographie wird wieder jene nach Abb. 5.12 verwendet. Es gelten dieselben Modellparameter, wobei die Dichteschichtung diese Mal die zwei Werte  $N = 0.002 \text{ s}^{-1}$  und  $N = 0.005 \text{ s}^{-1}$  annehmen soll. Als Wind-

antrieb wird wieder rotes Rauschen verwendet, wobei dieses Mal an jedem Ort die gleiche Schwankung des Windes vorliegt.

In Abb. 5.29 sind die Kohärenz und die Phase zwischen dem Kanaltransport und dem Bodendruck im Süden bzw. zwischen dem Transport und der meridionalen Differenz der potentiellen Energie<sup>23</sup> dargestellt. Im linken Teilbild wurde eine Dichteschichtung von  $N = 0.002 \text{ s}^{-1}$  verwendet, während sie im rechten Bild  $N = 0.005 \text{ s}^{-1}$  beträgt.

Auf beiden Teilbildern erkennt man, dass die Kohärenz mit dem Bodendruck mit zunehmender Periode fällt, während im Gegenzug die Kohärenz mit der potentiellen Energie ansteigt. Der Unterschied zwischen den Bildern liegt nur darin, dass der Anstieg der potentiellen Energie für die stärkere Dichteschichtung früher beginnt. So liegt für die Dichteschichtung von  $N = 0.002 \text{ s}^{-1}$  der Bedeutungswechsel der beiden Kohärenzen bei einer Periode zwischen 16 und 32 Jahren, während dieser für  $N = 0.005 \text{ s}^{-1}$  schon zwischen 4 und 8 Jahren liegt.

Hinsichtlich der Phase lässt sich feststellen, dass die potentielle Energie mit dem Kanaltransport in beiden Abbildungen über den betrachteten Zeitraum ohne größere Abweichungen in Phase ist, während sich die Phase zwischen

<sup>23</sup>Als meridionaler Schnitt wurde derjenige gewählt, der längs des Rückens bei ca.  $x = -30^\circ$  verläuft (siehe Abb. 5.12).

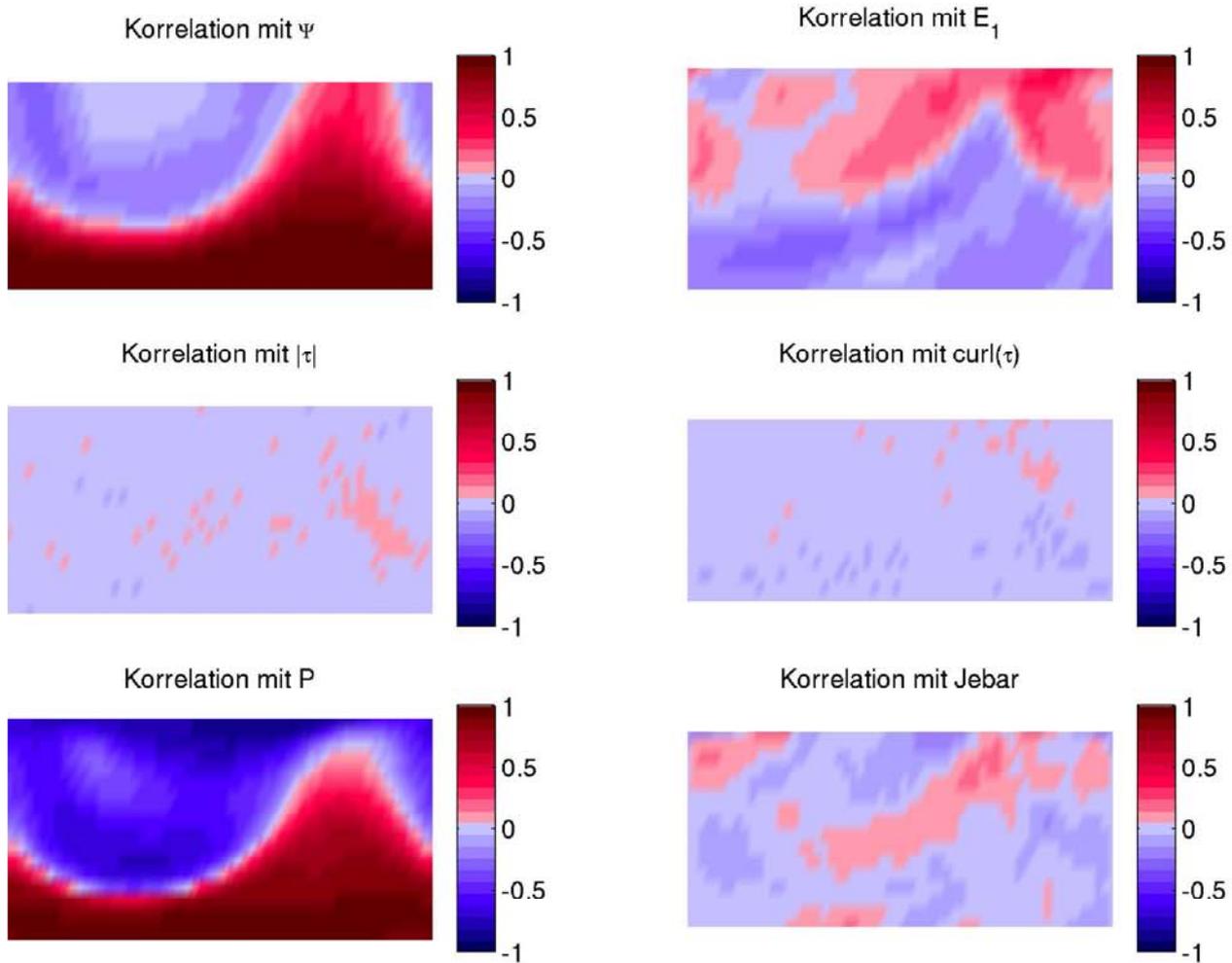


Abbildung 5.27: Korrelationskarten verschiedener Größen mit dem Kanaltransport für die erste Kanalvariante.

dem Kanaltransport und dem Bodendruck insbesondere für die stärkere Dichteschichtung stark ins Negative verändert.

An dieser Stelle kann man sich die Frage stellen, warum eine größere Dichteschichtung dazu beiträgt, dass die Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und der Differenz der potentiellen Energie schon bei kleineren Perioden an Bedeutung gewinnt.

Dirk Olbers hat auf diese Frage eine mögliche Erklärung darin gesehen, dass eine größere Dichteschichtung die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Arten von baroklinen Wellen erhöht. Da der Ozean sich auf Schwankungen im Wind oder der Dichteverteilung in der Regel unter Aussendung von Wellen einstellt, können diese Einstellungsprozesse bei erhöhter Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen schneller stattfinden, so dass sich ein Gleichklang früher einstellen kann.

**Theoretischer Ansatz** Nun soll zu erklären versucht werden, warum sich die Kohärenz des Transportes mit dem Bodendruck scheinbar gegensinnig zur Kohärenz zwischen dem Transport und der potentiellen Energie verhält. Oder einfacher, warum die eine steigt, während die andere fällt. Gibt es da vielleicht eine Verbindung, die aus dem Steigen der einen das Fallen der anderen bedingt?

Für Perioden ab der Größenordnung einiger Tage kann man annehmen, dass die geostrophische Balance in guter Näherung gilt:<sup>24</sup>

$$f\nabla\Psi = h\nabla P + \nabla E$$

Nähert man die meridionalen räumlichen Gradienten durch die Differenz zwischen dem nördlichen und dem

<sup>24</sup>Dirk Olbers hat an dieser Stelle nicht die Verwendung der geostrophischen Balance sondern der Poissongleichung vorgeschlagen, die zur Berechnung des Bodendruckes verwendet wird. Im Gegensatz zur geostrophischen Balance gilt diese exakt.

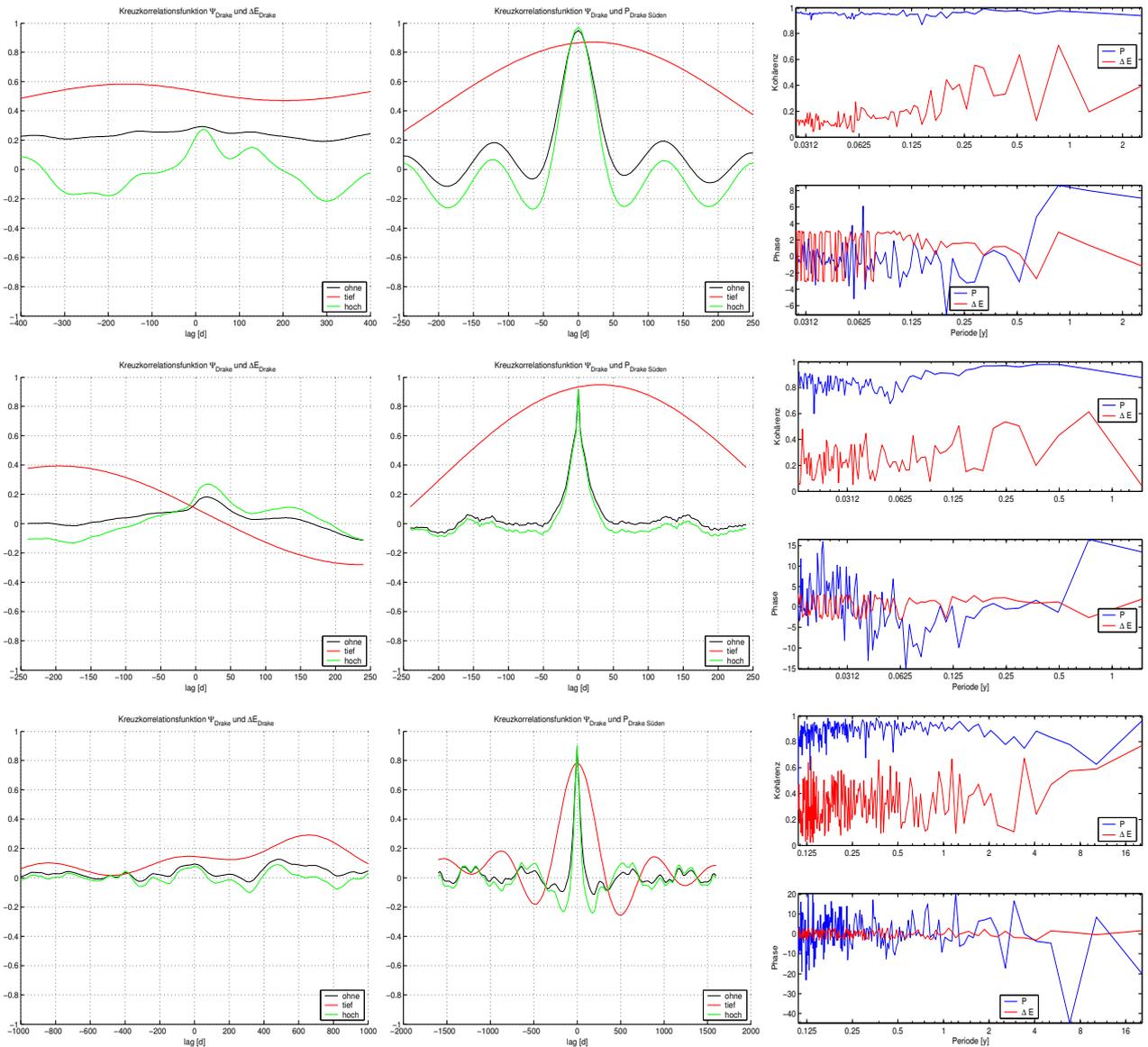


Abbildung 5.28: **Links:** Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Transport durch die Drakepassage und  $\Delta E_1$  über die Drakepassage. **Mitte:** Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck im Süden der Drakepassage. **Rechts:** die Kohärenz bzw. Phase. **Obere Reihe:** Windantrieb Typ A, **mittlere Reihe:** Typ B, **untere Reihe:** Typ D1. **Filterung:** ohne - nur Jahresgang, hoch - Perioden bis zu 2 Jahren, tief - Perioden größer als 2 Jahre.

südlichen Wert einer Größe an ( $\nabla A \approx \frac{A_N - A_S}{\Delta y} := \frac{\Delta A}{\Delta y}$ ) und wendet man eine zeitliche Fouriertransformation auf diese Gleichung an, so ergibt sich

$$h \widehat{\Delta P} = f \widehat{\Delta \Psi} - \widehat{\Delta E} \quad (5.20)$$

Es soll nun mit Hilfe dieser Gleichung versucht werden, die eine Kohärenz über die andere auszudrücken. Dabei werden aber aus Gründen der Einfachheit die  $\Delta$ -Symbole weggelassen. Es steckt also in Zukunft hinter der Größe A immer  $\Delta A$ .

Aber zunächst ein paar Definitionen im Zusammenhang

mit den folgenden spektralen Untersuchungen:

$$F_a := \langle \hat{a} \hat{a}^* \rangle \quad K_{ab} := \frac{\langle \hat{a} \hat{b}^* \rangle}{\sqrt{F_a F_b}} \quad C_{ab} = |K_{ab}|$$

Der \* bezeichnet die komplex konjugierte Zahl und  $\langle a \rangle$  den Mittelwert von  $a$ , der sich aus mehreren Realisierungen der Größe  $a(\omega)$  ergibt. Hinter  $F_a$  steckt weiterhin das Spektrum der Größe  $a$  und  $K_{ab}$  bezeichnet das 'normierte' Kreuzspektrum der Größen  $a$  und  $b$ , aus dem man die Kohärenz  $C_{ab}$  zwischen  $a$  und  $b$  als dessen Betrag ableiten kann.

Mit Hilfe von Gleichung (5.20) lässt sich das normierte

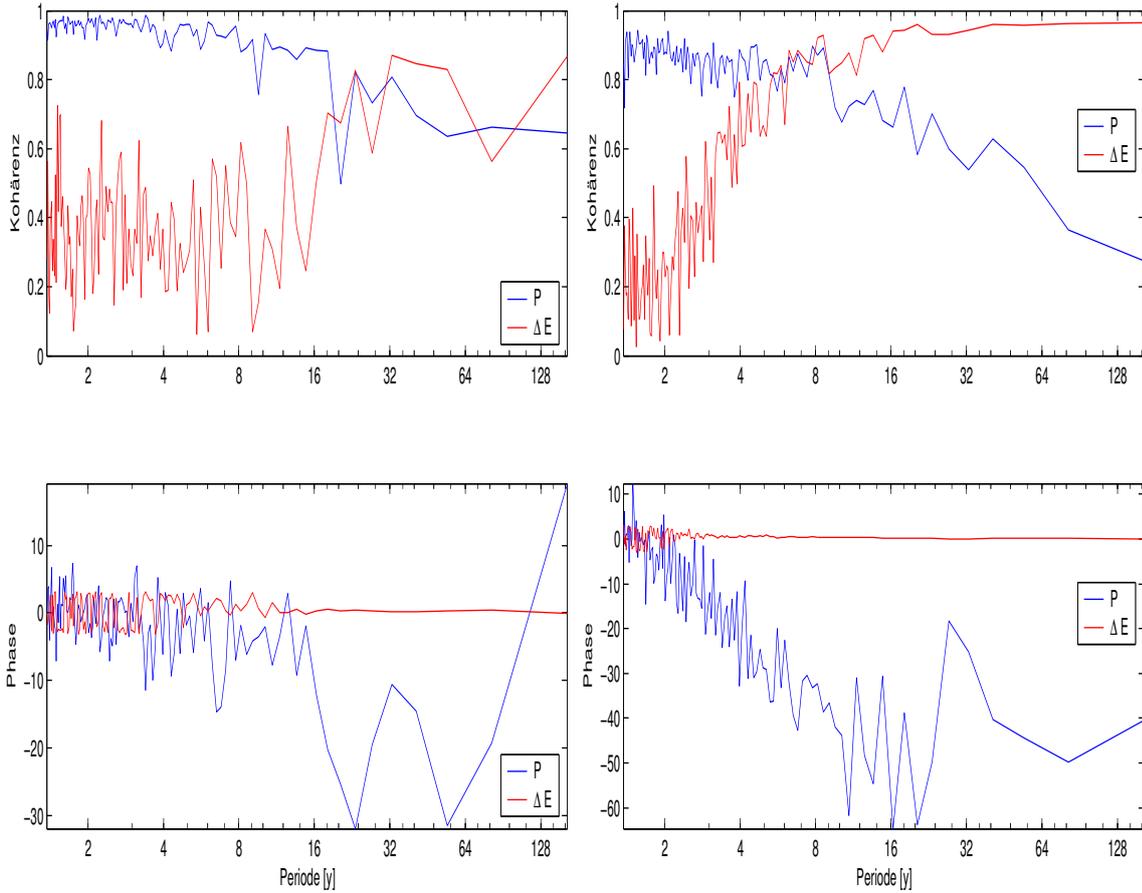


Abbildung 5.29: Kohärenz und Phase zwischen dem Kanaltransport und dem Bodendruck im Süden bzw. der meridionalen Differenz der potentiellen Energie. **Links:** Für eine Dichteschichtung von  $N = 0.002s^{-1}$ . **Rechts:** Für  $N = 0.005s^{-1}$ .

Kreuzspektrum von  $\Psi$  und P schreiben:

$$K_{\Psi P} = \frac{1}{h} \left( \frac{F_E}{F_P} \right)^{1/2} \left[ f \left( \frac{F_\Psi}{F_E} \right)^{1/2} - K_{\Psi E} \right] \quad (5.21)$$

Daraus berechnet sich dann die Kohärenz

$$C_{\Psi P}^2 = \frac{1}{h^2} \frac{F_E}{F_P} \left[ f^2 \frac{F_\Psi}{F_E} + C_{\Psi E}^2 - 2f \left( \frac{F_\Psi}{F_E} \right)^{1/2} Re(K_{\Psi E}) \right] \quad (5.22)$$

In dieser Beziehung ist noch das Spektrum von P enthalten, das man auch mit Hilfe von Gleichung (5.20) über die Spektren von  $\Psi$  und  $E$  ausdrücken kann:

$$F_P = \frac{F_E}{h^2} \left[ f^2 \frac{F_\Psi}{F_E} + 1 - 2f \left( \frac{F_\Psi}{F_E} \right)^{1/2} Re(K_{\Psi E}) \right]$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (5.22) ein, so erhält man als Abschätzung für die Kohärenz zwischen  $\Psi$  und P:

$$\begin{aligned} C_{\Psi P}^2 &= \frac{V^2 - 2VR + C_{\Psi E}^2}{V^2 - 2VR + 1} \quad (5.23) \\ &= 1 - \frac{1 - C_{\Psi E}^2}{A(\omega)} \end{aligned}$$

mit

$$V := f \left( \frac{F_\Psi}{F_E} \right)^{1/2} \quad R := Re(K_{\Psi E}) \quad A = V^2 - 2VR + 1$$

Leider ist aus dieser Beziehung nicht eindeutig das Verhältnis zwischen den beiden Kohärenzen abzuleiten, da die Funktion  $A(\omega)$ , für die gelten  $A(\omega) \geq 0$  muss, nicht konstant ist. Wäre das nämlich der Fall, so könnte man ein gleichsinniges (!!!!) Verhalten der beiden Kohärenzen sofort ableiten. Wenn die eine steigt, so muss auch die andere steigen.

Dass man dennoch mit Gleichung (5.23) das Verhalten der einen Kohärenz durch die andere ausdrücken kann, soll nun wieder mit Hilfe eines Kanalmodells überprüft werden. Es werden wieder das bereits bekannte Modellsetup nach Abb. 5.12 und dieselben Modellparameter mit einer Dichteschichtung von  $N = 0.002 s^{-1}$  verwendet.

Das Ergebnis ist in Abb. 5.30 zu sehen, wobei im linken Bild die Funktion  $A(\omega)$  (zunächst bitte nur auf die blaue Kurve achten) und im rechten Teilbild die Kohärenzen dargestellt sind. Die grüne Kurve im rechten Bild ist die nach

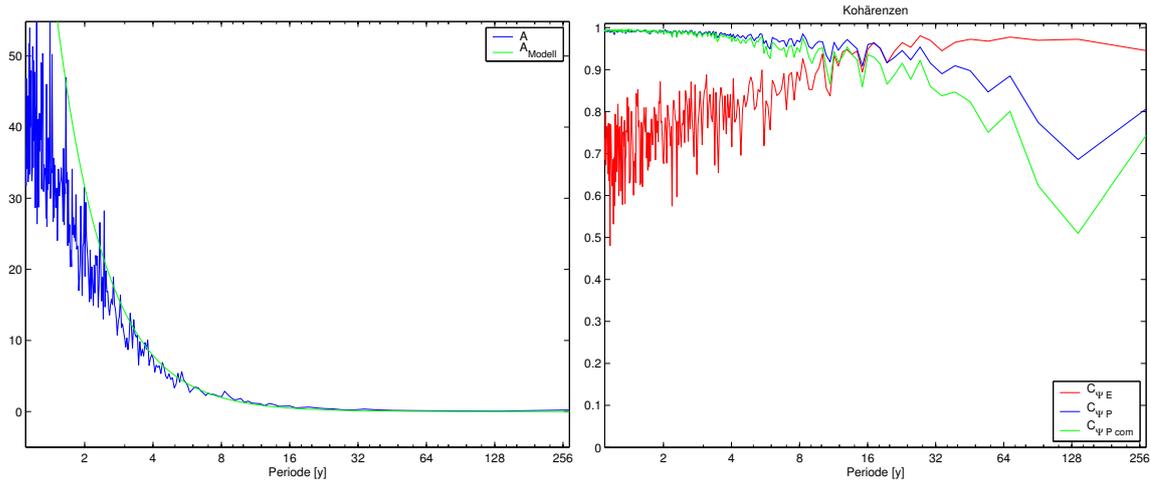


Abbildung 5.30: **Links:** Die Funktion  $A(\omega)$  aus BARBI (blau) und mit Hilfe von Beziehung (5.25) berechnet. **Rechts:** blau - Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und dem Bodendruck aus BARBI; rot - Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und der potentiellen Energie aus BARBI; grün - mit Hilfe von Gleichung (5.23) berechnete Kohärenz zwischen dem Bodendruck und dem Kanaltransport.

Gleichung (5.23) berechnete Beziehung. Die mit BARBI experimentell bestimmte Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und dem Bodendruck wird durch die blaue Kurve dargestellt. Deutlich passt sich die grüne Kurve im Prinzip der blauen Kurve an, obgleich sie nicht identisch sind, was vermutlich daran liegt, dass die geostrophische Balance nur eine Näherung darstellt. Dennoch ist dieses ein Hinweis dafür, dass man tatsächlich die Kohärenz zwischen dem Bodendruck und dem Kanaltransport über die Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und der Differenz der potentiellen Energie ausdrücken kann, und dass das Verhalten der einen über die geostrophische Balance mit dem Verhalten der anderen verbunden ist.

Doch was hat es mit der grünen Kurve im linken Teilbild auf sich?

Ich habe mir die Frage gestellt, ob man nicht das Verhalten der Funktion  $A(\omega)$  theoretisch beschreiben könnte, um so mehr Erkenntnisse über das Zusammenspiel der beiden Kohärenzen zu erlangen. Nun hat sich bei der Beschreibung der Kanaldynamik unter Einfluss eines Windantriebes ein einfaches lineares Modell als äußerst nützlich erwiesen. Und so lag für mich die Entscheidung nahe, auch hier ein solches Modell zu Rate zu ziehen.

Ich werde jetzt nicht mehr alle Gleichungen und Herleitungen für die Phase und die Bestimmung der Modellkonstanten auflisten. Dennoch möchte ich das Modell und seine Gleichungen kurz erläutern.

Im Prinzip werden wieder die bekannten Modellglei-

chungen (5.6) verwendet. Doch während in den ursprünglichen Gleichungen  $\Psi$  für den Kanaltransport  $T$  stand und dem Wert der Stromfunktion an der südlichen Kanalwand entsprach, muss der Transport nun, um in der Sprache der geostrophischen Balance zu bleiben, über die Differenz der Stromfunktion  $\Delta\Psi = \Psi_N - \Psi_S$  beschrieben werden. Es gilt dann  $T = -\Delta\Psi$ <sup>25</sup>, und das Modell lautet:

$$\begin{aligned} -\frac{d\Delta\Psi}{dt} - a\Delta\Psi &= nF + b\Delta E & (5.24) \\ \frac{d\Delta E}{dt} + d\Delta E &= mF - c\Delta\Psi \end{aligned}$$

wobei  $F$  wieder den Windantrieb beschreibt. Mit Hilfe dieses Modells lässt sich nun durch Fouriertransformation der Gleichungen eine Schätzung für die Funktion  $A(\omega)$  gewinnen:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 + f^2 \frac{(nd + bm)^2 + n^2\omega^2}{(am + cn)^2 + m^2\omega^2} & (5.25) \\ &+ 2f \frac{nm(bc + da + \omega^2) + m^2ba + n^2dc}{(am + cn)^2 + m^2\omega^2} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist nun im linken Teilbild der Abb. 5.30 zu sehen und mit  $A_{Modell}$  bezeichnet. Als Modellparameter wurden im Prinzip diejenigen aus Tabelle 5.2 (siehe Ende des Kapitels) in der letzten Spalte verwendet, wobei sie etwas durch ein nichtlineares Ausgleichsverfahren zur besseren Anpassung der Funktionen  $V(\omega)$  und  $R(\omega)$  modifiziert wurden.

<sup>25</sup>Dem Leser mag dieses Vorgehen etwas umständlich erscheinen, da doch der Wert der Stromfunktion auf dem nördlichen Rand sowieso gleich Null ist, und  $T = \Psi_S$  gilt. Aber diese Schreibweise hat den Vorteil, die geostrophische Balance direkt zu verwenden.

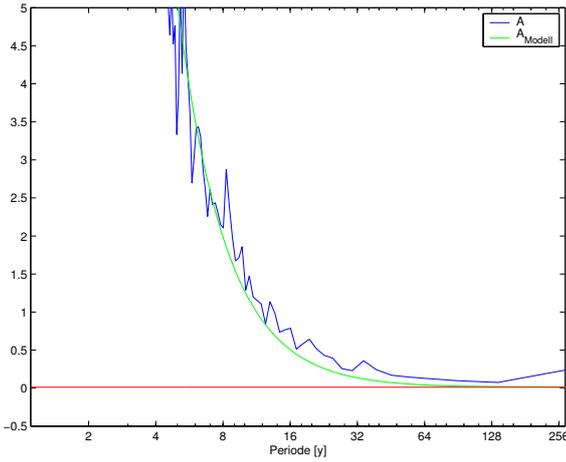


Abbildung 5.31: Die Funktion  $A(\omega)$  aus BARBI (blau) und mit Hilfe von Beziehung (5.25) berechnet. Zusätzlich ist rot der theoretische Grenzwert für  $\omega \rightarrow 0$  eingezeichnet.

Wie man sieht, stimmt diese so theoretisch ermittelte Kurve gut mit der experimentellen Kurve aus BARBI überein, und man kann nun ein paar kleine Aussagen wie z.B. über das Grenzwertverhalten der Funktion  $A(\omega)$  ableiten.

Aus Gleichung (5.25) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) &= 1 + f^2 \frac{(nd + bm)^2}{(am + cn)^2} \\ &\quad + 2f \frac{nm(bc + da) + m^2ba + n^2dc}{(am + cn)^2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= \left(1 + f \frac{n}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

Bevor wir zu den Folgen aus diesen Überlegungen kommen, sei noch eine hilfreiche Umformung für Gleichung (5.23) angegeben:

$$C_{\Psi E}^2 = C_{\Psi P}^2 \left[ A + \frac{1 - A}{C_{\Psi P}^2} \right] \quad (5.26)$$

Betrachten wir zunächst das Verhalten für große Frequenzen ( $\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow \text{Periode} \rightarrow 0$ ), indem wir die Zahlenwerte der angepassten Modellkonstanten basierend auf Tabelle 5.2 zu Rate ziehen. Für diese Zahlenwerte und  $f \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$  dominiert  $n \approx 10^9 m$  und der Wert von  $A$  ist mit  $A \approx 10^{10}$  deutlich größer als 1. Setzt man dieses in Gleichung (5.26) ein, so ergibt sich

$$C_{\Psi E}^2 = C_{\Psi P}^2 A - A.$$

Damit aber  $C_{\Psi E}^2$  für diesen großen Wert von  $A$  zwischen Null und Eins bleibt, muss  $C_{\Psi P}^2 \approx 1$  gelten. Dieses Verhalten findet man auch experimentell für kleine Perioden.

Kommen wir nun zu dem Verhalten für kleine Frequenzen bzw. lange Perioden. Hier sieht die Beziehung schon et-

was komplizierter aus, und man kann keine allgemein gültige Aussage über den Grenzwert machen. Setzt man jedoch wieder die angepassten Modellkonstanten ein, so lässt sich folgende Abschätzung finden:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) \approx \left(1 + f \frac{d}{c}\right)^2$$

Somit ist der Grenzwert für große Perioden positiv -wie es ja auch sein soll- und in Abb. 5.31 ist dieser Wert als rote horizontale Linie dargestellt. Im Übrigen ist diese Abbildung nur eine Ausschnittsvergrößerung des linken Teilbildes aus Abb. 5.30. Man sieht zum einen, wie sich die grüne exakte Modellkurve an die rote Kurve anschmiegt, und zum anderen, dass dieser Grenzwert schon bei Perioden ab 64 Jahren<sup>26</sup> langsam erreicht wird. Aus diesem Grund könnte man vorsichtig behaupten, dass ab diesen Perioden die beiden Kohärenzen gleichsinnig sein sollten, da  $A(\omega)$  fast konstant ist.

Andererseits kann man aus Gleichung (5.26) für einen Wert von  $A \approx 0$  ableiten:  $C_{\Psi E}^2 \approx 1$ . Das bedeutet, dass die Kohärenz zwischen dem Transport und der potentiellen Energie langfristig gegen 1 gehen sollte.

Für eine konstantes  $A(\omega)$  lässt sich aus Gleichung (5.23) meiner Meinung nach auch folgendes ableiten: Für den Fall, dass die Kohärenz zwischen dem Transport und der Differenz der potentiellen Energie für lange Perioden gegen 1 geht, gilt dieses auch für die Kohärenz zwischen dem Bodendruck und dem Kanaltransport, da dann in diesem Fall Zähler und Nenner in Gleichung (5.23) gleich sind.

Abschließend lässt sich aus meiner Sicht zu diesem Zeitpunkt sagen, dass die Schicksale der Kohärenzen zwar über die geostrophische Balance miteinander verwoben sind. Aber es scheint keinen einfachen Zusammenhang der Gestalt zu geben, dass die eine steigt, nur weil die andere fällt. Im Gegenteil. Ich würde aufgrund der letzten Überlegungen eher behaupten, dass sich beide Kohärenzen für sehr lange Perioden eher gleichsinnig verhalten.

<sup>26</sup>Für diese speziellen Modellparameter und Dichteschichtung.

## 5.7 Ein Regressionsmodell für den Transport durch die Drakepassage

Generell wäre es eine feine Sache, wenn man den Transport durch die Drakepassage zeitnah mit einfachen und kostengünstigen Mitteln beobachten könnte.

Nun konnten Michael Meredith und Chris Hughes (2005) [40] in ihrer Arbeit zeigen, dass man mindestens jede Woche einmal den Transport durch die Drakepassage bestimmen müsste, um einen verlässlichen Jahresmittelwert zu erhalten. Da dies mit Schiffsmessungen nicht zu finanzieren wäre, müssen andere Methoden verwendet werden.

Nun wurde sowohl in dieser Arbeit als auch in anderen bereits erwähnten Arbeiten gezeigt, dass der Bodendruck im Süden der Drakepassage bzw. entlang der antarktischen Küste die Schwankungen des Transportes durch die Drakepassage gut widerspiegelt. Im Vergleich zu den aufwändigen Schiffsmessungen dürfte ein Bodendrucksensor günstig zu haben sein.

Da der Transport, wie gezeigt, durch den Wind und die Differenz der potentiellen Energie beeinflusst wird, sollen diese Größen auch “mit ins Boot“ genommen werden. Der Wind könnte nun lokal an einer Stelle, möglichst im Gürtel der Drakepassage, gegeben sein oder als Mittelwert über den Südlichen Ozean. Auch letzteres dürfte vergleichsweise einfach sein. Die Differenz der potentiellen Energie könnte man durch zwei lokale Verankerungen im Norden und Süden der Drakepassage erhalten, die vertikale Profile von Temperatur, Salzgehalt und Druck bestimmen, um daraus dann die potentielle Dichte bzw. die Dichteanomalie und daraus die Differenz der potentiellen Energie zu ermitteln.

Ziel dieses Abschnittes ist es, mit Hilfe von BARBI ein einfaches Modell abzuleiten, das die Schwankungen des Transportes durch die Drakepassage auf der Grundlage des Bodendruckes im Süden, eines Messwertes des zonalen Windschubes im Zentrum der Drakepassage und der Differenz der potentiellen Energie gut beschreiben kann.

Nun ist diese Idee nicht neu. So ist z.B. in Whitworth und Peterson (1995) [70] ein einfaches Modell basierend auf der Druckdifferenz im Norden und Süden der Drakepassage in 500 m Tiefe zu finden. Meredith et. al (2004) [41] verwenden nur den Bodendruck im Süden der Drakepassage. Allerdings werden auch andere Größen als der Druck verwendet. So lässt sich in der Arbeit von Hall und Visbeck (2002) [24] ein einfaches Modell auf der Grundlage des SAM-Indexes

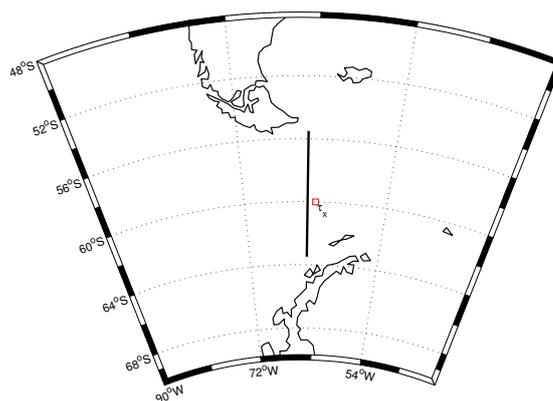


Abbildung 5.32: Meridionaler Schnitt (senkrechte schwarze Linie) durch die Drakepassage, an dessen Enden die potentielle Energie bestimmt wird. Der für dieses Modell verwendete Ort des zonalen Windschubes ist durch das rote Quadrat markiert. Der Bodendruck wird am südlichen Ende dieses Schnittes bestimmt.

ableiten.

Es soll hier (nur) ein lineares Regressionsmodelle der Art

$$\hat{x}(t) = a \cdot A(t) + b \cdot B(t) + c \cdot C(t) + \dots \quad (5.27)$$

verwendet werden, wobei  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... einfach zu messende Größen (wie z.B. der Bodendruck oder der Windschub an einem Ort) und  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... die an die Daten anzupassenden Regressionskoeffizienten bezeichnen. Die Regressionskoeffizienten werden im Folgenden als Least-Squares Lösung der Aufgabe  $\|\hat{x}(t) - x(t)\| = \min$  bestimmt.

Sind die Daten untereinander nicht korreliert (also z.B.  $A$  nicht mit  $B$ ), so entsprechen im Falle einer Normierung der Daten die Regressionskoeffizienten den Korrelationskoeffizienten der einzelnen Größen mit der Größe  $x$ .<sup>27</sup>

Um die Güte der Anpassung der Modelldaten  $\hat{x}(t)$  an den Transport  $x(t)$  zu charakterisieren, wird die sogenannte root-mean-square Abweichung verwendet:

$$rms = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (5.28)$$

Je größer also dieser Zahlenwert ist, desto stärker weicht das angepasste Modell von den Daten ab, da diese Größe ja im Prinzip alle Abweichungen aufsummiert und daraus eine mittlere Abweichung berechnet. Sind die Daten normiert, so gilt folgender Zusammenhang mit dem Korrelationsko-

<sup>27</sup>Z.B. wäre also im Falle der Normierung der Regressionskoeffizient  $a$  gleich dem Korrelationskoeffizienten zwischen der Größe  $x$  und der Größe  $A$ .

effizienten  $r_{x\hat{x}}$  (siehe Storch und Navarra (1999) [64]):

$$rms_n = \sqrt{2(1 - r_{x\hat{x}})} \quad (5.29)$$

Für nicht korrelierte Daten (hier also  $\hat{x}$  mit  $x$ ) gilt dann  $rms_n = \sqrt{2} \approx 1.4$ . Allerdings gilt für exakt antikorrelierte Daten  $rms_n = 2$ . Für einen positiven Korrelationskoeffizienten sollte dieser Wert also weit unter  $\sqrt{2}$  liegen, damit das Modell die Daten gut beschreibt.

Um das Regressionsmodell zu testen, wird das Experiment mit den NCEP-täglichen Winden (Typ B) verwendet, wobei man allerdings bedenken muss, dass diese Zeitreihe zu kurz ist, um die Differenz der potentiellen Energie richtig zur Geltung zu bringen. Die Daten werden in keiner Weise gefiltert, und der Zeitschritt von  $\Delta t = 3 d$  ist unter der von Meredith und Hughes (2005) [40] geforderten Mindestrate von einer Woche. Die Orte, an denen die BARBI-Daten genommen werden, sind in Abb. 5.32 skizziert, wobei die potentielle Energie im Norden und Süden des meridionalen Schnittes, der Bodendruck im Süden des Schnittes und der Windschub an der mit dem roten Quadrat markierten Stelle erhoben werden. Wie man sieht, liegt letzterer nicht genau auf dem Schnitt, da der Wind in BARBI auf dem leicht versetzten U-Gitter geführt wird und dieses vom T-Gitter der Stromfunktion, der potentiellen Energie und des Bodendruckes abweicht.

Im Folgenden werden vier verschiedene Modelltypen betrachtet, die sich hauptsächlich darin unterscheiden, dass die Einflussgrößen unterschiedlich zusammengesetzt sind. Die tragende Säule dieser Modelle ist der Bodendruck<sup>28</sup> im Süden der Drakepassage, wobei der Wind bzw. die Differenz der potentiellen Energie (modifiziert mit dem lokalen Coriolis-Parameter) wahlweise dazu genommen werden. Die nachstehende Tabelle beinhaltet die vier Modelle mit den entsprechenden Einflussgrößen, wobei ein + die Verwendung der entsprechenden Einflussgröße kennzeichnet.

Modell	$P_S$	$\Delta(E/f)$	$\tau_x$
A	+		
B	+	+	
C	+		+
D	+	+	+

Die Ergebnisse für die einzelnen Modelle sind in Abb. 5.33 bzw. in Tabelle 5.3 zu sehen, wobei in der linken Spalte der Abbildung die Zeitreihe des BARBI-Transportes bzw. die Zeitreihe des Regressionsmodells und in der rechten Spalte die entsprechenden Streudiagramme zwischen diesen beiden Zeitreihen zu sehen sind. Je stärker sich die Datenpunkte in diesen Streudiagrammen um die rote Gerade mit der Steigung 1 konzentrieren, um so besser ist die Beschreibung des BARBI-Transportes durch den Transport des Regressionsmodells.

Auffallend an den Ergebnissen (insbesondere an den  $rms$ -Werten) ist, dass allein unter Verwendung des Bodendruckes der Transport schon gut nachgebildet werden kann. Die Hinzunahme des Windes bzw. der potentiellen Energie (Modelle B und C) bringt nur eine leichte Verbesserung. Und obwohl die Verwendung aller drei Einflussgrößen die beste Approximation liefert, ist die Steigerung der Güte der Approximation nur gering im Vergleich zu dem, was der Bodendruck schon alleine zu tun vermag.

Deutlich wird dies nochmal, wenn man sich die Regressionskoeffizienten für das Modell D mit normierten Daten betrachtet (siehe Tabelle 5.3). Für unkorrelierte Daten wären diese, wie schon erwähnt, gleich den Korrelationskoeffizienten zwischen der jeweiligen Einflussgröße und dem BARBI-Transport<sup>29</sup>. Die Regressionskoeffizienten entsprechen zwar erwartungsgemäß nicht genau den Korrelationskoeffizienten, da alle Größen ja vom Wind getrieben werden und somit korreliert sind, was ich nachgerechnet habe. Aber dennoch spiegeln diese normierten Regressionskoeffizienten die Einflussverhältnisse gut wider.

Abschließend bleibt zu sagen, dass man für kurze Zeitskalen in sehr guter erster Näherung nur den Bodendruck nehmen kann- und vielleicht noch den Wind an einer Stelle. Aber der Aufwand, die Differenz der potentiellen Energie zu bestimmen, sollte sich erst auf wirklichen langen Zeitskalen lohnen.

<sup>28</sup>Man rufe sich noch einmal in Erinnerung, dass es sich bei dem in BARBI verwendeten Bodendruck nur um die Abweichung vom Bodendruck der Hintergrundsichtung handelt, so dass diese mitunter auch negativ sein kann. Da das numerische BARBI-Modell den Bodendruck mit dem falschen Vorzeichen heraus schreibt, wird im Folgenden der negative Bodendruck verwendet. Dies führt aber zu dem praktischen Umstand, dass man einen positiv korrelierten Zusammenhang zwischen dem Transport und dem Bodendruck erhält.

<sup>29</sup>Die Korrelationskoeffizienten lauten übrigens:  $r_{\Psi P} = 0.897$ ,  $r_{\Psi E} = -0.237$  und  $r_{\Psi \tau_x} = 0.339$ .

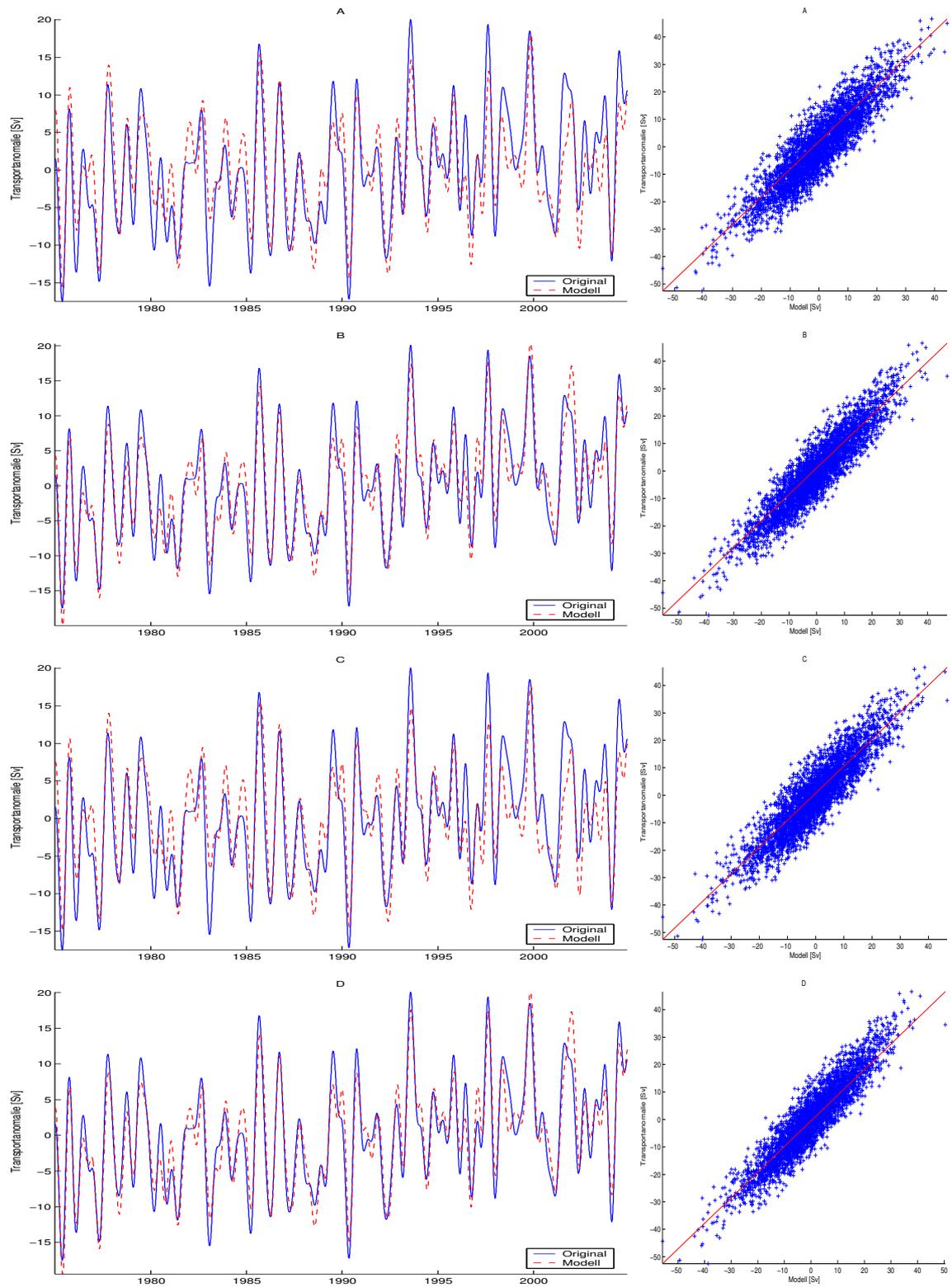


Abbildung 5.33: **Links:** Zeitreihen des BARBI-Transportes und des Transportes des entsprechenden Regressionsmodells. **Rechts:** Streudiagramme zwischen dem BARBI-Transport  $x$  und dem Transport des Regressionsmodells  $\hat{x}$ . Die rote Gerade beschreibt die Punkte  $x = \hat{x}$ .

	Anteil = 0.4		Anteil = 0.2		Anteil = 0.1		Spin-up
	linear	nichtlin.	linear	nichtlin.	linear	nichtlin.	
$a^{-1}[d]$	40.3	6.2	41.7	8.9	47.1	9.95	11
$d^{-1}[d]$	455.7	86.1	456.8	1071.8	388.0	592	940
$n$ [m]	$3.42 \cdot 10^9$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^9$	$2.17 \cdot 10^9$	$2.96 \cdot 10^9$	$2.95 \cdot 10^9$	
$m$ [m/s]	$-1.56 \cdot 10^4$	2	$-1.55 \cdot 10^4$	2	$-2.10 \cdot 10^4$	2	
$b$	$2.41 \cdot 10^2$	$4.36 \cdot 10^{-11}$	$2.32 \cdot 10^2$	$-2.89 \cdot 10^2$	$2.03 \cdot 10^2$	$0.65 \cdot 10^2$	
$c$ [ $s^{-2}$ ]	$1.84 \cdot 10^{-7}$	$-6.62 \cdot 10^{-7}$	$1.84 \cdot 10^{-7}$	$4.84 \cdot 10^{-9}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$	

Tabelle 5.2: Rekonstruierte Konstanten des baroklinen Modells der Variante B aus Abschnitt 5.4.4 für einen baroklinen Kanal.

Modell	$r_{x\hat{x}}$	$rms$	$rms_n$	Regressionskoeffizienten			Regressionskoeff. normiert		
				$P$ [Sv/bar]	$\Delta(E/f)$	$\tau_x$ [m/s]	$P$	$\Delta(E/f)$	$\tau_x$
A	0.897	6.02	0.453	27.0			0.897		
B	0.921	5.31	0.397	26.8	-2.21		0.891	-0.207	
C	0.902	5.88	0.442	26.2		$9.72 \cdot 10^9$	0.871		0.096
D	0.926	5.15	0.385	26.0	-2.23	$10.18 \cdot 10^9$	0.862	-0.209	0.100

Tabelle 5.3: Übersicht über die Regressionskoeffizienten der vier Modelle und die Güte der Approximation. Man beachte, dass der Regressionskoeffizient für  $\Delta(E/f)$  keine Einheit besitzt, da die Einheit der Größe  $\Delta(E/f)$  gleich der Einheit des Transportes ist.

# Kapitel 6

## Einbau von Konvektion in BARBI

### 6.1 Einleitung

Nachdem nun BARBI auf verschiedene Fragestellungen angewendet wurde, soll sich dieses Kapitel um die Erweiterung von BARBI selbst drehen.

Als Modell, das auf der hydrostatischen Näherung aufbaut, beinhaltet BARBI den Konvektionsmechanismus nicht direkt. Dadurch kann es während der Modellintegration Orte geben, an denen die Wassersäule instabil geschichtet ist, ohne dass sich daraus vertikale Vermischungsvorgänge ergeben, die diese Instabilität aufheben könnten. Andere hydrostatische Ozeanmodelle, wie etwa MOM, haben ein ähnliches Problem, doch sie haben den Vorteil, dass sie für jeden Ort die vertikale Dichteverteilung kennen, und mit dieser verschiedene Konvektionsschemata ausführen können. BARBI hat an dieser Stelle den Nachteil, dass es nicht die vertikale Dichteverteilung sondern nur die Momente der Dichte liefert. Das Problem besteht also darin, aus diesen Momenten heraus zu entscheiden, ob eine Wassersäule instabil ist, und einen eventuell nötigen Konvektionsvorgang in die Momente zu übersetzen.

Die in dieser Arbeit behandelten Lösungsansätze lassen sich grob in zwei Typen einteilen. Der erste Typ, nennen wir ihn *direkte Methode*, versucht unmittelbar aus den Momenten ein Konvektionsschema aufzubauen. Der zweite Typ, die *indirekte Methode*, versucht zuerst aus den Momenten die vertikale Dichteverteilung zu rekonstruieren, um dann mit Hilfe dieser Verteilung Konvektion zu machen. Ist dies erfolgt, werden in einem weiteren Schritt aus der Dichteverteilung nach der Konvektion die neuen Momente berechnet.

Die Momente werden im Folgenden nicht in Form der bekannten  $E_i$  verwendet, sondern etwas umgeschrieben, so dass u.a. alle Momente dieselbe Einheit haben:

$$G_i := \frac{1}{h^{i-1}} E_i = \frac{g}{h^{i-1}} \int_{-h}^0 \rho(z) z^i dz \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (6.1)$$

Diese Momente wiederum lassen sich durch die Substi-

tution  $\tilde{z} := z/h$  weiter umformen:

$$G_i = \frac{g}{h^{i-1}} \int_{-h}^0 \rho(z) z^i dz = gh^2 \int_{-1}^0 \tilde{\rho}(\tilde{z}) \tilde{z}^i d\tilde{z} \quad (6.2)$$

mit  $\tilde{\rho}(\tilde{z}) = \rho(z = \tilde{z}h)$ .

Dieses Kapitel soll sich nun der direkten Methode widmen, während im Anhang C Lösungsansätze für die indirekte Methode vorgestellt werden.

### 6.2 Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität bzw. Instabilität monotoner Dichtefunktionen

Zunächst soll untersucht werden, wie sich eine stabile oder instabile Wassersäule in der Sprache der Dichtemomente widerspiegelt. Dieses kann hier leider nicht in voller Allgemeinheit durchgeführt werden, sondern es soll sich auf monotone Dichtefunktionen beschränkt werden.

Sei die Dichte über die ganze Wassersäule entweder monoton fallend oder steigend, so ist die Wassersäule stabil für  $\frac{\partial \rho^*}{\partial z} < 0$  bzw. instabil für  $\frac{\partial \rho^*}{\partial z} > 0$ , wobei  $\rho^*$  die dimensionsbehaftete potentielle Dichte darstellt. Verwendet man die Substitution (6.2), so ergibt sich für das erste und dritte Dichtemoment:

$$\begin{aligned} G_1 &= gh^2 \int_{-1}^0 \rho(z) z dz & (6.3) \\ G_3 &= gh^2 \int_{-1}^0 \rho(z) z^3 dz \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration<sup>1</sup> und  $\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0^*} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial z} + \frac{N^2 h \rho_0^*}{g} \right)$

<sup>1</sup>  $\int_a^b u'v dz = uv|_a^b - \int_a^b uv' dz$ , wobei die Faktoren  $z^i$  mit  $u$  identifiziert werden.

folgt:

$$G_1 = gh^2 \left[ -\frac{1}{2}\rho(-1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{\partial \rho}{\partial z} z^2 dz \right] \quad (6.4)$$

$$= gh^2 \left[ -\frac{1}{2}\rho(-1) - \frac{N^2 h}{6g} - \frac{1}{2\rho_0^*} \int_{-1}^0 \frac{\partial \rho^*}{\partial z} z^2 dz \right]$$

$$G_3 = gh^2 \left[ -\frac{1}{4}\rho(-1) - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{\partial \rho}{\partial z} z^4 dz \right] \quad (6.5)$$

$$= gh^2 \left[ -\frac{1}{4}\rho(-1) - \frac{N^2 h}{20g} - \frac{1}{4\rho_0^*} \int_{-1}^0 \frac{\partial \rho^*}{\partial z} z^4 dz \right]$$

Die beiden Gleichungen lassen sich nun kombinieren zu:

$$G_3 - \frac{1}{2}G_1 - \frac{h^3 N^2}{30} = \frac{gh^2}{4\rho_0^*} \int_{-1}^0 \frac{\partial \rho^*}{\partial z} z^2 (1 - z^2) dz \quad (6.6)$$

Beachtet man, dass  $z^2(1 - z^2) \geq 0$  für  $z \in [-1, 0]$ , so kann man aus Gleichung (6.6) folgende Aussagen über die Stabilität der Wassersäule treffen:

$G_3 - \frac{1}{2}G_1 - \frac{h^3 N^2}{30} \begin{cases} < 0 & \Leftrightarrow \text{stabil} \\ = 0 & \Leftrightarrow \text{homogen} \\ > 0 & \Leftrightarrow \text{instabil} \end{cases} \quad (6.7)$
--

Bei der Suche nach Orten, an denen die Wassersäule instabil ist, braucht man also nur an den Orten genauer hin zu schauen, an denen  $G_3 - \frac{1}{2}G_1 - \frac{h^3 N^2}{30} > 0$  gilt, bzw. all die anderen Orte, für die diese Beziehung nicht gilt, auszuschließen.

Rein mathematisch kann die Dichte natürlich jeden beliebigen Verlauf nehmen. Somit kann man streng genommen nur aus obiger Beziehung nicht auf die Stabilität der Wassersäule schließen, wenn die Dichte sowohl wachsende als auch fallende Bereiche hat, wie man an folgendem Beispiel sehen kann:

Sei die dimensionsbehaftete Dichte im Beispiel definiert durch:

$$\rho^* = \begin{cases} \rho_0^* - az & -1 \leq z \leq -0.5 \\ \rho_0^* + az & -0.5 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

Dies bedeutet, dass die Wassersäule für  $a > 0$  in der unteren Hälfte stabil und in der obere Hälfte instabil geschichtet ist. Damit gilt dann  $G_3 - \frac{1}{2}G_1 - \frac{h^3 N^2}{30} = \frac{gh^2 a}{128\rho_0^*} > 0$ , woraus man nun nicht schließen kann, dass die gesamte Wassersäule instabil ist.

**Durchmischen der Wassersäule monotoner Dichtefunktionen** Was macht man nun, wenn man eine instabile Wassersäule gefunden hat?

Hält man sich wieder an die Annahme, dass die Dichteverteilung in der Wassersäule monoton ist, so muss man die

gesamte Wassersäule durchmischen. Aus Beziehung (6.7) ist dann abzulesen, dass für die neuen Momente nach der Durchmischung gelten muss:

$$G_3^{neu} - \frac{1}{2}G_1^{neu} - \frac{h^3 N^2}{30} = 0 \quad (6.9)$$

Die Mischungsdichte berechnet sich aus der Dichteverteilung vor der Durchmischung nach folgender Beziehung, die die Massenerhaltung in der Wassersäule annimmt:

$$\rho_{mixed}^* = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho^* dz = \int_{-1}^0 \bar{\rho}^* d\tilde{z} \quad (6.10)$$

Als Vorstufe für eine Durchmischung werde die aktuelle Dichte in die Durchmischungsdichte  $\rho_{mixed}^*$  und die Abweichung von dieser,  $\delta^*$ , zerlegt:  $\rho^*(z) = \rho_{mixed}^* + \delta^*(z)$ . Aufgrund dieser Definition und der Mischungsbeziehung gilt<sup>2</sup>:

$$\int_{-1}^0 \delta^*(z) dz = 0 \quad (6.11)$$

Nun lassen sich die alten Momente vor der Durchmischung mit Hilfe dieser Zerlegung schreiben als:

$$\begin{aligned} G_1^{alt} &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* + \delta^*(z) - \bar{\rho}^*) z dz \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* - \bar{\rho}^*) z dz \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 \delta^*(z) z dz \\ &= G_1^{neu} + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 \delta^*(z) z dz \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} G_3^{alt} &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* + \delta^*(z) - \bar{\rho}^*) z^3 dz \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* - \bar{\rho}^*) z^3 dz \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 \delta^*(z) z^3 dz \\ &= G_3^{neu} + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 \delta^*(z) z^3 dz \end{aligned} \quad (6.13)$$

Da keine genauen Angaben über die Funktion  $\delta^*(z)$  vorliegen, kann man die Integrale auf den rechten Seiten dieser beiden Beziehungen nicht exakt auswerten. Um diese dennoch anzunähern, wird die Funktion<sup>3</sup>  $\delta^*(z)$  durch eine lineare Funktion  $\delta^*(z) \approx az + b$  approximiert. Aus Gleichung (6.11) folgt dann  $b = a/2$  bzw.  $\delta^*(z) \approx a(z + 1/2)$ .

<sup>2</sup>Die  $\tilde{z}$  wird weggelassen, und  $z \in [-1, 0]$ .

<sup>3</sup>Streng genommen kommt auch dieses Verfahren nicht ohne eine grobe Kenntnis der Dichteschichtung aus. Man müsste also von einem halb direkten Verfahren sprechen. Außerdem mag man einwenden, dass man doch gleich eine lineare Dichteverteilung an die Momente hätte anpassen können. Dem kann man aber entgegen, dass obige Beziehung allgemeingültiger ist und für beliebige monotone Dichtefunktionen gilt.

Setzt man dies nun in die beiden Beziehungen ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_1^{alt} &= G_1^{neu} + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \frac{1}{12} a \\ G_3^{alt} &= G_3^{neu} + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \frac{3}{40} a \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun kombinieren zu 4.:

$$\frac{1}{3} G_3^{alt} - \frac{3}{10} G_1^{alt} = \frac{1}{3} G_3^{neu} - \frac{3}{10} G_1^{neu} \quad (6.14)$$

Zusammen mit Gleichung (6.9) ist dies die zweite Gleichung eines Gleichungssystems für die neuen Momente  $G_1^{neu}$  und  $G_3^{neu}$ , die sich daraus ergeben zu:

$$G_1^{neu} = -\frac{5}{2} G_3^{alt} + \frac{9}{4} G_1^{alt} + \frac{h^3 N^2}{12}, \quad (6.15)$$

$$G_3^{neu} = -\frac{5}{4} G_3^{alt} + \frac{9}{8} G_1^{alt} + \frac{3h^3 N^2}{40} \quad (6.16)$$

Das Dichteprofil nach der Durchmischung lässt sich z.B. berechnen aus:

$$G_1^{neu} = \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 \left( \rho_{mixed}^* - \rho_S^* + \frac{N^2 h \rho_0^* z}{g} \right) z dz$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich dann:

$$\rho_{mixed}^* = \rho_S^* - \frac{2\rho_0^*}{g} \left( \frac{G_1^{neu}}{h^2} - \frac{N^2 h}{3} \right) \quad (6.17)$$

Gibt man also den Oberflächenwert  $\rho_S^*$  des linearen Hintergrundprofils vor, so kann man die neue Durchmischungsdichte nach dieser Gleichung berechnen.

### 6.3 Änderung der potentiellen Energie beim Durchmischen

An dieser Stelle soll kurz skizziert werden, wie sich die potentielle Energie der Wassersäule bei einem Durchmischungsvorgang verändert, wobei sowohl qualitative als auch quantitative Überlegungen durchgeführt werden sollen.

<sup>4</sup>Eigentlich müsste man wegen der linearen Approximation ein Minimierungsproblem etwa der Art

$$\begin{aligned} F(a) &:= \left( G_1^{alt} - G_1^{neu} - \frac{gh^2}{\rho_0^*} \frac{1}{12} a \right)^2 \\ &\quad + \left( G_3^{alt} - G_3^{neu} - \frac{gh^2}{\rho_0^*} \frac{3}{40} a \right)^2 = \min \end{aligned}$$

betrachten und das optimale  $a$  bestimmen. Anschließend wird das so gewonnene  $a$  in die letzten beiden Gleichungen eingesetzt, was auch auf die nächste Gleichung führt.

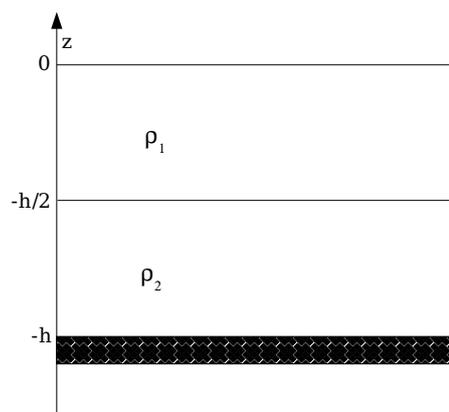


Abbildung 6.1: Versuchsanordnung für das einfache Vermischungsexperiment mit  $\rho_1 > \rho_2$ . Man sieht hier die Situation vor der Vermischung.

**Qualitative Änderung** Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel, das sich in dieser Form auch in Cushman-Roisin (1994) [16] finden lässt.

Die Wassersäule bestehe vor der Durchmischung aus zwei übereinander liegenden Schichten mit den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , wobei sich die Grenzfläche zwischen beiden Schichten auf halber Tiefe befindet (siehe Abb. 6.1). Nach dem Durchmischen hat die Wassersäule dann die Dichte  $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ . Die Veränderung der potentiellen Energie<sup>5</sup> durch das Durchmischen ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Delta E &= g \int_{-h}^0 \rho z dz \\ &\quad - g \int_{-h}^{-h/2} \rho_2 z dz - g \int_{-h/2}^0 \rho_1 z dz \\ &= \frac{gh^2}{8} (\rho_2 - \rho_1) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ist die Wassersäule vor der Durchmischung instabil geschichtet, so gilt  $\rho_1 > \rho_2$ . Dies bedeutet aber, dass  $\Delta E < 0$  gilt, und somit die potentielle Energie der Wassersäule beim Durchmischen einer instabilen Wassersäule abnimmt. Wird dagegen eine stabile Wassersäule durchmischen (über das Wie mache man sich gerade mal keine Sorgen), so nimmt

<sup>5</sup>Man beachte, dass die hier zunächst verwendete potentielle Energie nicht exakt der in BARBI verwendeten Definition entspricht, da keine Hintergrundschichtung abgezogen wurde und auch nicht durch eine Skalierungsdichte geteilt wurde. Beim Berechnen konkreter Zahlenwerte wird dies aber berücksichtigt werden.

die potentielle Energie der Wassersäule zu.

Dass die potentielle Energie beim Vermischen einer instabil geschichteten Wassersäule abnimmt, sollte auch allgemein für instabil geschichtete Wassersäulen gelten. Denn beim Durchmischen einer solchen Säule wird der Massenschwerpunkt weiter nach unten verlagert. Stellt man sich das Integral zur Berechnung der potentiellen Energie als Summe mit der Tiefe gewichteter Dichtepäckchen vor,  $E = g \int_{-h}^0 \rho z dz \approx -g dz \sum_i |z_i| \rho_i$ , so werden tiefere Dichtepäckchen betragsmäßig stärker gewichtet. Verlagert sich schwereres Wasser nach unten, so schlägt das mehr zu Buche, als wenn sich leichteres Wasser nach oben verlagert. Da alles aber mit einem negativen Vorzeichen versehen ist, muss die gesamte Änderung der potentiellen Energie negativ sein.

**Quantitative Änderung** Nun haben wir gesehen, in welche Richtung sich die potentielle Energie beim Durchmischen einer instabilen Wassersäule ändern muss. Aber wir wissen noch nicht genau, wie groß so ein Schritt sein darf.

Um eine erste Abschätzung zu erhalten, betrachten wir wieder das obige Beispiel, das mit konkreten Zahlen durchgerechnet wird.

Die gesamte Wassersäule habe eine Tiefe von  $h = 4000m$ . Die Wassersäule habe weiter zunächst eine konstante vertikale Dichteverteilung von  $\rho_k^*$ , wobei der genaue Zahlenwert für die weiteren Betrachtungen nicht wichtig ist. Dann werde die Dichte in der oberen Hälfte um  $5 kg/m^3$  erhöht und in der unteren Hälfte um  $2 kg/m^3$  vermindert. Und die Skalierungsdichte habe einen Zahlenwert von  $\rho_0^* = 1035 kg/m^3$ . Die Änderung der potentiellen Energie beträgt dann

$$\begin{aligned} \Delta E &= 9.81 \frac{m}{s^2} \frac{(4000 m)^2}{8 \cdot 1035 \frac{kg}{m^3}} \left( (\rho_k^* - 2 \frac{kg}{m^3}) - (\rho_k^* + 5 \frac{kg}{m^3}) \right) \\ &= 9.81 \frac{m}{s^2} \frac{(4000 m)^2}{8 \cdot 1035 \frac{kg}{m^3}} \left( -7 \frac{kg}{m^3} \right) \\ &\approx -1.33 \cdot 10^5 \frac{m^3}{s^2} \end{aligned}$$

Eine Dichtedifferenz von  $7 kg/m^3$  dürfte im Ozean zu den Ausnahmen gehören, so dass man diesen Zahlenwert sicherlich als oberes (genauer unteres) Maß ansehen kann. Nun hat die Tiefe der Wassersäule einen entscheidenden Einfluss auf diesen Zahlenwert, und es wäre sicherlich interessant eine etwas unabhängige Größe zu kennen. Dividiert man die Differenz der potentiellen Energie durch  $h^2$ , so ergibt sich ein Zahlenwert von  $-8.3 \cdot 10^{-3} m/s^2$ .

Diese hier vorgestellte untere Schranke ist nur ein grober Richtwert. Eine etwas bessere Abschätzung kann man erhalten, wenn man den Eintrag an potentieller Energie durch das thermohaline Oberflächenforcing betrachtet. Der hier vorgestellte Konvektionsalgorithmus arbeitet so, dass die Abfrage, ob die Wassersäule instabil ist, nicht zu jedem Integrationszeitschritt geschieht, sondern in einem vorher festgelegten Zeitintervall. Dieses könnte ein Tag oder eine Woche sein. Bezeichnen wir es mal mit  $\Delta t$ . Betrachten wir weiter die Situation, dass eine ruhende Wassersäule an ihrer Oberfläche abgekühlt wird (durch ein negatives  $Q$  in BARBI). Dadurch erhöht sich die Dichte an der Oberfläche und die Wassersäule verliert an potentieller Energie ( $\Delta E$  ist negativ). Über die Zeitdauer  $\Delta t$  verliert die Wassersäule also die potentielle Energie  $\Delta E_Q := \Delta t \cdot Q$ . Wird die Wassersäule dadurch instabil, so soll der nun folgende Konvektionsmechanismus diese Instabilität abbauen. Die Wassermassen werden durchmischt, wobei schweres Wasser nach unten gerät und sich somit die angestaute potentielle Energie auf die Wassersäule verteilt und in der neuen Dichteverteilung widerspiegelt.

Dabei darf die faktische Änderung der potentiellen Energie beim Durchmischen nicht größer sein, als der Betrag  $\Delta E_Q$ , der durch das thermohaline Oberflächenforcing bedingt ist. Gibt man also einen Oberflächendichtefluss  $Q$  vor, so kann man die durch ihn bewirkte Änderung der potentiellen Energie bei der Konvektion abschätzen.

Es sei noch bemerkt, dass neben einem Dichtefluss an der Oberfläche auch andere Quellen existieren, um eine Dichteschichtung zu destabilisieren bzw. potentielle Energie der Wassersäule zu entziehen<sup>6</sup>. Dieses könnte z.B. durch die Umwandlung von kinetischer Energie beim Überströmen eine Rückens geschehen. Nur sind in diesem Fall die Erzeugungsraten von potentieller Energie etwas schwerer zu bestimmen, als es für einen Oberflächendichtefluss der Fall ist, so dass hieraus kein einfaches Kriterium für die zulässige Änderung der potentiellen Energie bei einem Vermischungsvorgang abzuleiten ist.

<sup>6</sup>Man bedenke, dass die potentielle Energie abnimmt, wenn man die Dichte erhöht. Aus diesem Grund wird hier von einer Abnahme gesprochen.

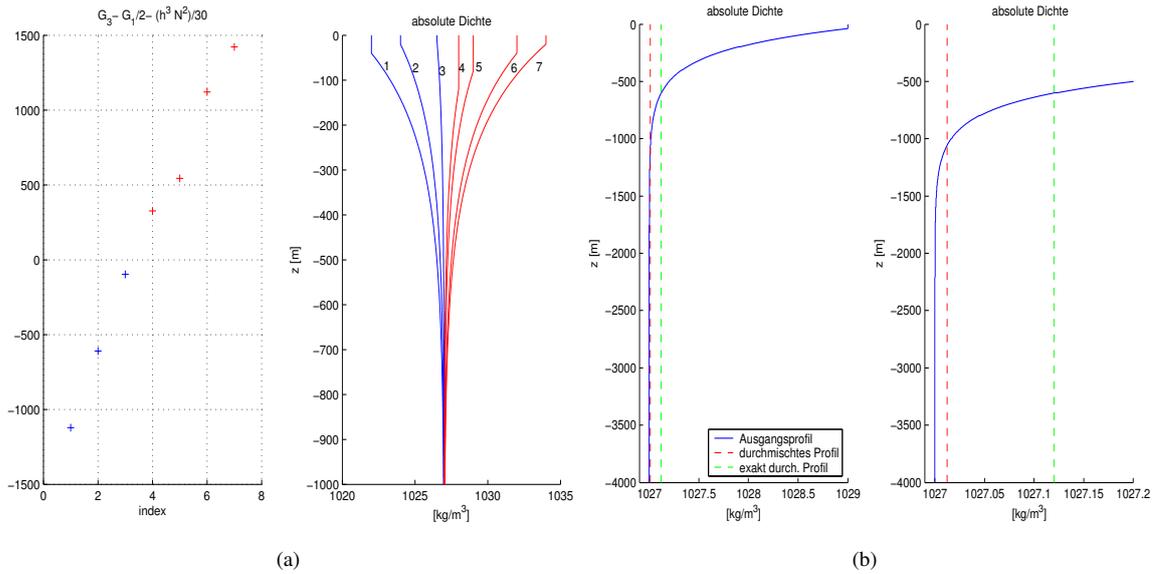


Abbildung 6.2: (a): Veranschaulichung von Beziehung (6.7) anhand von Mixed-Layer-Dichteprofilen. Im rechten Bild sind verschiedene Profile dargestellt, wobei die stabilen rot und die instabilen blau gezeichnet sind. Im linken Bild ist der Zahlenwert der Beziehung (6.7) für die einzelnen Profile gegeben. (b): Dargestellt ist ein instabiles Ausgangsdichteprofil (blau), das nach Gleichung (6.17) bestimmte Durchmischungsprofil (rot gestrichelt) und das exakt berechnete Durchmischungsprofil nach Gleichung (6.10) (grün gestrichelt), wobei das rechte Bild einen Ausschnitt des linken darstellt, um die Lage der Profile zueinander besser herauszuarbeiten.

## 6.4 Testen des Verfahrens mit Mixed-Layer-Profilen

In den beiden nächsten Abschnitten soll untersucht werden, ob das oben beschriebene Verfahren wirklich so etwas wie Konvektion bewirkt, und ob unter Verwendung desselben vernünftige Resultate entstehen.

Anhand von Mixed-Layer-Profilen, die einen monotonen Verlauf haben, soll die Stabilitätsbedingung (6.7) getestet werden. Dabei werden zu einem gegebenen Profil, dessen Stabilität man ja aus dem Verlauf ablesen kann, die ersten beiden Momente berechnet und die Beziehung nachgeprüft. Allerdings kann man dies nicht als Beweis im strengen Sinne ansehen.

Ein mögliches Mixed-Layer-Profil ist z.B. gegeben durch:

$$\rho^*(z) = \begin{cases} \rho_m^* & -h_m \leq z \leq 0 \\ \rho_h^* + (\rho_m^* - \rho_h^*)e^{\frac{z+h_m}{d}} & -h \leq z < -h_m \end{cases} \quad (6.19)$$

Die dimensionsbehaftete potentielle Dichte  $\rho^*$  ist demnach durch die vier Parameter  $h_m, \rho_m^*, \rho_h^*, d$  eindeutig bestimmt. Dabei bezeichnen  $h_m$  die Dicke der durchmischten Schicht,  $\rho_m^*$  die Dichte in dieser,  $d$  eine Skalentiefe für den Übergangsbereich, für die in der Regel  $0 < d \ll h - h_m$  gilt,

und  $\rho_h^*$  die Dichte für  $z = -\infty$  (wegen  $d \ll h - h_m$  gilt schon in guter Näherung  $\rho^*(-h) = \rho_h^*$ ). Ein instabiles Profil ist dann gegeben durch  $\Delta\rho^* := \rho_m^* - \rho_h^* < 0$ . Mit der Skalierungsdichte  $\rho_0^*$  und der Hintergrundschichtung  $\rho^*(z) = \rho_S^* - \frac{N^2 \rho_0^*}{g} z$  ergibt sich dann die Störungsdichte zu  $\rho(z) = (\rho^* - \bar{\rho}^*)/\rho_0^*$ .

In Abb. 6.2 (a) sind für die Parameter  $N = 0.0026 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho_0^* = 1035 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_S^* = 1025 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $h = 4000 \text{ m}$ ,  $d = 200 \text{ m}$  und  $\rho_h^* = 1027 \text{ kg/m}^3$  sowohl stabile als auch instabile Profile dargestellt, die durch negative und positive Werte des Parameters  $\Delta\rho^*$  erzeugt wurden. Aus diesen Profilen wurden die Momente der Störungsdichte berechnet und mit diesen dann die Beziehung (6.7) ausgewertet. Das Ergebnis dieser Auswertung ist im linken Teil dieser Abbildung zu erkennen. Man sieht deutlich, dass Werte, die zu negativen Profilen (blau) gehören, unter der Abszissenachse liegen, während die Werte der stabilen Profile darüber liegen.

Weiterhin ist in Abb. 6.2 (b) die Durchmischung eines instabilen Dichteprofiles mit Hilfe von Beziehung (6.17) zu sehen. Das rechte Teilbild stellt dabei eine Vergrößerung des linken dar. Man erkennt in diesem Teilbild deutlich, dass das Profil nach der Durchmischung (rot) das Profil einer Mischungsdichte sein könnte, da sein konstanter

Dichtewert innerhalb der Dichtewerte des Ausgangsprofils liegt. Zieht man jedoch das nach Gleichung (6.10) exakt berechnete Durchmischungsprofil (grün) hinzu, so ist doch eine leichte Abweichung zu erkennen. Dieses macht also deutlich, dass die Durchmischungsdichten des verwendeten Algorithmuses zwar qualitativ richtig sind, quantitativ aber in einem gewissen Maße von den exakten Profilen abweichen können.

Die Änderung der potentiellen Energie bei diesem Durchmischungsprozess beträgt  $\Delta E = -8.32 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}^2$  und ist, wie gewünscht, negativ. Die Änderung der potentiellen Energie für das exakte Mischungsprofil beträgt hingegen  $\Delta E_{\text{exakt}} = -8.17 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}^2$ , was jedoch um einige Größenordnungen größer ist.

### 6.5 Testen des Verfahrens mit einem Kanalmodell

**Vorbemerkung** In diesem Abschnitt soll nun mit Hilfe eines Kanalmodells untersucht werden, ob das zuvor beschriebene Konvektionsverfahren richtig arbeitet. Dazu wurde dieser Algorithmus in den BARBI-Code eingefügt.

Doch welche Kriterien soll man an dieses Verfahren anlegen, um seine Funktionsfähigkeit zu überprüfen? Ich möchte im Wesentlichen die folgenden zwei verwenden, wobei die Liste der Möglichkeiten sicherlich noch nicht erschöpft ist.

1. Passiert die Konvektion an den richtigen Orten? D.h., wenn das Verfahren einen Ort als Konvektionsort ausgewählt hat, gibt es dann auch einen plausiblen physikalischen Grund dafür?
2. Ist die Änderung der potentiellen Energie während des Konvektionsvorganges von realistischer Größenordnung?

**Das Kanalmodell** Betrachtet wird ein zonaler Kanal mit Topographie der entlang  $60^\circ S$  zentriert ist.

Die Topographie und die Funktionen für den Wind und das thermohaline Forcing (eine graphische Darstellung findet sich in Abb. 6.3) lauten:

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= h_0 + ch \cdot \sin\left(\frac{x}{L} 2\pi\right) \sin^2\left(\frac{y}{B} \pi\right) \\
 Q_i(x, y) &= -Q_0^i \cos\left(\frac{y}{B} \pi\right), \quad i = 1, 3 \\
 \tau(x, y) &= \tau_0 \sin^4\left(\frac{y}{B} \pi\right)
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $L$  die Länge des Kanales und  $B$  dessen Breite. Der Coriolisparameter  $f$  wird mit Hilfe einer  $\beta$ -Ebene approximiert ( $f(y) = f_0 + \beta y$ ,  $f_0 = f(60^\circ S)$ ).

Um sich eine Vorstellung zu machen, wie das thermohaline Forcing arbeitet, bedenke man, dass die Gleichungen für die Dichtemomente von der Form  $\frac{\partial E_i}{\partial t} \sim Q_i$ ,  $i = 1, 3$  sind mit  $E_i = g \int_h^0 \rho z^i dz$ ,  $i = 1, 3$ . Dies bedeutet, dass z.B. eine Dichtezunahme in der Wassersäule ein negatives  $E_i$  ( $z^i < 0$ ) bedingt, was wiederum durch ein negatives  $Q_i$  erreicht werden kann. Möchte man also die Situation simulieren, dass das Wasser im Süden gekühlt und im Norden erwärmt wird, so muss  $Q_i$  im Süden negativ und im Norden positiv sein.

Die Amplitude der Topographie wurde mit  $ch = 500 \text{ m}$  konstant gehalten und die übrigen Modellparameter können der folgenden Tabelle entnommen werden.

ch	500 m
N	$0.0015 \text{ s}^{-1}$
$A_h$	$10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
$A_v$	$10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
$K_h$	$10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
order	3
$\tau_0$	$1.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
$Q_0^i$	$1 \cdot 10^{-5} - 25.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{i+2} \text{ s}^{-3}$

Es wurden nun Läufe mit und ohne thermohalinem Oberflächenantrieb bzw. Windschub durchführt. Im Falle eines thermohalinen Antriebs, sollen die Terme  $Q_0^1$  und  $Q_0^3$  denselben Betrag haben. Das System wurde immer aus dem Nullzustand, der durch Verschwinden aller Dichtemomente und der Stromfunktion gegeben ist, in einen fast stationären Zustand integriert. Weiterhin wurde der Konvektionsalgorithmus wahlweise ein- oder ausgeschaltet, um zu untersuchen, ob und welchen Einfluss dieser Algorithmus auf das Ergebnis hat. Für die atmosphärischen Antriebe wurden schließlich vier Fälle ausgewählt, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind:

	$\tau_0 [\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}]$	$Q_0^i [\frac{\text{m}^{i+2}}{\text{s}^3}]$	$B_T^0 [\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}]$	$\Delta t Q_0^1 [\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}]$
T0	$10^{-4}$	-	-	-
T1	$10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	-46.5	-6.0
T2	$10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-5}$	-465.0	-60.4
T3	-	$10 \cdot 10^{-5}$	-465.0	-60.4

Wie man an dieser Tabelle erkennen kann, sind aus den  $Q$ -Forcing Werten zwei weitere Größen berechnet worden. Zunächst sieht man in der zweiten Spalte von rechts den entsprechenden Oberflächenwärmefluss, der nach der im

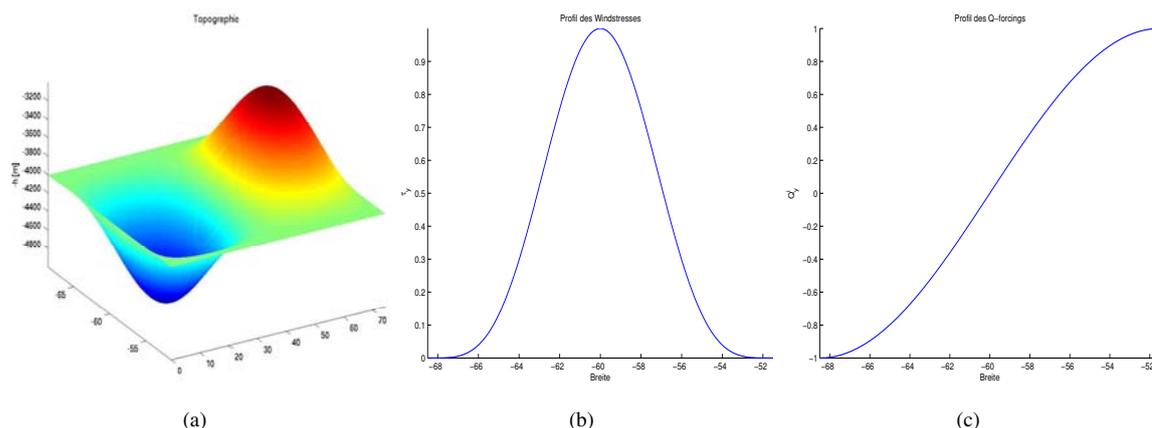


Abbildung 6.3: (a) Beispiel einer möglichen Topographie mit der Amplitude  $ch = 1000m$ , (b) meridionales Profil des Windantriebes und (c) meridionales Profil des thermohalinen Forcings für die Experimente zum Konvektionsalgorithmus mit BARBI.

Anhang A.1 beschriebenen Methode über die Beziehung  $B_T^0 = -4.65 \cdot 10^6 |Q_0^1| Watt/m^2$  berechnet wurde<sup>7</sup>.

Um sich eine Vorstellung davon zu machen, welche Wärmeflüsse im Ozean unter Konvektionsbedingungen herrschen, kann man u.a. die Arbeit von Marshall und Schott (1999) [39] zu Rate ziehen. Diese haben für Konvektionsgebiete in der Labrador See bzw. in der Grönland See (beide zum Nordatlantik gehörend) sensible Wärmeflüsse<sup>8</sup> in der Größenordnung von  $-220$  bzw.  $-252 Wm^{-2}$  und totale Wärmeflüsse<sup>9</sup> von  $-412$  bzw.  $-495 Wm^{-2}$  beobachtet. Auch im Mittelmeer wurden Konvektionsgebiete untersucht, wobei hier die entsprechenden Flüsse bei  $-46$  bzw.  $-204 Wm^{-2}$  lagen. Unter der Annahme, dass die hier verwendete Umrechnung einigermaßen stimmig ist, liegen die verwendeten thermohalinen Antriebe in BARBI in der entsprechenden Größenordnung.

In der rechten Spalte schließlich ist die maximale Menge an potentieller Energie angegeben, die durch das entsprechende Q-Forcing an der südlichen Kanalwand während eines Konvektionsintervalls von 7 Tagen zugeführt wird. Dieser Betrag sollte bei einem Konvektionsschritt nach den zuvor ausgeführten Überlegungen nicht überschritten werden.

Kommen wir nun zu den Ergebnissen der Experimente. In der folgenden Tabelle sind die Kanaltransporte für die vier verschiedenen Oberflächenantriebe zusammengestellt, wobei die zeitlichen Verläufe bis zum Erreichen des stati-

onären Zustandes in Abb. 6.4 und die Struktur der Stromfunktion am Ende der Integration in Abb. 6.7 zu sehen sind.

Lauf	ohne Konvektion [Sv]	mit Konvektion [Sv]
T0	85.8	84.3
T1	133.9	137.7
T2	594.0	582.3
T3	389.4	313.2

Wie man erkennen kann, erreichen alle Transporte bis auf den Fall T3 mit Konvektion in der betrachteten Zeit einen quasi stationären Zustand. Weiterhin stimmen die stationären Kanaltransporte mit und ohne Konvektion für die Fälle T0, T1 und T2 weitgehend überein, wobei der zeitliche Verlauf bis zum Erreichen dieser Werte deutlich unterschiedlich ist. Alle Experimente mit Konvektion zeigen weiterhin mehr oder weniger starke Überschinger, bevor sie sich dem Verlauf ohne Konvektion wieder annähern. Dieses Verhalten hängt, wie sich später zeigen wird, vermutlich mit dem Konvektionsalgorithmus zusammen.

Kommen wir zur Überprüfung des ersten Kriteriums, ob die Konvektionsorte physikalisch sinnvoll sind. Zur Beantwortung dieser Frage kann man sich zunächst Abb. 6.5 anschauen, die die mittlere Änderung der potentiellen Energie an jedem Ort, während der Integration in den stationären Zustand für die vier Fälle darstellt. Dabei achte man erst mal nicht auf die Zahlenwerte, sondern man konzentriere sich nur auf die Orte, an denen diese von Null verschieden sind, und an denen also Konvektion stattfindet.

Betrachtet man zunächst die Läufe T2 und T3, die sich durch ein starkes 'Kühlen' im Süden des Kanales auszeichnen, so liegen in diesen Fällen die Konvektionsorte

<sup>7</sup>In diese Beziehung ist die Betragszahl des  $Q_0^1$  Termes einzusetzen, dessen Einheit  $m^3/s^3$  ist.

<sup>8</sup>Diese beruhen auf der Temperaturdifferenz zwischen Ozean und Atmosphäre.

<sup>9</sup>Hier kommen noch Faktoren wie z.B. Verdunstung und Niederschlag oder die durch den Ozean abgegebene Wärmestrahlung hinzu.

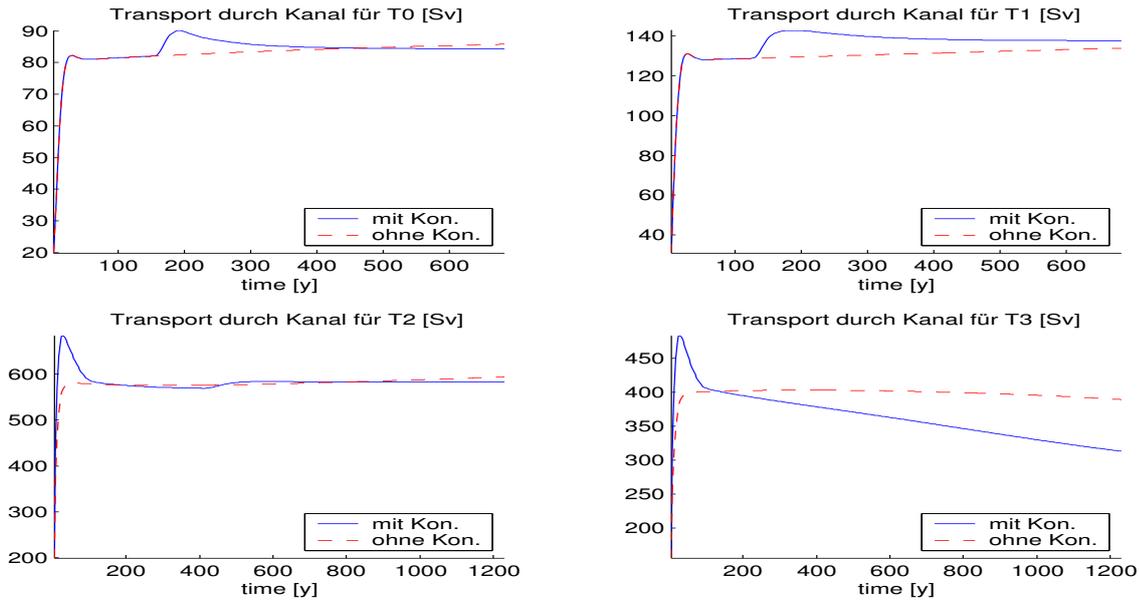


Abbildung 6.4: Entwicklung des Kanaltransportes bis zum Erreichen des stationären Zustandes: **oben links** für T0, **oben rechts** für T1, **unten links** für T2 und **unten rechts** für T3.

tatsächlich im Süden. Diese Orte scheinen somit physikalisch erklärbar zu sein, was bedeutet, dass der Konvektionsalgorithmus in diesen Fällen vernünftig handelt.

Etwas anders sieht es für die Fälle T0 und T1 aus, in denen der Wind die dominante Antriebsquelle darstellt. Hier befinden sich die Konvektionsorte nicht mehr im Süden, sondern ziemlich genau über der südlichen Flanke des Hügels der Bodentopographie. Mir ist an dieser Stelle nicht ganz klar, warum hier Konvektion stattfinden sollte. Ob sich hier tiefe schwerere Wassermassen über leichtere schieben? Oder ob das Ekmanpumpen, das durch den Wind bedingt ist und schwere bzw. leichtere Wassermassen erzeugen kann, hier einen Einfluss zeigt? Oder ob sich der Algorithmus hier scheinbar irrt? Genau kann ich es nicht sagen. Aber wie sich etwas später zeigen wird, spricht vieles für ein Versagen des Verfahrens an dieser Stelle.

Doch wie sieht es mit dem zweiten Kriterium, der Änderung der potentiellen Energie während eines Durchmischungsprozesses aus. Wie erwähnt, kann hier wieder Abb. 6.5 helfen. Betrachten wir zunächst wieder die Läufe T2 und T3, so sind die mittleren Änderungen durchaus im Bereich des Sollwertes von  $-60 \text{ m}^3/\text{s}^2$  und liegen nicht um mehrere Größenordnungen darunter. Dieses Bild bestätigt sich auch, wenn man das Verhältnis aus mittlerer Änderung der potentieller Energie und dem lokalen Eintrag während eines Konvektionsintervalls  $\Delta E_1(x, y)/(\Delta t Q^1(x, y))$  für diese beiden Läufe in Abb. 6.6 betrachtet. Die sich ergebenden

Zahlenwerte übersteigen einen Wert von 1.4 nicht. Für diese vom Q-Forcing dominierten Läufe scheint der Konvektionsmechanismus vernünftig zu arbeiten.

Ob die Änderungen für die Läufe T0 und T1 realistisch sind, kann ich nicht genau sagen. Ohne dominante Oberflächendichteflüsse kann man nicht genau abschätzen, wie viel potentielle Energie insgesamt in das System einge-

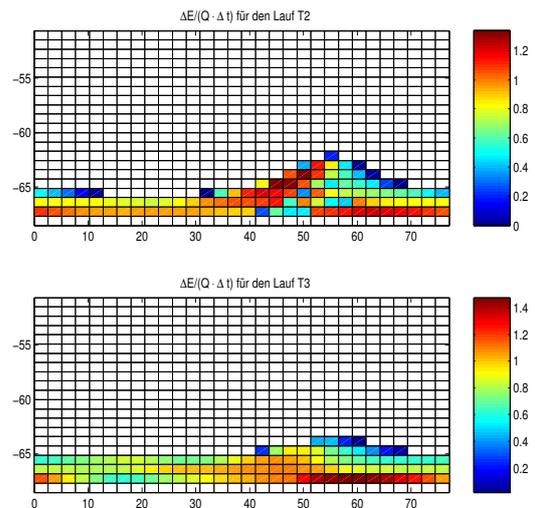


Abbildung 6.6: Verhältnis zwischen der mittleren Änderung der potentiellen Energie während eines Durchmischungsprozesses und dem Eintrag an potentieller Energie durch das Q-Forcing während eines Konvektionsintervalls:  $\Delta E_1/(Q_1 \cdot \Delta t)$  für die Läufe T2 und T3.

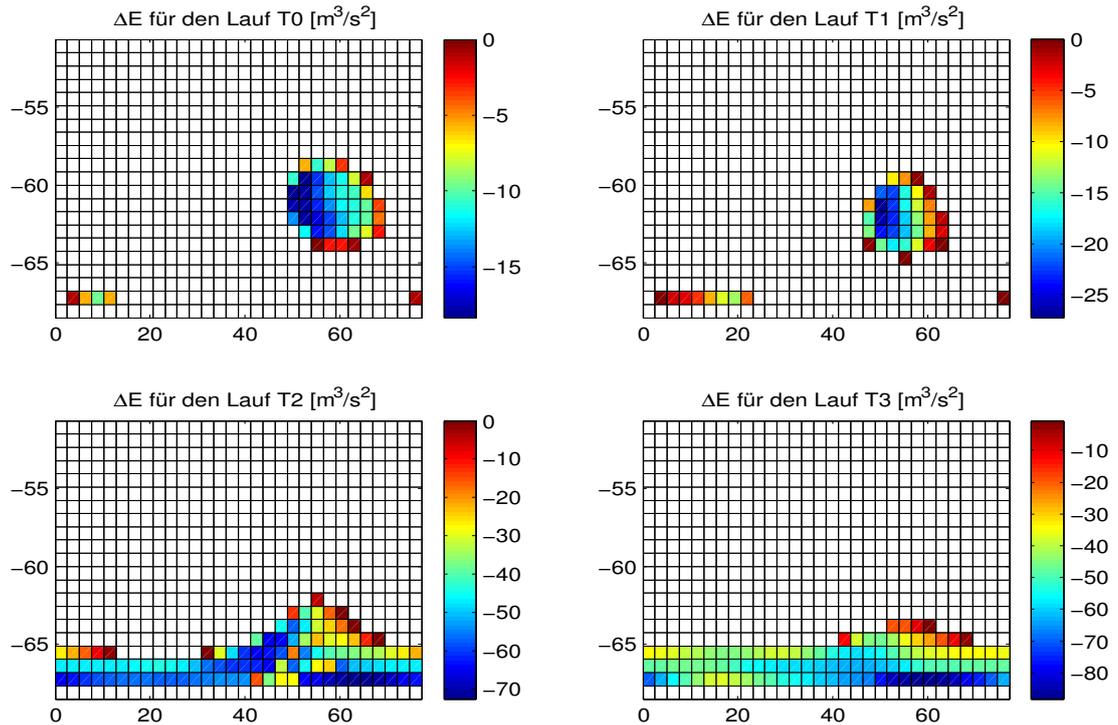


Abbildung 6.5: Diese Abbildung zeigt die mittlere Änderung der potentiellen Energie  $\Delta E_1$  bei einem Durchmischungsvorgang für die vier verschiedenen Oberflächenantriebe. **Oben links** für T0, **oben rechts** für T1, **unten links** für T2 und **unten rechts** für T3.

bracht wird. Es fehlt mir auch eine exakte Vorstellung, wie Energie bei Anströmen eines Hügels umgewandelt wird. Dennoch liegen die Änderungen der potentiellen Energie beim Durchmischen in einem vertretbaren Rahmen.

An dieser Stelle kann ich aus meiner Sicht nicht mehr Erkenntnisse aus BARBI allein zur Beurteilung des Verfahrens gewinnen. Aus diesem Grund möchte ich ein weiteres numerisches Modell zu Rate ziehen, das mit Konvektion bereits gut umgehen kann.

**Vergleich mit SPFLAME** Es handelt sich um das Modell *SPFLAME*, eine Weiterentwicklung des *FLAME*-Modells, das wiederum auf MOM-2 aufbaut. Der Vorteil dieses Modells ist, dass es ein 3-dimensionales Modell ist, das die vertikale Dichteverteilung auflöst und wahlweise einen Konvektionsalgorithmus<sup>10</sup> verwendet.

Die Modelltopographie und die horizontale Auflösung sind identisch mit den BARBI-Läufen, und es werden insgesamt 26 vertikale Schichten verwendet. Das Modell verwendet ebenfalls eine voreingestellte Temperaturschichtung mit derselben Stabilitätsfrequenz. Weiterhin hat der

<sup>10</sup>Hier wird ein explizites Konvektionsschema von Stephan Rahmstorf verwendet, das Instabilitäten in der Wassersäule schnell und gut beseitigt.

Windantrieb dieselbe Struktur und Intensität. Ein wahlweise thermohalines Oberflächenforcing wird durch eine feste Verteilung der Oberflächentemperatur vorgegeben, die denselben meridionalen Verlauf wie das BARBI-Q-Forcing und eine Temperaturamplitude von  $10^\circ\text{C}$  besitzt, wobei im Süden gekühlt und im Norden erwärmt wird. Die Modellparameter sind vergleichbar mit den BARBI-Parametern, wobei die in SPFLAME hinzukommende vertikale Viskosität einen Wert von  $10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  und die vertikale Diffusivität einen Wert von  $10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  besitzt.

Mit SPFLAME wurden nun vier verschiedene Läufe durchgeführt:

1. nur Wind ohne Konvektion
2. nur Wind mit Konvektion
3. Wind und Temperaturforcing ohne Konvektion
4. Wind und Temperaturforcing mit Konvektion

Die sich aus dem Ruhezustand unter Einfluss der äußeren Antriebe einstellenden Kanaltransporte sind in der folgenden Tabelle aufgelistet, während die zeitliche Entwicklung des Kanaltransportes in Abb. 6.8 zu sehen ist.

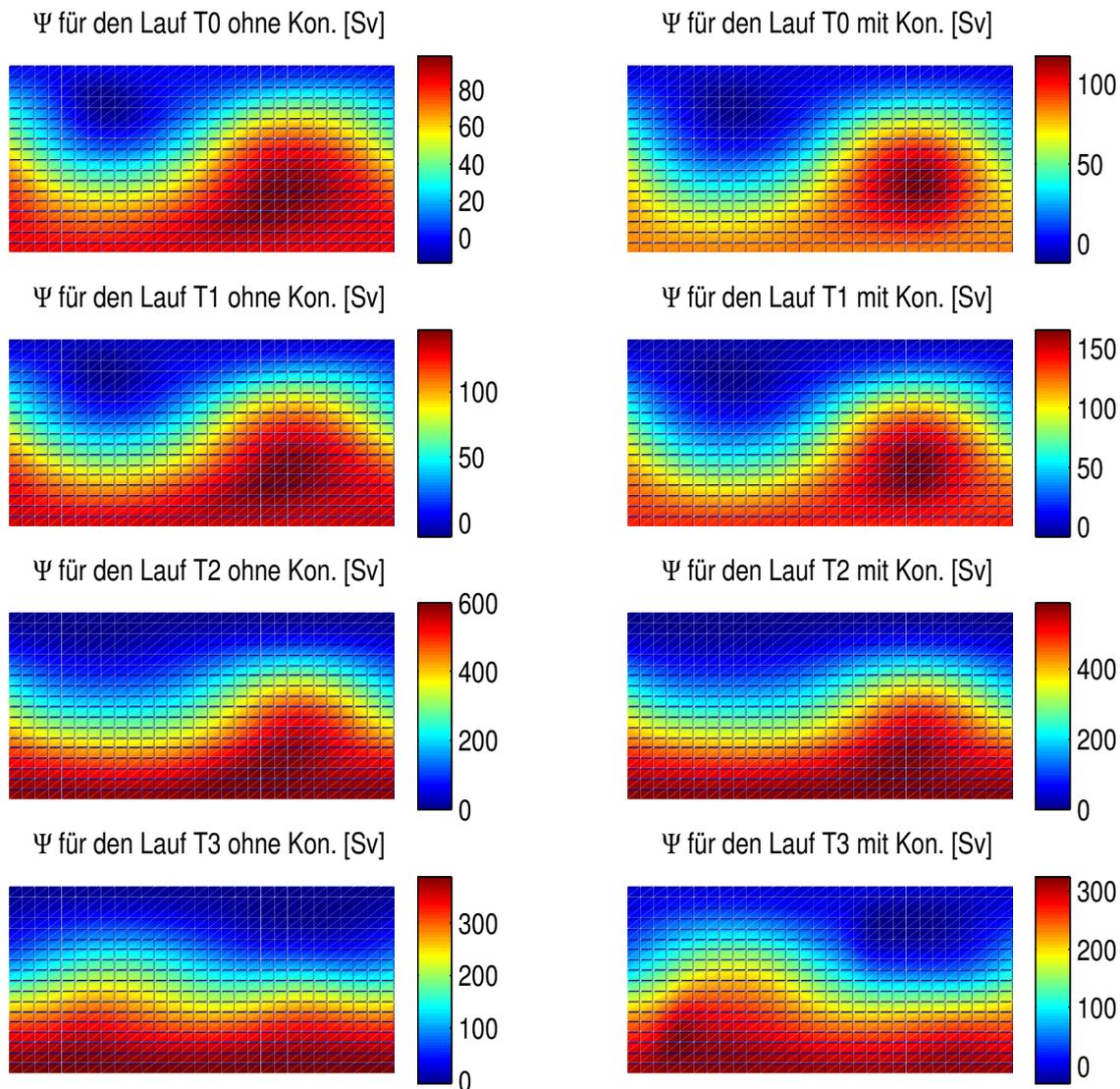


Abbildung 6.7: Stromfunktion am Ende der Integration für die verschiedenen BARBI Läufe. **Links** ohne Konvektion, **rechts** mit Konvektion.

Temp.-forc.	ohne Konvektion	mit Konvektion
ohne	32.8 Sv	32.8 Sv
mit	105.4 Sv	75.5 Sv

Wie an Abb. 6.8 zu sehen ist, haben die Transporte ohne Temperatur-Forcing den stationären Zustand noch nicht erreicht. Dennoch sieht man an den Zeitreihen, dass die Verwendung des Konvektionsschemas keinen nennenswerten Einfluss in SPFLAME auf den Kanaltransport hat.

Anders sieht es für den Fall mit Temperaturforcing aus, für den sich sowohl die zeitliche Entwicklung als auch die Transporte selber unterscheiden, wobei die Konvektion den Transport zu verringern scheint. Diesen Effekt sieht man übrigens auch in BARBI in kleinem Umfang für den Lauf T2 und besonders für den Lauf T3.

Auffallender ist der auch in SPFLAME auftretende Überschwinger während der zeitlichen Integration unter Einfluss des Temperaturforcings mit eingeschaltetem Konvektionsschema. Tatsächlich scheint dieser Überschwinger, wie schon in den BARBI-Läufen angedeutet, an der Konvektion zu liegen, was wiederum zeigt, dass BARBI qualitativ in dieser Beziehung keine schlechten Ergebnisse liefert.

Doch wie steht es mit den Konvektionstypen<sup>11</sup> in SPFLAME? Diese sind in der unteren Reihe der Abb. 6.8 zu se-

<sup>11</sup>Ob an einem Ort in SPFLAME Konvektion stattgefunden hat, wird nicht aus dem Modell selbst, sondern an Hand der abgespeicherten Temperaturprofile nachträglich entschieden. Ist die vertikale Temperaturverteilung über 90% der Wassersäule konstant, so wird dies als ein tiefes Konvektionseignis gedeutet. Andererseits werden so Orte ausgeblendet, an denen weniger ausgeprägte Konvektionseignisse stattgefunden haben, wie etwa beim Überströmen eines Hügels.

hen. Auf dem linken Bild erkennt man, dass ohne Temperaturforcing keine tiefe Konvektion im betrachteten Integrationszeitraum stattfindet, was ja eigentlich ein unerwünschtes Ergebnis ist. Zeigt doch BARBI in diesem Fall durchaus Orte, an den Konvektion passieren soll. Etwas besser sieht es im Fall mit Temperatur-Forcing aus, bei dem wie auch schon in BARBI die Konvektionsorte am südlichen Rand liegen.

Schließlich kann man noch die Struktur der Stromfunktion als Indiz für das Funktionieren oder Scheitern des Verfahrens zu Rate ziehen. Betrachtet man die Stromfunktion für SPFLAME mit und ohne Konvektion unter Einfluss eines Temperaturforcings (siehe Abb. 6.9), so erkennt man, dass die Stromlinien mit Konvektion stärker der Topographie bzw. den  $f/h$ -Konturen folgen, wie es für eine barotrope Strömung mit einer konstanten Dichte zu beobachten wäre. Dieses ist auch verständlich, da die Konvektion die Dichte eben vertikal homogenisiert.

Ein ähnliches Verhalten kann für BARBI in Abb. 6.7 für die Läufe T0 und T1 beobachtet werden. Merkwürdigerweise jedoch nicht für die Läufe T2 und T3, die bisher doch ganz plausibel erschienen.

**Kann der Konvektionsmechanismus zur numerischen Stabilität von BARBI beitragen?** Zum Abschluss soll noch eine weitere interessante Beobachtung geschildert werden. Wie im Kapitel zu den Sensitivitätsstudien beschrieben, kann BARBI instabiles Verhalten zeigen, wobei mir der genaue Grund hierfür noch nicht klar ist. Aber ich habe ja schon ausgeführt, warum ich glaube, dass die Probleme mit der potentiellen Energie zumindest ansatzweise verbunden sein könnten.

Nun habe ich das Kanalmodell auch für eine Topographieamplitude von  $ch = 1500\text{ m}$  laufen lassen, wobei der Konvektionsalgorithmus wahlweise aus- bzw. eingeschaltet war. Dabei kam es zu dem unerwarteten Verhalten, dass die Läufe ohne Konvektion unter den Antrieben T0 und T1 instabil waren, während die entsprechenden Läufe mit Konvektion ein numerisch stabiles Verhalten zeigten. Für den Antrieb T2 waren aber sowohl der Lauf ohne als auch der Lauf mit Konvektion instabil. Die Transporte zu diesen Läufen sind in Abb. 6.10 zu sehen.

Die Konvektion scheint das System in einem gewissen Rahmen stabilisieren zu können. Nun tut sie dieses ja ganz physikalisch, in dem instabile Wassersäulen vermischt werden. Aus diesem Grund scheint die Vermutung nicht ganz abwegig zu sein, dass es sich bei dieser Instabilität nicht

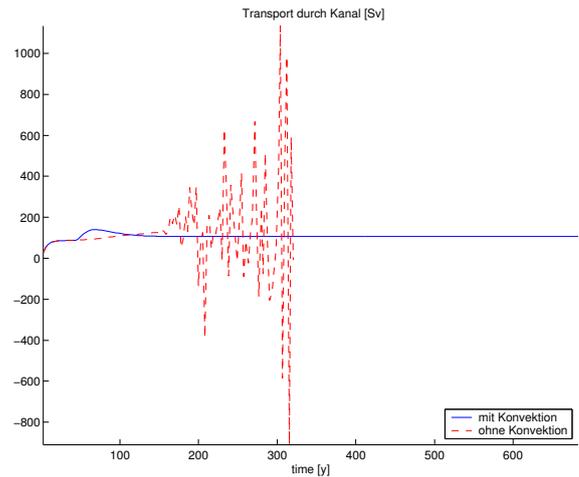


Abbildung 6.10: Kanaltransport für BARBI bei einer Topographieamplitude von  $ch = 1500\text{ m}$  und dem Antrieb T1. Der Transport mit Konvektion ist blau und der ohne rot dargestellt.

um ein numerisches Problem sondern vielleicht um physikalisches. Dennoch kann ich hier keine endgültige Aussage machen.

## 6.6 Zusammenfassung

Ich möchte nun die Ergebnisse dieses Kapitels zusammenstellen, um eine abschließende Bewertung dieses Verfahrens aus meiner Sicht zu geben.

Das hier vorgestellte Verfahren scheint zumindest für ein vorhandenes dominantes Q-Forcing die Orte der Konvektion adäquat wiederzugeben. Weiterhin sind die Änderungen der potentiellen Energie beim Durchmischen in einem vertretbaren Bereich. Aus diesem Grund arbeitet das hier vorgestellte Konvektionsschema akzeptabel.

Anders sieht es aber aus, wenn man nur einen Windantrieb verwendet. Hier scheint das Verfahren nicht die richtigen Konvektionsorte zu finden, wobei diese Frage noch nicht abschließend geklärt ist. Die Änderung der potentiellen Energie bleibt aber auch für diesen Fall im Rahmen.

Als weitere positive Eigenschaft dieses Verfahrens sehe ich, dass es eine gewisse stabilisierende Wirkung auf die numerische Integration ausübt.

Als abschließenden Rat geben würde ich dieses Verfahren höchstens dann einsetzen, wenn ein dominantes Q-Forcing im Spiel ist, da hier mit tiefer Konvektion zu rechnen ist. Dennoch bedarf es weiterer Tests, um die Wirksamkeit dieses Verfahrens zu be- oder zu widerlegen.

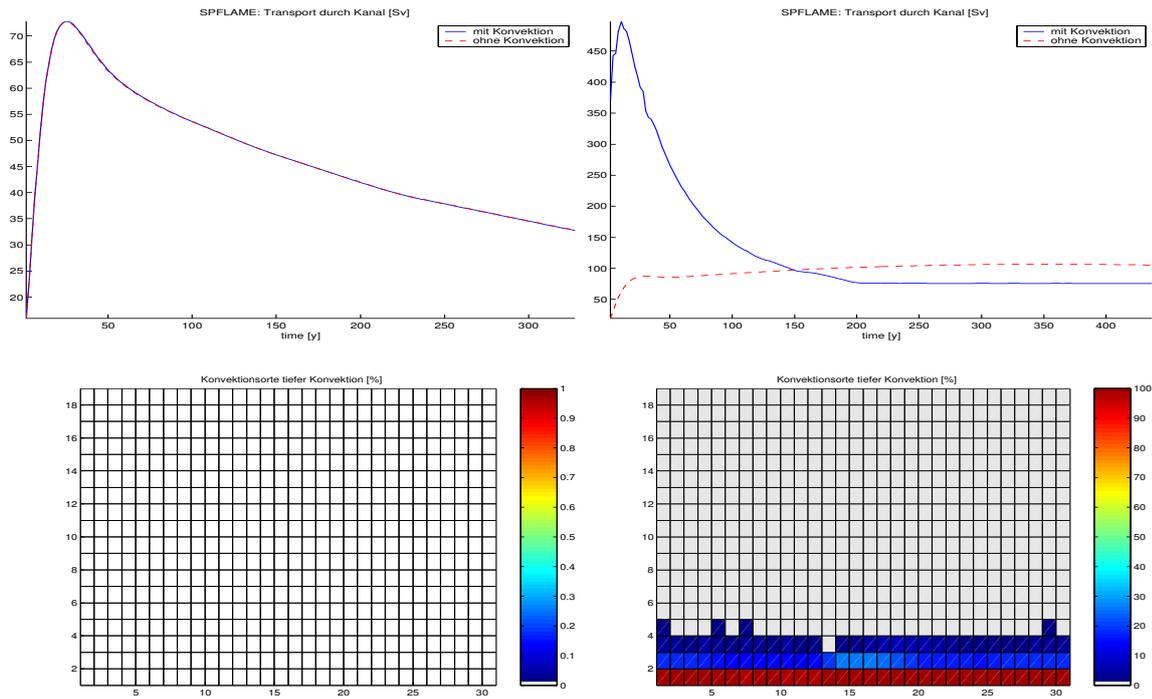


Abbildung 6.8: **Obere Reihe:** Zeitlicher Verlauf des Kanaltransportes für die vier SPFLAME-Experimente. Links ohne Temperaturforcing, rechts mit. **Untere Reihe:** Hier sind die Orte dargestellt, an denen in SPFLAME Konvektion stattfindet. Links ohne Temperaturforcing, rechts mit.

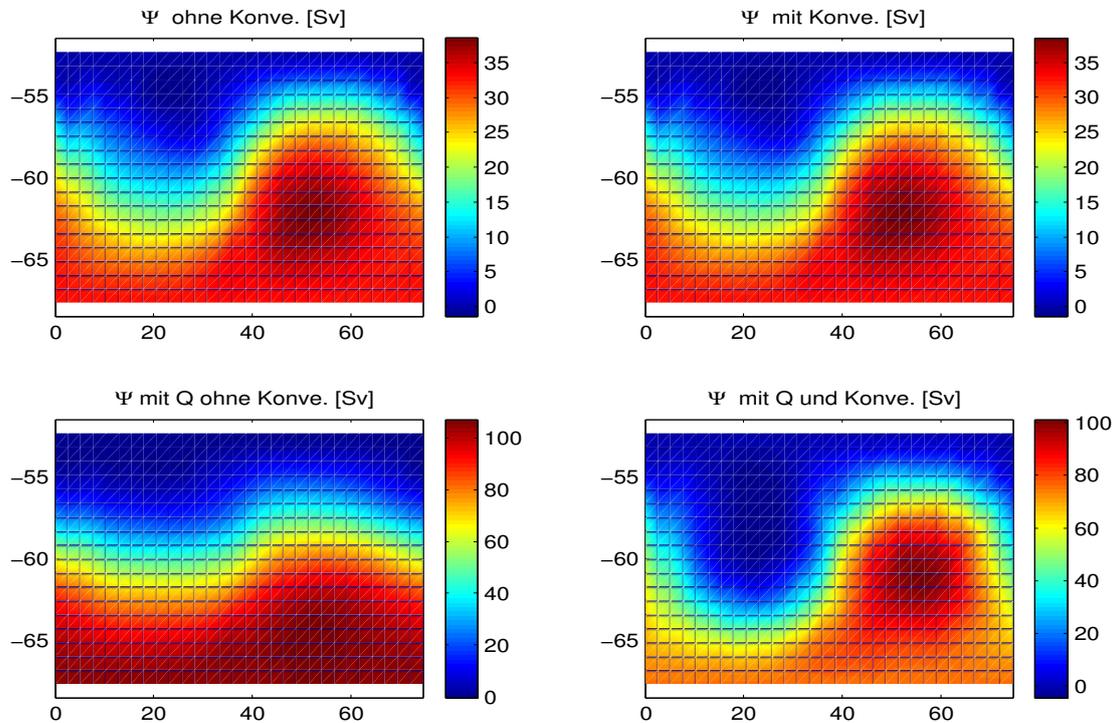


Abbildung 6.9: Struktur der Stromfunktion für SPFLAME am Ende der Integration. **Obere Reihe:** Ohne Temperaturforcing (Q). **Untere Reihe:** Mit Temperaturforcing (Q).

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Diese Arbeit hatte zum Inhalt, die Variabilität im Südlichen Ozean mit Hilfe des einfachen Ozeanmodells BARBI (Olbers und Eden (2003) [45]) zu untersuchen, wobei die Schwerpunkte auf Aspekten der Wellenausbreitung und dem Transport des Antarktischen Zirkumpolarstromes (ACC) durch die Drakepassage und dessen Schwankungen lagen.

Da es zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht viele Untersuchungen mit BARBI<sup>1</sup> gibt, ist neben den inhaltlichen Fragen auch die Tauglichkeit des Modells selbst von großem Interesse. Diese Arbeit hat somit auch die Aufgabe, diese unter Beweis bzw. in Frage zu stellen. Dies erklärt auch, warum diese Arbeit eher als eine experimentelle als eine theoretische Studie betrachtet werden kann.

Generell wurden im Rahmen dieser Arbeit viele Fragestellungen nur angerissen und vielleicht recht oberflächlich behandelt. Andererseits war es auf diese Weise möglich, die Vielseitigkeit des Modells unter Beweis zu stellen.

Kommen wir nun zur Zusammenstellung der Resultate.

**Wellenausbreitung** Nachdem das Modell im zweiten Kapitel vorgestellt wurde, und das dritte Kapitel der Bestimmung geeigneter Modellparameter für die weiteren Experimente diente, wurden im vierten Kapitel drei Arten von Wellenexperimenten betrachtet.

Zunächst wurde mit Hilfe von Kanalexperimenten untersucht, welchen Einfluss ein meridionaler Rücken auf die Ausbreitung einer Dichteanomalie hat. Dabei konnte gezeigt werden, dass der JEBAR-Term, der das barotrope mit dem baroklinen Feld unter Mithilfe von Topographie koppelt, einen Doppelrolle übernimmt. Für kleine Höhen des Rückens scheint er einer Ausbreitung eher im Wege zu stehen, während er diese für große Rückenhöhen eher begünstigt bzw. scheinbar erst ermöglicht.

Obgleich keine allgemeingültigen Regeln abgeleitet werden konnten, ergaben die Experimente und die theoretischen Ausführungen, dass die Bodentopographie global einen beschleunigenden Einfluss von der richtigen Größenordnung auf die Ausbreitung dieser Wellen haben kann.

Das dritte Experiment (siehe Abb. 7.1) beschäftigte sich mit einer u.a. von Ivchenko et al. (2004) [34] aufgeworfenen Fragestellung, wie und ob Dichteanomalien in den südlichen Breiten einen Einfluss auf den übrigen Ozean haben können. Dafür wurde BARBI auf einem globalen Modell-

Das dritte Experiment (siehe Abb. 7.1) beschäftigte sich mit einer u.a. von Ivchenko et al. (2004) [34] aufgeworfenen Fragestellung, wie und ob Dichteanomalien in den südlichen Breiten einen Einfluss auf den übrigen Ozean haben können. Dafür wurde BARBI auf einem globalen Modell-

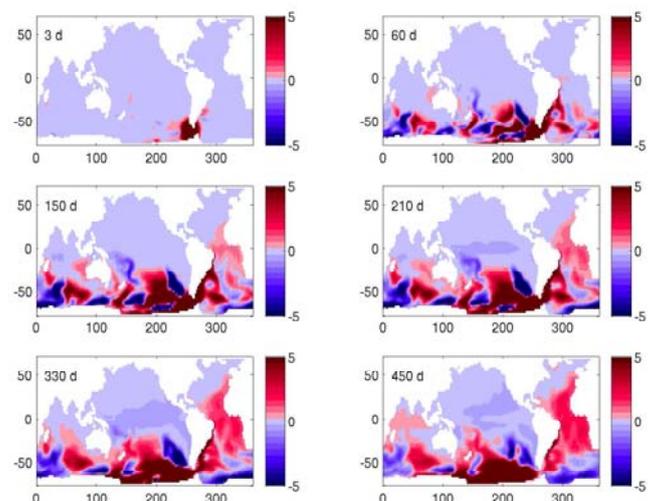


Abbildung 7.1: Ausbreitung einer Dichteanomalie aus der Region der Drakepassage in die weltweiten Ozeanbecken mit Hilfe von Kelvin- und Rossbywellen.

<sup>1</sup>Mir sind momentan nur die Arbeiten von Olbers und Eden (2003) [45], von Fabian Schlösser (2005) [52] und von Olbers et al. (2006) [46] bekannt.

gebiet sowohl für einen flachen Boden als auch mit realistischer Bodentopographie integriert. Es konnte gezeigt werden, dass man die Thesen von Ivchenko et al. (2004) [34] qualitativ unterstützen kann. Aus den Modellergebnissen muss man allerdings den Schluss ziehen, dass dieser Einfluss eher klein ist. Es muss jedoch eingeräumt werden, dass die Signale in den höheren Breiten in der Realität stärker sein könnten als hier im Modell, was darin liegt, dass Kelvinwellen in numerischen Modellen stärker gedämpft sein können. Weiterhin könnten die Signale in der Realität auch schneller sein, da, wie im 2. Kapitel gezeigt, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Kelvinwellen in numerischen Modellen kleiner sein kann.

**Trend im Transport durch die Drakepassage** Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit verschiedenen Fragestellungen rund um den Transport durch die Drakepassage.

In Anlehnung an die Untersuchungen von Cunningham et al. (2003) [15] konnte zunächst mit einer realistischen Modelltopographie und realistischen Winden gezeigt werden, dass es entgegen ihren Beobachtungen durchaus einen positiven Trend (siehe Abb. 7.2) im Transport durch die Drakepassage seit Mitte des letzten Jahrhunderts (insbesondere seit den 70er Jahren) geben kann. Dieses scheint durch die sich verstärkenden Winde über dem südlichen Ozean bedingt zu sein, was sich auch im SAM-Index niederschlägt.

Zusätzlich haben Experimente mit Winden, die mit Hilfe des SAM-Indexes von Martin Visbeck generiert wurden, gezeigt, dass seit 1880 ein solch ansteigender Trend durchaus im Rahmen der natürlichen Schwankungen liegen könnte.

**Zusammenhang mit dem Windschub** Mit Hilfe von Korrelationsuntersuchungen konnte gezeigt werden, dass der zonale Windstress insbesondere im südlichen Bereich der Drakepassage von großer Bedeutung ist.

Es konnte für realistische Winde und eine realistische Bodentopographie weiterhin gezeigt werden, dass man (nach dem Vorschlag von Wearn and Baker (1980) [66]) die Reaktion des Transportes auf Veränderungen im Windschub auf einer Zeitskala bis 500 Tagen mit einem einfachen dynamischen Modell beschreiben kann, dessen Zeitkonstante in der Größenordnung von 7 bis 11 Tagen liegt und das barokline Effekte unberücksichtigt lässt. Nur für Perioden bis ca. 20 Tagen scheint dieser Zusammenhang durch barotrope Rossbywellen gestört zu werden, wobei es sogar Hinweise

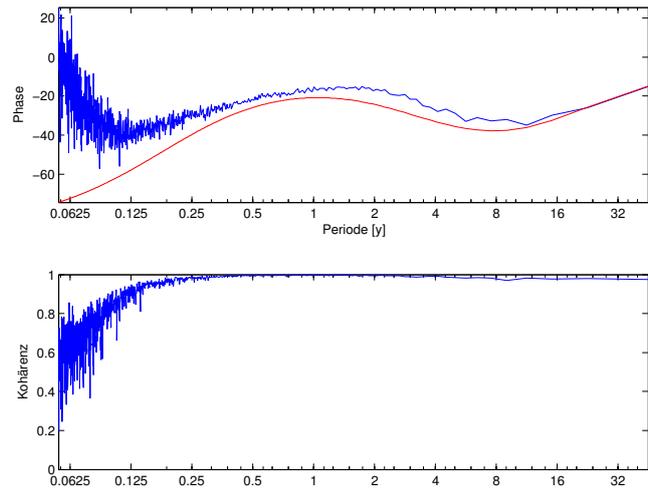


Abbildung 7.3: Kohärenz und Phasenbeziehung zwischen dem Kanaltransport und dem Windantrieb. Die rote Linie beschreibt die Phase nach dem einfachen linearen Modell mit den angepassten Konstanten.

auf einen von Wilbert Weijer (2005) [67] postulierten resonanten Mode mit einer Resonanzperiode zwischen 5 und 12 Tagen gibt.

Dieses von Wearn und Baker vorgeschlagene lineare dynamische Modell wurde um die barokline Komponente erweitert, und es konnte mit Hilfe von Kanalexperimenten gezeigt werden, dass man auch die barokline Dynamik und den Wechsel von der barotropen zur baroklinen Zeitskala gut durch dieses Modell nachvollziehen kann (siehe Abb. 7.3). In diesem Zusammenhang wurden 3 Verfahren vorgestellt, um die entsprechenden Zeitkonstanten zu ermitteln.

**Bodendruck - potentielle Energie** Es konnte weiterhin gezeigt werden, dass der Bodendruck entlang der antarktischen Küste eine sehr große Korrelation mit dem Transport aufweist, wobei die Struktur des Korrelationsmusters maßgeblich durch die nicht blockierten  $f/h$ -Konturen geprägt ist (siehe Abb. 7.4).

Die Bedeutung der  $f/h$ -Konturen für die hohen Korrelationen wurde darauf hin weiter mit einfachen Kanalmodellen untersucht, wobei festgestellt wurde, dass die Korrelationen betragsmäßig kleiner werden, sobald die  $f/h$ -Konturen vollständig blockiert sind. In diesem Fall gewinnt die Korrelation mit der meridionalen Differenz der potentiellen Energie an Bedeutung.

Dieser Zusammenhang bzw. das Wechselspiel zwischen Transport und Bodendruck auf der einen Seite bzw. Transport und Differenz der potentielle Energie auf der ande-

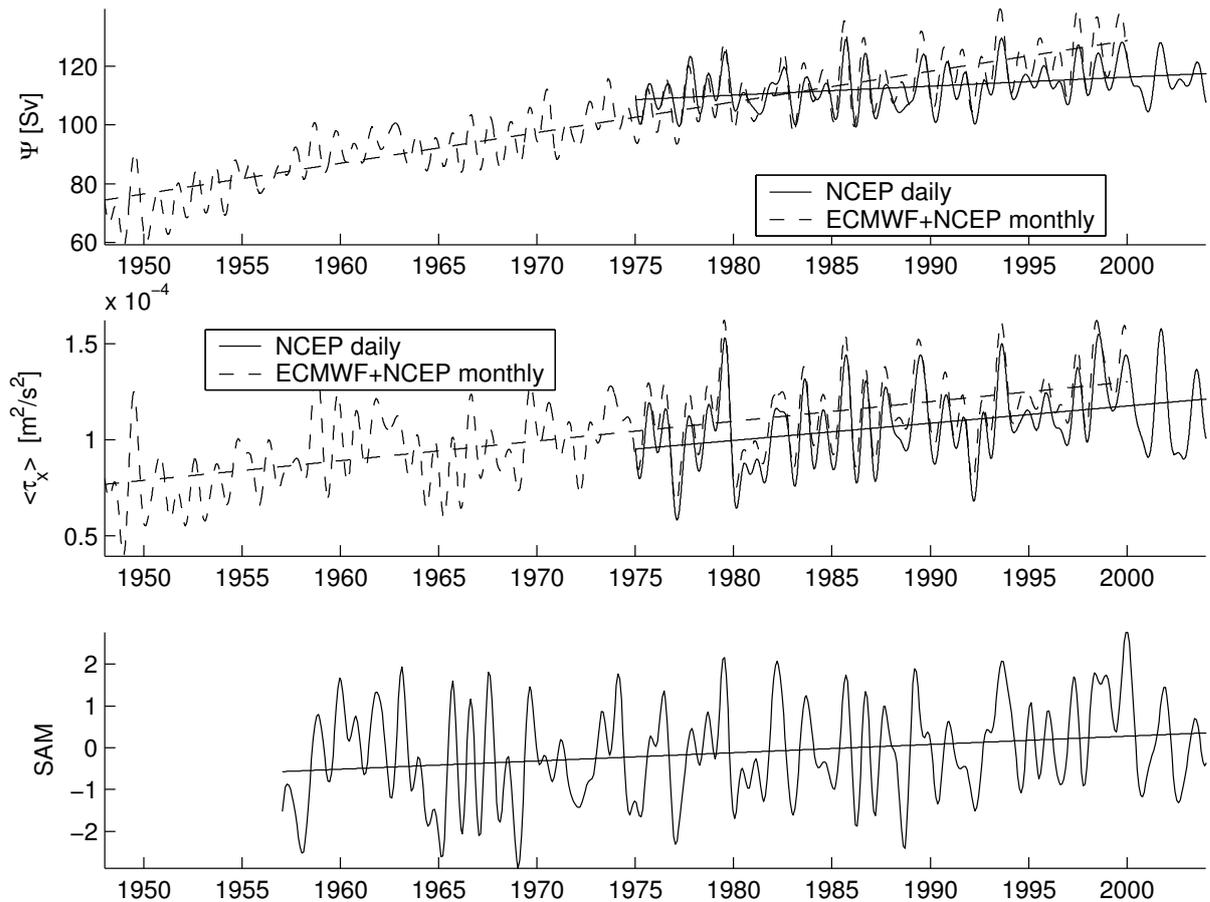


Abbildung 7.2: **Oberes Teilbild:** Modell Transport durch die Drakepassage für die Windantriebe A und B. **Mittleres Teilbild:** Räumlich gemittelter zonaler Windschub zwischen  $68^{\circ}\text{S}$  und  $47^{\circ}\text{S}$ . **Unteres Teilbild:** SAM-Index nach Gareth Marshall. Die Daten sind tiefpassgefiltert worden, um sie besser darstellen zu können.

ren Seite wurde daraufhin weiter mit spektralen Methoden untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Kohärenz zwischen der potentiellen Energie und dem Transport mit wachsender Periode an Bedeutung gewinnt, während umgekehrt die Kohärenz zwischen dem Bodendruck und dem Transport abnimmt (siehe Abb. 7.4 rechtes Bild).

Es konnte weiterhin eine Beziehung aufgestellt werden, die es prinzipiell ermöglicht, das Verhalten der einen über das Verhalten der anderen Kohärenz auszudrücken. Allerdings war es aufgrund dieser Beziehung nicht möglich abzuleiten, dass das Fallen der einen das Steigen der anderen bedingt. Stattdessen gibt es scheinbar Hinweise dafür, dass aufgrund dieser Beziehung beide Kohärenzen sich auf sehr langen Zeitskalen wieder gleichsinnig verhalten. Leider konnte dies nicht gezeigt werden bzw. widerlegt werden, da die Modellintegrationszeiten noch nicht lang genug waren. Hier bietet sich ein Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen.

**Regressionsmodell** Auf die große Korrelation zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck aufbauend, wurde untersucht, ob man nicht ein lineares Regressionsmodell aufstellen kann, das den Transport durch den Bodendruck, den Windschub an einer zentralen Stelle in der Drakepassage und der Differenz der potentiellen Energie zu beschreiben versucht (siehe Abb. 7.5). Es konnte gezeigt werden, dass allein der Bodendruck bereits eine gute Arbeit leistet, die nur wenig durch die Hinzunahme der anderen Größen gesteigert werden kann.

Es muss aber dazu gesagt werden, dass sehr lange Zeitskalen nicht untersucht wurden, auf denen die Differenz der potentiellen Energie hätte zum Tragen kommen können.

**Konvektionsverfahren** Im sechsten Kapitel schließlich wurde versucht, BARBI mit einem Konvektionsalgorithmus zu versehen. Es konnte gezeigt werden, dass das Verhalten des vorgestellten Verfahrens scheinbar dann vernünftige Resultate liefert, wenn ein explizites thermohalines For-

Korrelation zwischen dem Transport durch die Drake Passage und dem Bodendruck

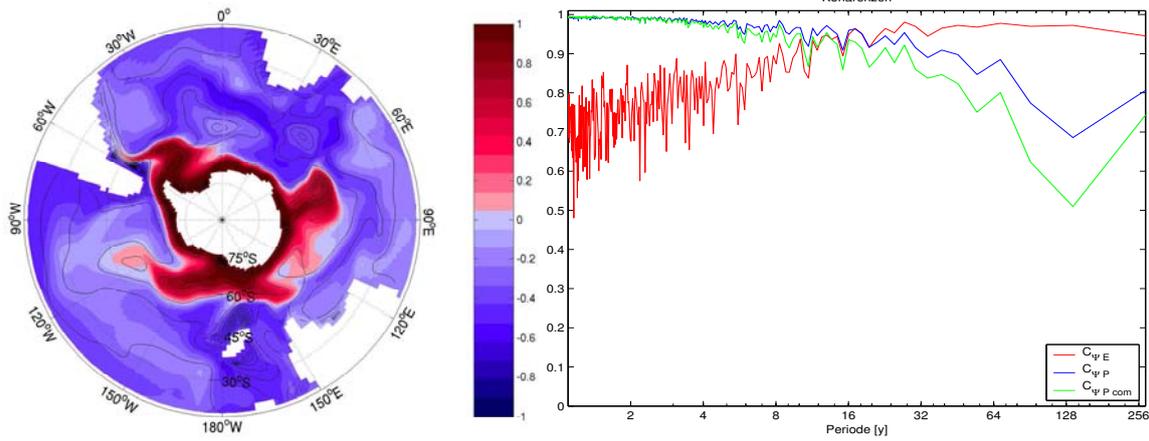


Abbildung 7.4: **Links:** Korrelationskarte zwischen dem Transport durch die Drakepassage und dem Bodendruck. Zusätzlich sind die  $f/h$ -Konturen schwarz eingezeichnet. **Rechts:** blau - Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und dem Bodendruck aus BARBI; rot - Kohärenz zwischen dem Kanaltransport und der potentiellen Energie aus BARBI; grün - mit Hilfe von Gleichung (5.23) berechnete Kohärenz zwischen dem Bodendruck und dem Kanaltransport.

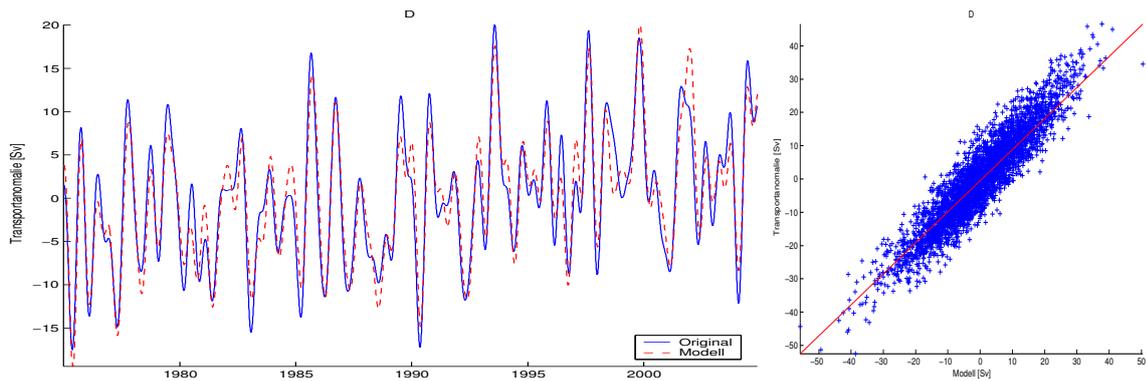


Abbildung 7.5: **Links:** Zeitreihen des BARBI-Transportes und des Transportes des entsprechenden Regressionsmodells. **Rechts:** Streudiagramm zwischen dem BARBI-Transport  $x$  und dem Transport des Regressionsmodells  $\hat{x}$ . Die rote Gerade beschreibt die Punkte  $x = \hat{x}$ .

cing von nicht zu kleinem Ausmaß vorhanden ist. Ansonsten muss das Verfahren momentan noch in Frage gestellt werden. Allerdings kann das Verfahren instabile Tendenzen des numerischen Modells in einem gewissen Rahmen unterdrücken.

# Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Prof. Dirk Olbers bedanken für die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit. Ich möchte ihm insbesondere dafür danken, dass ich bei Problemen immer fragen konnte, dass er mir, wenn ich nicht weiter wusste, immer einen Weg aufgezeigt hat und dass ich ohne Druck und Kontrolle arbeiten konnte.

Weiterhin möchte ich Prof. Gerrit Lohmann für die Erstellung des zweiten Gutachtens danken, was ja auch immer mit Zeit und Aufwand verbunden ist.

Mein Dank gilt dem Alfred-Wegener-Institut in Bremerhaven für die Bereitstellung wichtiger technischer Ressourcen und für die finanzielle Unterstützung über drei Jahre, ohne die ich diese Arbeit niemals hätte schreiben können.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei Carsten Eden, der mich mit dem Modell BARBI vertraut gemacht hat und zum Teil über BARBI hinaus, soweit es seine Zeit zugelassen hat, immer auf meine Fragen und Probleme eingegangen ist.

Weiterhin möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen Mitarbeitern des Alfred-Wegener-Institutes bedanken, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen. Zu nennen ist hier insbesondere Christian Dieterich für seine Einweisungen in wichtige Computerprogramme, ohne die ich nur schwer mit der Arbeit hätte beginnen können, ebenso wie Hartmut Hellmer, Martin Losch, Jenny Brauch, Daniel Borowski, Christoph Völker, Aike Beckmann, Jens Schröter, Gerrit Lohmann, Sergey Danilov, Dmitry Sidorenko, Sven Harig, Ralph Timmermann, Christof Luepkes, Marcel Nicolaus, Frank Kauker, Frau Steffens, Frau Ujen und Wolfgang Cohrs.

Für die Bereitstellung der SAM-Daten, die Hilfestellung bei der Aufbereitung dieser Daten und für die Beantwortung meiner Fragen bezüglich des SAM-Indexes möchte

ich bei Martin Visbeck bedanken.

Danken möchte ich auch Ronny Ramlau, der mir bezüglich des inversen Problems im Falle der Dichterkonstruktion geholfen hat. Auch wenn dieses Kapitel nicht den gewünschten Erfolg gebracht hat, so konnte ich ihn bei manchem Problem um Rat fragen.

Insbesondere möchte ich meiner Frau Esther danken, die mich während dieser Arbeit begleitet und meine schlechte Laune, wenn etwas nicht so funktionierte, wie es sollte, ertragen hat. Ich danke ihr für ihre aufmunternden Worte und für ihre Mühen und Anstrengungen, mir den Rücken für diese Arbeit freizuhalten.



# Anhang A

## Ergänzungen zu BARBI

### A.1 Umrechnung eines thermohalinen Forcings in einen Oberflächenwärmefluss

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, die in BARBI verwendeten über die Wassersäule integrierten Dichteflüsse in einen üblicheren Oberflächenwärmefluss umzurechnen.

Die in den Gleichungen der Dichtemomente auftretenden vertikalen thermohalinen Flüsse haben die Struktur:

$$Q_n = -g \int_{-h}^0 \frac{\partial B_\rho}{\partial z} z^n dz = g \int_{-h}^0 \frac{\partial \overline{w'\rho'}}{\partial z} z^n dz \quad (\text{A.1})$$

Mittels partieller Integration und den Randbedingungen an der Oberfläche und am Meeresboden wird daraus:

$$Q_n = n g \int_{-h}^0 B_\rho z^{n-1} dz \quad (\text{A.2})$$

Setzt man eine lineare Zustandsgleichung für die Dichte an und hält den Salzgehalt konstant, so lässt sich der turbulente Dichtefluss über den Wärmefluss ausdrücken<sup>1</sup>:

$$B_\rho = -\frac{\alpha}{c_P \rho_0^*} B_T \quad \text{mit} \quad B_T = \rho_0^* c_P \overline{w'T'} \quad (\text{A.3})$$

Setzt man dies in obige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$Q_n = -\frac{n g \alpha}{\rho_0^* c_P} \int_{-h}^0 B_T z^{n-1} dz \quad (\text{A.4})$$

Wie lässt sich dieses thermohaline Forcing, das über den Wärmefluss integriert, in Zusammenhang mit einem Oberflächenwärmefluss bringen? Dazu kann man u.a. zwei Ansätze verwenden:

<sup>1</sup>Meiner Meinung nach geht dies nur, wenn man die lineare Zustandsgleichung, so definiert, dass man als Referenzzustand den mit der Tiefe linear variierenden Hintergrundzustand nimmt und nicht eine konstante Referenzdichte:  $\rho^* = \bar{\rho}^*(1 - \alpha(T^* - \bar{T}))$ . Dies lässt sich umformen zu  $(\rho^* - \bar{\rho}^*)/\rho_0^* = -\alpha(T^* - \bar{T})$ , wobei im Nenner auf der linken Seite die Näherung  $\bar{\rho}^* \approx \rho_0^*$  verwendet wurde. Die Möglichkeit zum Auftrieb wird durch einen Dichtefluss also dadurch gegeben oder entzogen, wenn sich die Temperatur bzw. Dichte gegenüber der Hintergrundtemperatur bzw. Dichte ändert.

1. Der vertikale Wärmefluss wird über einen Diffusionsansatz parametrisiert<sup>2</sup>:  $B_T = -K_v \frac{\partial T}{\partial z}$ . Aus Gleichung (A.4) ergibt sich dann für das Forcing des ersten Momentes:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{g\alpha K_v}{\rho_0^* c_P} \int_{-h}^0 \frac{\partial T}{\partial z} dz \\ &= \frac{g\alpha K_v}{\rho_0^* c_P} (T(0) - T(-h)) \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $T(0)$  bzw.  $T(-h)$  die Abweichungen von der Hintergrundtemperaturschichtung.

2. Man setzt ein geschätztes Profil für den vertikalen Wärmefluss an. Dieses könnte z.B. so gebaut sein, dass der Wärmefluss an der Oberfläche, wo die Wärme eindringt, am Stärksten ist und zur Tiefe hin abnimmt. Ein realistisches Profil wäre vielleicht ein exponentiell abnehmendes der Form  $B_T(z) = B_T^0 e^{z/d}$ . Dieses ist für hinreichend kleines  $d$  in der Tiefe  $z = -h$  annähernd Null und nimmt an der Oberfläche den Wert  $B_T^0$  an. Für das erste Dichtemoment ergibt sich dann aus Gleichung (A.4) ein Forcing zu:

$$Q_1 = -\frac{g\alpha}{\rho_0^* c_P} B_T^0 \int_{-h}^0 e^{z/d} dz \approx -\frac{g\alpha d}{\rho_0^* c_P} B_T^0 \quad (\text{A.6})$$

Wählt man  $d$  so, dass in einer Tiefe von  $z = -100m$  noch 5% des eindringenden Oberflächenflusses ankommen, so gilt  $d = -100/\ln(0.05) \approx 33.4m$ . Verwendet man weiter  $\alpha = 7 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ ,  $g = 9.81 m/s^2$ ,  $c_P = 1030 J/(kg \cdot K)$  und  $\rho_0^* = 1035 kg/m^3$ , so ergibt sich eine Umrechnung  $B_T^0 = -4.65 \cdot 10^6 Q_1 Js^2/m^5$ .

Mit diesem Ansatz gilt weiterhin näherungsweise  $Q_3 \approx 6d^2 Q_1$ .

<sup>2</sup>Das Vorzeichen ist so definiert, dass in den Ozean eindringende Wärme mit einem positiven Vorzeichen versehen ist.



# Anhang B

## Mathematische Methoden

Dieses Kapitel soll in erster Linie dazu dienen, ein paar der in dieser Arbeit verwendeten Methoden und Verfahren vorzustellen, mit denen etwa ein Spektrum oder die Kohärenz berechnet werden können. Diese sollen hier nur grob beschrieben werden, so dass ich bei tiefer gehenden Fragen auf die Bücher von Schönwiese (2000) [54], von Storch und Zwiers (1999) [65], von Storch und Navarra (1999) [64] oder Numerical Recipes [1] verweisen möchte.

### B.1 Fourier-Analyse von Zeitreihen

Nun sollen kurz einige Aspekte der Fourier-Analyse skizziert werden, wobei der Schwerpunkt auf der Bestimmung eines Fourier-Spektrums (auch Autospektrum genannt) einer Zeitreihe bzw. eines Kreuzspektrums zweier Zeitreihen liegen soll.

**Fourier-Spektrum und Signifikanzlevel** Die von den Modellen gelieferten Größen wie etwa die Stromfunktion oder das erste Dichtemoment liegen nur diskret in Ort und Zeit vor.

Um etwa das Spektrum des ersten Dichtemomentes an einem festen Ort zu bestimmen, sollte man sich im Klaren darüber sein, welche Frequenzen man erwartet bzw. beobachten möchte, um dementsprechend den zeitlichen Abstand  $\Delta$  zwischen zwei Messungen dieser Größe zu wählen.

Dieser Fragestellung liegt das sogenannte *Abtast-Theorem* zugrunde, das eine Aussage darüber macht, unter welchen Bedingungen eine kontinuierliche Funktion  $f(t)$  eindeutig durch eine diskrete Zeitreihe  $f_i$  beschrieben wird.

Hat man nun eine Zeitreihe mit den zeitlichen Messintervall  $\Delta$  und einer Länge  $N$  über ein Gesamtdauer  $T = N\Delta$ , so enthält eine diskrete Fourieranalyse nur Schwingungsanteile im Bereich (der Wert bei  $f = 0$  repräsentiert den Mittelwert der Zeitreihe):

$$\frac{1}{T} < |f| < \frac{1}{2\Delta} =: f_{Ny} \quad (\text{B.1})$$

$f_{Ny}$  bezeichnet die sogenannte *Nyquist Frequenz*. Um also die durch die Nyquist Frequenz gegebene minimale Periode  $T_{min} = 2\Delta$  aufzulösen, sollten  $\Delta$  bzw. die Abtastrate so gewählt sein, dass man mindestens zwei Messungen im Intervall  $T_{min}$  bestimmt.

Um aus den diskreten Daten eine Schätzung des 'Roh-Spektrums' zu erhalten, wird die diskrete Fouriertransformation angewendet, die z.B. in Numerical Recipes zu finden ist (Gleichungen (13.4.4)-(13.4.6) in [1]).

$$\begin{aligned} P(0) &= P(f_0) = \frac{1}{N^2} |C_0|^2 \\ P(f_k) &= \frac{1}{N^2} [|C_k|^2 + |C_{N-k}|^2], \quad k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \\ P(f_{Ny}) &= P(f_{N/2}) = \frac{1}{N^2} |C_{N/2}|^2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i j k / N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ f_k &:= \frac{k}{N\Delta}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der  $C_k$  mittels diskreter Fouriertransformation (FFT) wurde mit Matlab durchgeführt.

Dieses Roh-Spektrum ist, wie der Name schon sagt, noch recht verrauscht und mit ungewollten Effekten behaftet, was durch verschiedene Methoden verringert werden kann.

In dieser Arbeit wurde nun die 'chunk'-Methode verwendet, die die gegebene Zeitreihe in disjunkte Teilstücke unterteilt, von jedem dieser Teilstücke das Roh-Spektrum berechnet und diese Roh-Spektren dann zusammenmittelt (siehe z.B. Stewart (2003) [56], Numerical Recipes oder von Storch und Zwiers). Typische Werte für die Anzahl dieser Teilstücke können zwischen 5-20 liegen.

Um das Spektrum dann geeignet darzustellen, habe ich ausgenutzt, dass nach dem Parsevalschen Theorem über das Spektrum eine Zerlegung der Varianz der Zeitreihe gegeben ist durch  $s^2 = \sum_{n=1}^{N/2} P_n$ . Das Spektrum wird des-

halb als Anteil an der Gesamtvarianz in Prozent dargestellt:  $P_i / \sum_{n=1}^{N/2} P_n \cdot 100$ .

Nach Berechnung des Spektrums kann man sich die Frage stellen, ob die vorhandenen Peaks wirklich signifikant oder rein zufällig sind.

Man testet also gegen die Nullhypothese, dass der Zeitreihe ein festes Spektrum zugrunde liegt. Dieses könnte das Spektrum eines weißen Rauschens sein - also ein konstantes Spektrum - oder das häufig beobachtete rote Rauschen, dessen Spektrum zu kurzen Perioden abfällt.

- Um die Signifikanzlevel für die Nullhypothese eines weißen Rauschens zu schätzen, kann man das Parseval'sche Theorem benutzen, nachdem gelten  $s^2 = \sum_{n=1}^{N/2} P_n$  muss, wobei  $s^2$  die Standardabweichung der Zeitreihe bezeichnet<sup>1</sup>.

Sind die  $P_n = P_W$  nun konstant, wie es für ein Weißes Rauschen der Fall ist, so gilt  $P_W = \frac{s^2}{N/2}$ . Das Signifikanzlevel ergibt sich nun als:  $P_{Sig} = P_W \cdot \chi^2(\Phi, Sig) / \Phi$ , wobei  $\Phi$  die Freiheitsgrade und  $Sig$  das Signifikanzlevel (z.B.  $Sig = 97.5\%$ ) der  $\chi^2$ -Verteilung bezeichnet. Wenn man zur Berechnung des Spektrums über  $M$  Roh-Spektren mittelt, so sind die Werte des gemittelten Spektrums  $\chi^2$ -verteilt mit dem Freiheitsgrad  $2 \cdot 2M$ .

- Legt man als Nullhypothese rotes Rauschen zu Grunde, so muss man ebenfalls das mögliche rote Spektrum aus den Daten schätzen.

Eine recht einfache Möglichkeit hierfür ist, die Daten durch einen AR(1)<sup>3</sup> anzunähern, der rotes Rauschen gut beschreiben kann und gegeben ist durch:

$$x_i - \bar{x} = a \cdot (x_{i-1} - \bar{x}) + Z_i$$

Dabei ist  $\bar{x}$  der Mittelwert der Zeitreihe und  $Z_i$  normalverteiltes weißes Rauschen mit Mittelwert Null.

Für diesen Ansatz ist dann schließlich der Parameter  $a$  aus den Daten zu schätzen, wobei eine Least-Squares-

<sup>1</sup>Die Schätzung für die Standardabweichung sollte im Nenner nicht  $(N-1)$  sondern  $N$  verwenden.

<sup>2</sup>Der erste Wert für  $f = 0$  und der letzte Wert  $f = f_{Ny}$  des Spektrums  $\bar{P}_{N/2}$  haben eigentlich nur einen Freiheitsgrad von  $M$ , da sie in den einzelnen Roh-Spektren nicht als Summe aus zwei gleichen Werten entstehen.

<sup>3</sup>AR(p) steht für einen Autoregressiven Prozess der Ordnung  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Weitere Informationen zu diesen Prozessen, ihrem Fourier-Spektrum oder dem Schätzen von Parametern findet man in von Storch und Zwiers 1999 [65] oder Chatfield (1989) [12].

Schätzung gegeben ist zu:

$$a = \frac{\sum_{i=2}^N (x_i - \bar{x})(x_{i-1} - \bar{x})}{\sum_{i=2}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Ist dieser Parameter aus den Daten bestimmt worden, so lässt sich zunächst das Spektrum des AR(1)-Prozesses bestimmen, das mit der Normierung  $N/(2s^2)$  gegeben ist durch (siehe Torrence und Compo (1998) [63]):

$$P_n = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi k/N)} \quad (B.2)$$

mit dem Frequenzindex  $n = 0, 1, 2, \dots, N/2$ . (Für ein weißes Rauschen wäre  $a = 0$ , und somit wäre  $P_n = 1$ .)

Analog zum weißen Rauschen erhält man nun die Signifikanzlevel durch:

$$P_{Sig} = \frac{2s^2}{N} P_n \frac{\chi^2(\Phi, Sig)}{\Phi}$$

Dabei bezeichnen  $\Phi$  wieder die Freiheitsgrade und  $Sig$  das Signifikanzniveau.

**Kreuzspektrum** Analog zum Spektrum einer Zeitreihe kann man das Kreuzspektrum zweier Zeitreihen betrachten, welches in dieser Arbeit über die Fouriertransformierten der Zeitreihen<sup>4</sup> definiert ist. Zu seiner Bildung werden die Zeitreihen wieder in Teilreihen zerteilt und ein Mittelwert gebildet, der durch  $\langle \cdot \rangle$  bezeichnet wird.

Seien  $a(t)$  und  $b(t)$  die zwei Zeitreihen, und  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  ihre Fouriertransformierten, so ist das Kreuzspektrum gegeben durch:

$$K_{ab} := \langle \hat{a}\hat{b}^* \rangle, \quad (B.3)$$

wobei mit dem  $*$  die komplex konjugierte Größe gemeint ist.

Von diesem im Allgemeinen komplexen Kreuzspektrum lassen sich zwei weitere interessante Größen ableiten: die Phase  $\phi_{ab}$  und die Kohärenz  $C_{ab}$ . Diese sind definiert durch:

$$\phi_{ab} := \arctan \left( \frac{Im(K_{ab})}{Re(K_{ab})} \right)$$

$$C_{ab} := \frac{|K_{ab}|}{\sqrt{\langle |\hat{a}|^2 \rangle \langle |\hat{b}|^2 \rangle}}$$

Die Phase erlaubt eine Aussage darüber, wie die Zeitreihen gegeneinander verschoben sind. Ist sie negativ, so eilt

<sup>4</sup>Eine alternative Definition, deren Äquivalenz aber über das Wiener-Kinchin-Theorem gegeben ist, definiert das Kreuzspektrum über die Fouriertransformation der Kreuzkovarianzfunktion.

die Zeitreihe a der Zeitreihe b voraus. Weiterhin gilt <sup>5</sup>  
 $\phi_{ab} = -\phi_{ba}$ .

Die Kohärenz beschreibt, ob es einen signifikanten Zusammenhang zwischen den Zeitreihen gibt. Für linear abhängige Zeitreihen gilt analog zum Korrelationskoeffizienten  $C_{ab} = 1$ .

## B.2 Phase für das diskrete barotrope dynamische Modell

An dieser Stelle soll kurz skizziert werden, wie man für das lineare barotrope Modell die Phase zwischen dem Transport und dem Windantrieb theoretisch bestimmen kann, wenn die zeitlichen Ableitungen durch finite Differenzen erster Ordnung approximiert werden.

Ausgangspunkt ist die kontinuierliche Gleichung:

$$\frac{d\Psi}{dt} + a\Psi = nF$$

Die zeitliche Ableitung werden nun durch  $\frac{d\Psi}{dt} \approx (\Psi_i - \Psi_{i-1})/\Delta t$  angenähert. Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta t} + a\Psi_i &= nF_i \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{n\Delta t}\Psi_{i-1} + \frac{1}{n\Delta t}(a\Delta t + 1)\Psi_i &= F_i \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \Psi_{i+k} &= F_i \end{aligned}$$

mit den Gewichten  $b_{-1} = -\frac{1}{n\Delta t}$ ,  $b_0 = \frac{1}{n\Delta t}(a\Delta t + 1)$  und  $b_k = 0$  sonst. Diese letzte etwas formaler Schreibweise wurde gewählt, um die folgende allgemeine Beziehung entsprechend anwenden zu können.

Aus Beziehung (11.74) in Storch und Zwiers (1999) [65] folgt für das Kreuzspektrum zwischen dem Transport und dem Windantrieb

$$K_{\Psi F}(\omega) = \hat{b}^*(\omega)A_{\Psi}(\omega)$$

wobei  $\hat{b}$  die Fouriertransformierte der Gewichtsfolge  $\{b_k : k \in \mathbb{Z}\}$  und  $A(\omega)$  das Spektrum (Autospektrum) der Zeitreihe  $\Psi$  darstellen.

Erstere lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned} \hat{b}(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{-i\omega \Delta t k} = \frac{1}{n\Delta t} (a\Delta t + 1 - e^{i\omega \Delta t}) \\ &= \frac{1}{n\Delta t} [a\Delta t + 1 - \cos(\omega \Delta t) - i \sin(\omega \Delta t)] \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Es gilt:  $Im(K_{ab}) = \frac{1}{2i}(\langle \hat{a}\hat{b}^* \rangle - \langle \hat{a}^*\hat{b} \rangle)$  und  $Re(K_{ab}) = \frac{1}{2}(\langle \hat{a}\hat{b}^* \rangle + \langle \hat{a}^*\hat{b} \rangle)$ . Es ist also  $Im(K_{ab}) = -Im(K_{ba})$ . Weiterhin gilt für alle reellen Zahlen  $x$   $\arctan(x) = -\arctan(-x)$ . Daraus folgt dann die Behauptung.

Daraus ergibt sich dann das Kreuzspektrum bzw. die Phase zu

$$\begin{aligned} K_{\Psi F} &= \frac{A(\omega)}{n\Delta t} [a\Delta t + 1 - \cos(\omega \Delta t) + i \sin(\omega \Delta t)] \\ \phi_{\Psi F}(\omega) &= \arctan\left(\frac{\sin(\omega \Delta t)}{a\Delta t + 1 - \cos(\omega \Delta t)}\right) \end{aligned}$$

## B.3 Telekonnektionen

Hinter dem Begriff Telekonnektion verbirgt sich im Grunde nur eine 'einfache' Korrelationsrechnung. Die Methode soll hier kurz skizziert werden und kann bei Bedarf z.B. bei von Storch und Navarra 1999 [64] nachgelesen werden.

Korreliert man eine Größe A an einem festen Ort mit einer Größe B an allen Orten eines Gebietes, so erhält man bei graphischer Darstellung dieser Korrelationswerte eine Korrelationskarte.

Auf diese Weise könnte man z.B. untersuchen, für welchen Ort in Europa der Zusammenhang zwischen der örtlichen Temperatur (Größe B) mit dem Niederschlag in Bruchhausen-Vilsen (Niedersachsen, Größe A) am größten ist. Durch das Korrelieren von Größen derselben Art (z.B. Temperatur mit Temperatur) entstehen homogene Karten. Sind die Arten unterschiedlich (etwa Niederschlag mit Temperatur) so heißen diese Karten heterogen.

In der Regel sollte die Korrelation in einer Ellipse um den gewählten Ort der Größe A am größten sein. Doch es können auch ganz interessante Muster entstehen, die einen Zusammenhang zwischen voneinander weit entfernten Orten offenlegen können.

Als Korrelationskoeffizient wird in dieser Arbeit die 'klassische' Definition nach Pearson (siehe z.B. Schönwiese 2000 [54]) verwendet. Sind zwei Stichproben  $a_i$  und  $b_i$  gegeben (hier ist der Index in der Regel die Zeit) und sind  $s_{ab} := (\sum a'_i b'_i)/(n-1)$  die Kovarianz und  $s_a$  bzw.  $s_b$  die Standardabweichungen mit  $a'_i = a_i - \bar{a}$  bzw.  $b'_i = b_i - \bar{b}$ , wobei  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  die Mittelwerte der Stichproben beschreiben, so gilt für den Korrelationskoeffizienten:

$$r = \frac{s_{ab}}{s_a s_b}. \quad (\text{B.4})$$

Um die Signifikanz der erhaltenen Karten und Muster zu untersuchen, schlagen von Storch und Navarra ein Verfahren vor, bei dem die betrachteten Zeitreihen in mehrere Teilstücke zerlegt werden und für jedes dieser Teilstücke eine Korrelationskarte berechnet wird. Ist eine gewisse Struktur auf vielen dieser Karten zu erkennen, so spricht dies für eine hohe Signifikanz und Beständigkeit dieser Struktur.

In dieser Arbeit wird allerdings eine andere Methode angewendet, um die Signifikanz eines Korrelationskoeffizienten zu bestimmen, welche man u.a. bei Schönwiese (2000) [54] nachlesen kann und die auf einer  $t$ -Verteilung beruht. Hiernach ist ein Korrelationskoeffizient  $r$  unter Anwendung der  $t$ -Verteilung signifikant falls:

$$t_{\Phi, Sig} < \hat{t} := |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \quad \Phi = (n-2) \cdot \frac{1 - \bar{r}(1)_a \bar{r}(1)_b}{1 + \bar{r}(1)_a \bar{r}(1)_b}$$

wobei  $n$  die Länge der Zeitreihen,  $\bar{r}(1)_i$  der 1. Autokorrelationskoeffizient der  $i$ . Zeitreihe und  $t_{\Phi, Sig}$  die Quantile der  $t$ -Verteilung bei  $\Phi$  Freiheitsgraden und einem gegebenen Signifikanzlevel  $Sig$  sind. Eine Umstellung dieser Gleichung ergibt für die Signifikanzlevel:

$$|r| > \frac{t_{\Phi, Sig}}{\sqrt{n-2 + t_{\Phi, Sig}^2}} \tag{B.5}$$

An dieser Stelle sind vielleicht zwei Bemerkungen zur letzten Gleichung angebracht:

Ab einem Freiheitsgrad von  $\Phi = 100$  ändert sich  $t_{\Phi, Sig}$  fast nur noch in der zweiten Nachkommastelle, so dass man diesen Wert als nahezu unabhängig von den Freiheitsgraden ansehen darf:  $t_{\Phi, Sig} \approx t_{Sig}$ . Die Werte sind für verschiedene Signifikanzniveaus (und genauer für  $\Phi = 100$ ) in der folgenden Tabelle gegeben.

$Sig$	75%	90%	95%	97.5%
$t_{Sig}$	0.677	1.290	1.660	1.984
$Sig$	99%	99.5%	99.9%	99.95%
$t_{Sig}$	2.364	2.626	3.174	3.390

Damit gilt dann weiter für große  $n$  ( $n > 100$ ):  $|r| > t_{Sig} / \sqrt{n}$ .

Ob die Freiheitsgrade weitgehend durch den Faktor  $(n-2)$  bestimmt werden, hängt stark von den Zeitreihen ab. Hat man als Zeitreihen weißes Rauschen, so ist der erste Autokorrelationskoeffizient gleich Null und die Freiheitsgrade sind  $\Phi = n-2$ . Sind die Zeitreihen aber stark autokorreliert (die Werte zum Zeitpunkt  $i$  sind also stark von denen zum Zeitpunkt  $i-1$  bestimmt), so können sich die Freiheitsgrade sehr reduzieren.

## B.4 Automatische Detektion von Signalausbreitungsgeschwindigkeiten in Hovmöllerdiagrammen

Mit einer konstanten Geschwindigkeit propagierende Signale liegen in Hovmöllerdiagrammen auf Geraden, deren Neigung von der Ausbreitungsgeschwindigkeit abhängt. Prinzipiell kann man von Hand in ein solches Diagramm die beste Gerade einzeichnen, die Geradensteigung ermitteln und daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmen. In diesem Abschnitt soll ein Verfahren vorgestellt werden, mit dessen Hilfe man das Erkennen von propagierenden Signalen in Hovmöllerdiagrammen automatisieren kann, so dass sich auch größere Datenmengen schneller untersuchen lassen.

Das Verfahren besteht aus drei Schritten, die in Abb. B.1 veranschaulicht werden.

1. Im ersten Schritt werden die Daten (etwa im ersten Dichtemoment) für das Hovmöllerdiagramm erhoben. Dazu wird das Dichtemoment auf einer kleinen Kurve, die durch die schwarzen Kreuze gekennzeichnet ist, bestimmt, so dass man die Rohdaten erhält.
2. Im zweiten Schritt des Verfahrens werden die Daten statistisch aufbereitet (Normierung, Filterung), so dass mögliche Signale deutlicher zum Vorschein kommen.
3. Im dritten Schritt werden dann zwei unabhängige Detektionsverfahren angewendet, wobei jedes für sich ein mögliches Signal und seine Ausbreitungsgeschwindigkeit ermitteln kann.

Das eine Verfahren verwendet eine Radontransformation, die weiter unten genauer erklärt wird, und ist angelehnt an die Arbeit von Hill et al. (2000) [27], die diese Methode mit Erfolg angewendet haben.

Das andere Verfahren basiert auf der Bestimmung von Gradientenvektoren, die an die Konturlinien eingezeichnet werden. Haben viele Gradientenvektoren innerhalb des Bildes die gleiche Orientierung, so ist im Bild ein homogenes Signal zu sehen. Durch Ermittlung der Vorzugsrichtung kann dann auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit geschlossen werden.

Nur wenn beide Verfahren getrennt eine ähnliche Ausbreitungsgeschwindigkeit liefern, wird diese akzeptiert. Auf diese Weise sollen unerwünschte Ausreißer vermieden werden.

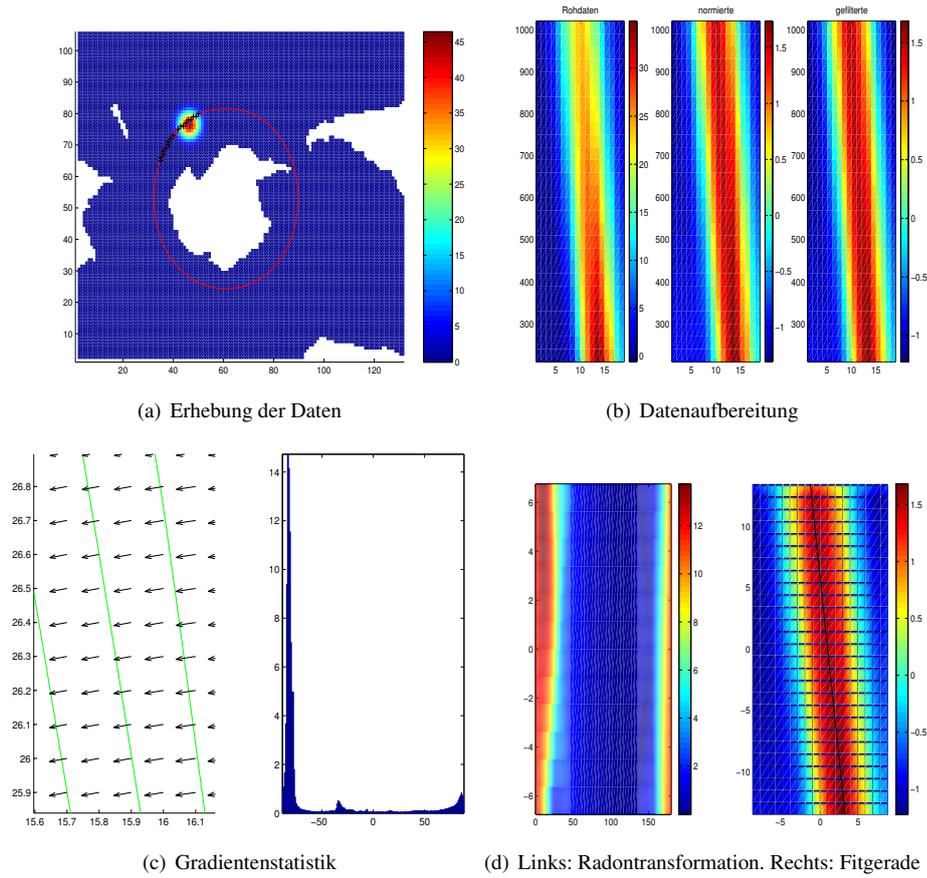


Abbildung B.1: Arbeitsschritte der automatischen Geschwindigkeitsdetektion in Hovmöllerdiagrammen. Genauereres ist dem Text zu entnehmen.

**Testen der Methode** An dieser Stelle soll die Methode getestet werden. Dazu wird ein künstliches Hovmöllerdiagramm  $H(x, t)$  generiert durch

$$H(x, t) = \exp \left[ - \left( \frac{x - (c_{art} t + x_b)}{10} \right)^2 \right] + c \cdot G(x, t)$$

Dabei stellt die Funktion  $H(x, t)$  im Prinzip die Entwicklung eines Gausspaketes dar, das sich mit der zonalen Geschwindigkeit  $c_{art}$  bewegt. Die Funktion  $G(x, t)$  soll die Daten verrauschen und stellt eine standardnormalverteilte Zufallszahl dar, wobei die Stärke des Rauschens durch den Faktor  $c$  geregelt werden kann.

Im Folgenden soll mit einem Wert von  $c_{art} = 0.05^\circ/d$  gearbeitet werden, was bei  $60^\circ S$  einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $-3.22 \text{ cm/s}$  entspricht.

Es werden drei Tests durchgeführt, wobei die Daten gar nicht, leichter oder schwerer verrauscht werden. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in der folgenden Tabelle und in Abb. B.2 zu sehen.

Störung	detek. Geschw. [cm/s]	Diff. [cm/s]	Diff. [%]
c=0	-3.149	0.071	2.11
c=0.05	-2.973	0.247	7.59
c=0.5	-	-	-

Während bei ungestörten und leicht gestörten Daten eine Geschwindigkeit detektiert werden kann, ist dies bei einer stärkeren Störung nicht mehr möglich. Im letzten Fall liefern zwar sowohl das Gradientenverfahren als auch die Radontransformation eine Lösung, doch weichen diese zu stark voneinander ab<sup>6</sup>.

Das Ergebnis im Falle nicht gestörter Daten ist positiv, während es im Falle leicht verrauschter Daten grenzwertig ist, da eine absolute Differenz von 0.247 cm/s schon bald in den Bereich der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer baroklinen Rossbywelle im südlichen Ozean über flachen Boden gelangt.

<sup>6</sup>Die Radontransformation liefert immer noch eine gute Gerade, wie man in Abb. B.2 sehen kann.

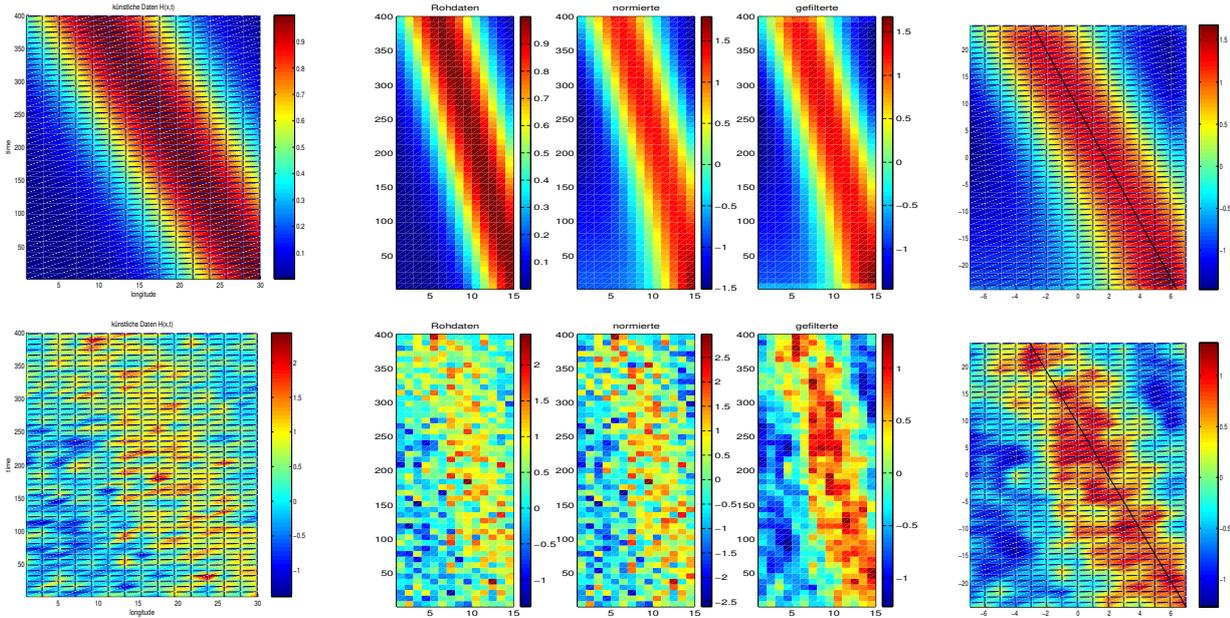


Abbildung B.2: Darstellung der Zwischenschritte des Detektionsverfahrens für den Fall ohne (obere Reihe) und der schweren Datenstörung (untere Reihe). Von links nach rechts sind jeweils zunächst die Rohdaten, dann das Aufbereiten der Daten und schließlich das Ergebnis der Radontransformation zu sehen. Die Statistik des Gradientenverfahrens ist nicht dargestellt.

**Die Radontransformation** Die Radontransformation wird hier als ein Verfahren zur Bildanalyse verwendet, um in Hovmöllerdiagrammen automatisch nach propagierenden Signalen zu suchen. Die Methode wurde zum selben Zweck u.a. von Hill et al. (2000) [27] verwendet, und soll nun in etwas abgewandelter Form kurz skizziert werden.

Bei der Radontransformation eines Diagrammes  $f(x, y)$  werden Geraden beliebig durch dieses Diagramm gelegt,

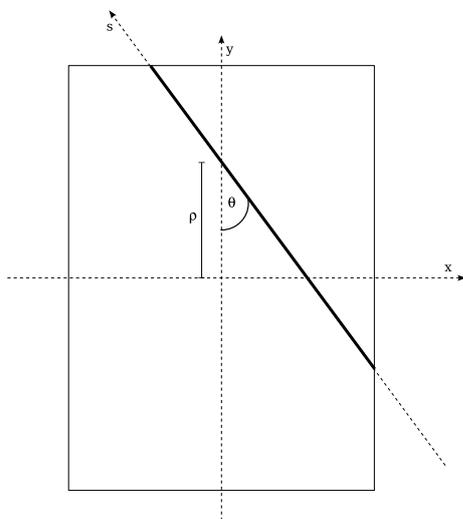


Abbildung B.3: Schematische Darstellung der Radontransformation

und die Funktionswerte entlang dieser Geraden aufintegriert, was sich formal aufschreiben lässt als:

$$\hat{f}(\rho, \theta) = \int f(x_g(s), y_g(s)) ds$$

mit

$$y_g(s) = \rho + s \cdot \cos(\theta), \quad x_g(s) = -s \cdot \sin(\theta)$$

In Abb. B.3 sind das Vorgehen und die Größen noch einmal veranschaulicht. Der Geradenparameter  $s$  ist so zu wählen, dass die Punkte auch wirklich nur auf der Geraden innerhalb des Bildes liegen. Ist  $x_{max}$  bzw.  $y_{max}$  die halbe Breite bzw. halbe Höhe des Bildes, so muss gelten  $s \in [-\frac{x_{max}}{|\sin(\theta)|}, \frac{x_{max}}{|\sin(\theta)|}]$  und  $s \in [-\frac{\rho - y_{max}}{\cos(\theta)}, \frac{\rho + y_{max}}{\cos(\theta)}]$ .

Um nun aus den transformierten Daten ein Signal mit seinen entsprechenden Linienparametern zu ermitteln, kann man zwei Eigenschaften ausnutzen. Homogene deutliche Signale sollten zum einen einen großen Absolutwert ihres Linienintegrals aufweisen. Zum anderen sollten Integralwerte, die nicht zum Signal gehörende Anteile enthalten, einen deutlich kleineren Wert haben - das Verhältnis zwischen Signal und Rauschen sollte bei einem deutlichen Signal also groß sein.

Aus den bestimmten Linienparametern (genauer aus  $\theta$ ) kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit ermittelt werden.

# Anhang C

## Rekonstruktion von Dichteprofilen aus den Momenten

### C.1 Einleitung

Nachdem bereits die direkte Konvektionsmethode vorgestellt wurde, soll sich dieses Kapitel mit der indirekten Methode befassen. Dabei wird zunächst mit Hilfe der Dichtemomente auf die vertikale Dichteverteilung geschlossen, und diese Dichteverteilung in einem weiteren Schritt, falls nötig, durchmischt. Der zweite Schritt, das Durchmischen, soll hier nicht weiter betrachtet werden, da es dafür bereits brauchbare Verfahren gibt. Das mathematische Problem, das es im folgenden Kapitel zu lösen gilt, lautet also verkürzt:

*Gegeben ist eine endliche Anzahl von Dichtemomenten  $\{E_i = g \int_{-h}^0 \rho(z) z^i dz\}$ . Aus dieser Menge soll durch ein geeignetes Verfahren die vertikale Dichteverteilung  $\rho(z)$  rekonstruiert werden.*

Ich möchte das Ergebnis dieses Kapitels an dieser Stelle gleich vorweg nehmen. Es ist mir nicht gelungen, eine optimale Methode zu finden, die das Konvektionsproblem auf diesem Weg zufriedenstellend lösen kann. Dieses kann daran liegen, dass mir keine geeignete mathematische Methode bekannt ist, oder dass ich bei der Umsetzung der hier vorgestellten Methoden Fehler gemacht habe, die mir nicht aufgefallen sind. Dennoch möchte ich meine Untersuchungen hier vorstellen, da ich mich zum einen lange damit beschäftigt habe, und zum anderen vielleicht ein anderer davon nochmal einen Nutzen haben könnte, wenn er sich selber auf den Weg macht.

Zu meiner Verteidigung kann ich aber sagen, dass das Problem mathematisch auch nicht ganz trivial ist. Zunächst einmal gehört es in die große Gruppe der inversen Probleme, bei denen man das Ergebnis (die Dichtemomente) kennt und auf die Ursache (die Dichteverteilung) zurückschließen möchte. In dieser Gruppe gibt es die guten (gut gestellten)

Probleme, die sicher und stabil gelöst werden können. Und es gibt die schlechten (schlecht gestellten) Probleme, deren Lösungen mit großen Unsicherheiten behaftet sind. Nun gehört unser Problem leider zur letzteren Gruppe, was man sich mit einer einfachen Übung veranschaulichen kann.

Ist nur ein Dichtemoment  $E_1$  gegeben, so gilt für dieses  $E_1 = g \int_{-h}^0 \rho z dz$ . Man kann sich kaum ausmalen, wie viele Dichteverteilungen es geben kann, die dieses Dichtemoment erzeugen.

Das Problem ist gewissermaßen vergleichbar mit dem Hausdorfschen Momentenproblem<sup>1</sup> (siehe Hofmann (1999) [29]). Und dieses Problem ist eines der ersten, von dem man merkte, dass es schlecht gestellt ist.

Ein geeignetes Lösungsverfahren, sollte ein paar Dinge berücksichtigen:

- Dieses Problem ist Teil eines numerischen Ozeanmodells und muss sehr oft gelöst werden (an mehreren Orten  $(x,y)$ , zu verschiedenen Zeiten) und das möglichst schnell. Man kann sich also der Lösung dieser Frage nicht bis ins kleinste Detail widmen. Die Anzahl der Momente sollte daher möglichst klein sein (nicht mehr als 20, eher weniger), um das Modell nicht zu langsam zu machen.
- Die  $E_i$  werden nicht gemessen, sondern in diesem Modell berechnet, so dass ich über einen Fehler nichts sagen kann.
- $\rho$  kann glatt sein, muss es aber nicht, da es im Ozean

<sup>1</sup>Bei diesem soll aus den Momenten  $m_k$  auf eine Ladungsverteilung  $x(t)$  geschlossen werden.

$$m_k = \int_0^1 t^k x(t) dt \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Es ist jedoch nur bedingt vergleichbar, da nur die ungeraden Dichtemomente zur Verfügung stehen; und davon nur begrenzt viele.

ja auch Sprungschichten geben kann, an denen sich die Dichte stark ändert.

Wie vorher werden die Momente in diesem Kapitel meist in der umgeschriebenen Form verwendet:

$$\begin{aligned} G_i &:= \frac{1}{h^{i-1}} E_i \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (\text{C.1}) \\ &= \frac{g}{h^{i-1}} \int_{-h}^0 \rho(z) z^i dz = gh^2 \int_{-1}^0 \tilde{\rho}(\tilde{z}) \tilde{z}^i d\tilde{z} \end{aligned}$$

mit  $\tilde{\rho}(\tilde{z}) = \rho(z = \tilde{z}h)$ .

Um ein Gefühl von der Größenordnung der Momente zu bekommen, betrachte man zunächst nochmal die Definition der Störungsdichte:

$$\rho := \frac{\rho^*(x, y, z, t) - \bar{\rho}^*(z)}{\rho_0^*}, \quad (\text{C.2})$$

wobei  $\bar{\rho}^*$  die Hintergrundichtung,  $\rho^*$  die wirkliche dimensionsbehaftete potentielle Dichte und  $\rho_0^*$  eine Skalierungsdichte beschreiben. Typische Werte für die Dichte liegen im Ozean im Bereich  $\rho^* = 1025 \dots 1050 \text{ kg/m}^3$ . Mit einer Skalierungsdichte von  $\rho_0^* = 1000 \text{ kg/m}^3$  sollte die Störungsdichte um  $|\rho| < 0.025 =: \rho_{max}$  liegen. Hieraus lässt sich dann die Größenordnung  $G_m$  ableiten. Verwendet man Beziehung (C.1), so ergibt sich  $|G_m| < \frac{gh^2}{m+1} \rho_{max} =: G_m^{max}$ . In der folgenden Tabelle sind diese Werte für ein paar Tiefen  $h$  durchgespielt:

$h$ [m]	$G_1^{max}$ [ $10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ ]	$G_3^{max}$ [ $10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ ]	$G_5^{max}$ [ $10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ ]	$G_7^{max}$ [ $10^6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ ]
0	0	0	0	0
2000	0.981	0.327	0.196	0.140
4000	3.924	1.308	0.785	0.561
6000	8.829	2.943	1.766	1.261

Die Momente einer Tiefe werden mit wachsender Ordnung kleiner. Aus Betrachtung der letzten Substitution in Gleichung (C.1) ist der Grund dafür zu erkennen. Mit wachsender Ordnung  $i$  gehen die Gewichtsfunktionen  $z^i$  auf dem Intervall  $[-1, 0]$  stärker gegen Null, so dass die höheren Momente stark unterdrückt werden.

Doch wie könnte so ein Profil einer Störungsdichte aussehen? Dazu können gemessene Daten herangezogen und eine BARBI-Störungsdichte konstruiert werden. Aus dem Levitus-94 Datensatz können Temperatur- und Salzgehaltsprofile für den Ozean entnommen werden, woraus man dann die potentielle Dichte bezogen auf den Oberflächen-druck berechnen kann. In Abb. C.1 sieht man diese Profile<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Dabei gelten  $\bar{\rho}^* = \rho_S - \rho_0^* \frac{N^2}{g} z$  mit  $N = 0.0023 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho_S^* = 1027 \text{ kg/m}^3$  und  $\rho_0^* = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Im Folgenden sollen mögliche Lösungsansätze für das inverse Problem vorgestellt werden. Dabei werden die Lösungsmethoden auf das folgende Problem angewendet: *Gegeben sei ein Störungsdichteprofil (wie etwa das Profil  $\rho_{fit}$  in Abb. C.1). Mit diesem wird dann eine bestimmte Anzahl von Momenten berechnet. Aus diesen Momenten wird schließlich wieder mit dem zu testenden Verfahren das Dichteprofil rekonstruiert, so dass man Ausgangsprofil und Lösung vergleichen kann. Zusätzlich können, um die Stabilität des Verfahrens zu testen, die berechneten Momente leicht gestört werden.*

## C.2 Verfahren nach Talenti

In seiner Arbeit betrachtet G. Talenti (1987) [58] das allgemeinere Hausdorfsche Momentproblem und stellt einen Lösungsalgorithmus auf der Grundlage von Legendrepoly-nomen vor. Dieser Algorithmus soll im Folgenden auf das hier vorliegende Problem angewandt werden. Diese Arbeit sei übrigens jedem ans Herz gelegt, der sich etwas umfassender über den mathematischen Hintergrund des Hausdorfschen Momentproblems und die verwendeten Lösungsstrategien informieren möchte. Es sei noch bemerkt, dass Carsten Eden einen ähnlichen Ansatz verwendet hat, um das Dichteprofil zu rekonstruieren. Dieser wird hier aber nicht vorgestellt, kann aber sicherlich bei ihm nachgefragt werden<sup>3</sup>.

**Umschreiben der Momente** Um das Verfahren nach Talenti direkt zu verwenden, müssen die BARBI-Momente  $G_i$  in die bei Talenti verwendeten Momente  $\mu_i$  umgewandelt werden. Dazu kann das Integral in Gleichung (C.1) durch eine Variablensubstitution umgeschrieben werden.

- Durch die Substitution  $\tilde{x} := -z/h$  geht das  $i$ . Moment über in:

$$\begin{aligned} G_i &= gh^2 (-1)^i \int_0^1 \tilde{\rho}(\tilde{x}) \tilde{x}^i d\tilde{x} \quad (\text{C.3}) \\ & \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots \end{aligned}$$

mit  $\tilde{\rho}(\tilde{x}) = \rho(z = -\tilde{x}h)$ .

- In einem weiteren Schritt wird dem Umstand Rechnung getragen, dass nur die ungeraden Momente  $2i + 1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  verwendet werden. Wird die Substitu-

<sup>3</sup>ceden@ifm-geomar.de

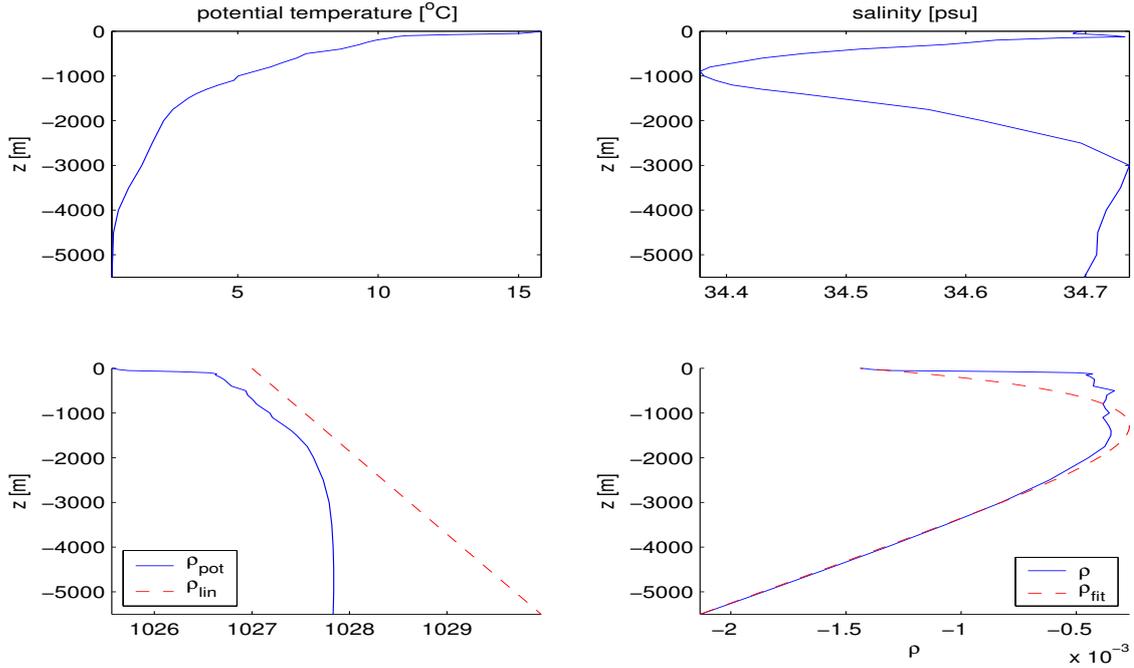


Abbildung C.1: Potentielle Temperatur, Salzgehalt, rekonstruierte potentielle Dichte und Störungsichte anhand des Levitus-94 Datensatzes im südlichen Pazifik. Weiterhin wurde die Störungsichte  $\rho$  durch eine Exponentialfunktion angenähert ( $\rho_{fit} = \frac{1}{\rho_0^*}(-1.438 + \rho_0^* \frac{N^2}{g} z - 2.27 \cdot (\exp(z/750) - 1))$ ).  $\rho_{lin}$  bezeichnet das lineare Hintergrunddichteprofil.

tion  $\tilde{x} = \sqrt{x}$  verwendet, so ergibt dies:

$$\begin{aligned} \mu_i &:= \frac{2}{gh^2(-1)^{2i+1}} G_{2i+1} & (C.4) \\ &= \int_0^1 \hat{\rho}(x) x^i dx \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

mit  $\hat{\rho}(x) = \rho(z = -h\sqrt{x})$  und  $x \in [0, 1]$ .

Die von Talenti beschriebene Methode lässt sich nun auf dieses umgeschriebene BARBI-Problem

$$\mu_i = \int_0^1 \hat{\rho}(x) x^i dx \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (C.5)$$

anwenden.

**Vorstellung der Methode** Die Lösung des inversen Problems (C.5) wird in Form eines Polynoms  $p(x)$  gesucht, das sich mit Hilfe verschobener Legendrepolynome  $L_i = \sum_{j=0}^i C_{ij} x^j$  darstellen lässt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^N \lambda_i L_i(x) \quad (C.6)$$

Damit und mit Hilfe des Skalarproduktes  $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \cdot g dx$  ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten  $\lambda_i$  durch:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \int_0^1 L_i(x) \cdot p(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^N C_{ij} x^j \cdot p(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^N C_{ij} \int_0^1 x^j p(x) dx = \sum_{j=0}^N C_{ij} \mu_j \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung lässt sich dann als Matrixgleichung  $\lambda = C\mu$  schreiben, wobei C eine untere Dreiecksmatrix bestehend aus den Koeffizienten der Legendrepolynome ist. Hat man die Matrix C und die Momente, so lassen sich die Koeffizienten einfach über die Matrixgleichung bestimmen.

Diese Matrix wiederum kann einfach iterativ berechnet werden durch:

$$\begin{aligned} C_{00} &= 1, \quad C_{i,0} = (2i + 1)^{1/2} \\ C_{ij} &= -C_{i,j-1} \left( \frac{i}{j} + 1 \right) \left( \frac{i+1}{j} - 1 \right) \quad (C.7) \\ &\quad (i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 1, 2, \dots, i) \end{aligned}$$

Ist  $P_i$  das herkömmliche  $i$ . Legendrepolynom so ist das transformierte Legendrepolynom nach Talenti gegeben durch

$$L_i(x) = (-1)^i (2i + 1)^{1/2} P_i(2x - 1) \quad (C.8)$$

**Testen der Methode** Um die Methode zu testen, wird wie vorne beschrieben vorgegangen. Dazu werden mit Hilfe der Funktion der Form<sup>4</sup>  $\rho(z) = a * \exp(z/d) + b$  die Momente berechnet. Diese werden dann mit einem zufälligen Fehler versehen, und aus diesen fehlerbehafteten Momenten die Dichte rekonstruiert.

Zur Berechnung der fehlerbehafteten Momente wird die Vorschrift  $G^\epsilon = G(1 + \epsilon * ru)$  verwendet, wobei es sich bei  $ru$  um einen Vektor handelt, der aus einer zufälligen Anordnung der Werte  $\{-1, 1\}$  besteht. Der Datenfehler in den Momenten wird dabei gemessen durch  $\|G - G^\epsilon\|_2 / \|G\|_2 \cdot 100$ , wobei  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm im  $\mathbb{R}^M$  ist.

In Abb. C.2 sind beispielhaft die ersten 6 Momente der Funktion mit ihren fehlerhaften Daten für zwei verschiedene Datenfehler dargestellt. Die rekonstruierten Dichten sind in den Abb. C.3 - C.5 zu sehen.

Aus den Abbildungen kann man folgendes entnehmen: Laut Abb. C.3 ist selbst für ungestörte Momente die Rekonstruktion ab einer gewissen Anzahl von Momenten schwierig. Während die Rekonstruktion bis zu einer Anzahl von 20 Momenten immer besser zu werden scheint, erhält man für 25 Momente eine stark oszillierende Lösung, deren Werte das ursprüngliche Dichteprofil betragsmäßig weit übertreffen. Es wäre also nicht sinnvoll, die Anzahl der Momente unbegrenzt wachsen zu lassen, da man ab einer gewissen Schwelle die rekonstruierte Lösung nicht mehr verbessert<sup>5</sup>.

Erhöht sich der Datenfehler, so werden bereits die Lösungen mit einer kleinen Anzahl von Momenten stark oszillierend. Selbst für kleine Datenfehler ist die Rekonstruktion der Lösung sicherlich nicht ausreichend.

Die rekonstruierte Dichte trifft die Ausgangsdichte in der Tiefe am besten, während die Oberflächenwerte starke Abweichungen zeigen. Eine kleine Anzahl von Momenten ist zwar unter Datenfehlern stabiler gegen Oszillationen, die Werte an der Oberfläche werden aber mit einer größeren Zahl von Momenten besser erreicht.

<sup>4</sup>Die Struktur ist nicht genau identisch mit einer typischen Störungsdichte, wie sie Abb. C.1 zeigt. Sie ist in etwa gleich, wenn keine Hintergrundschichtung gegeben ist.

<sup>5</sup>Eigentlich ist dieses Verhalten etwas verwunderlich. Sollte man doch erwarten, dass mit zunehmender Momentenzahl ohne Datenfehler die Lösung besser werden. Vermutlich spielen hier numerische Rundungsfehler bei der Berechnung der Momente (über Simpsonsche Regel) eine Rolle, die die Daten immer mit einem Fehler versehen.

### C.3 'Galerkin-Verfahren' mit geeigneten Ansatzfunktionen

Das eben vorgestellte Verfahren dürfte nach meiner Einschätzung in die große Gruppe der Galerkin-Verfahren fallen, bei denen die gesuchte Funktion durch einen Satz von Ansatzfunktionen approximiert wird, und die Entwicklungskoeffizienten bestimmt werden müssen. Talenti hat als Ansatzfunktionen verschobenen Legendrepolynome gewählt. Ich habe dieses Verfahren vorweg gestellt, weil es in dieser Form in der Literatur beschrieben wird, und somit losgelöst von meinen folgenden Ansätzen betrachtet werden kann.

Etwas allgemeiner lässt sich also die Störungsdichte durch eine endliche Entwicklung nach orthogonalen Basis-Polynomen approximieren:

$$\rho(z) \approx \rho_N(z) := \sum_{i=0}^{N-1} a_i P_i(z) \quad (\text{C.9})$$

Mit Hilfe dieses Ansatzes lassen sich die Momente nun schreiben als:

$$\begin{aligned} G_{2j+1} &= \frac{g}{h^{2j}} \int_{-h}^0 \sum_{i=0}^{N-1} a_i P_i(z) z^{2j+1} dz \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{g}{h^{2j}} \int_{-h}^0 P_i(z) z^{2j+1} dz \quad (\text{C.10}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} a_i A_{ji} \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

mit der Matrix  $(A_{ji}) = \frac{g}{h^{2j}} \int_{-h}^0 P_i(z) z^{2j+1} dz$ .

Dieses führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$G = A a \quad (\text{C.11})$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man ein solches System stabil lösen kann. In der Regel ist eine eindeutige Lösung nicht einmal gegeben. Eine Lösung sollte nicht einfach auf 'direktem' Wege in der Form  $a = A^{-1}G$  gesucht werden.

Es sei weiter bemerkt, dass die Anzahl der verwendeten Polynome und Momente nicht zwangsläufig gleich sein muss. Verwendet man mehr Momente als Polynome, hat man den überbestimmten Fall. Sind es mehr Polynome als Momente, ist das Problem unterbestimmt. Im Folgenden soll aber die Anzahl der Momente und der verwendeten Polynome gleich sein.

In diesem Abschnitt sollen zwei Wege eingeschlagen werden:

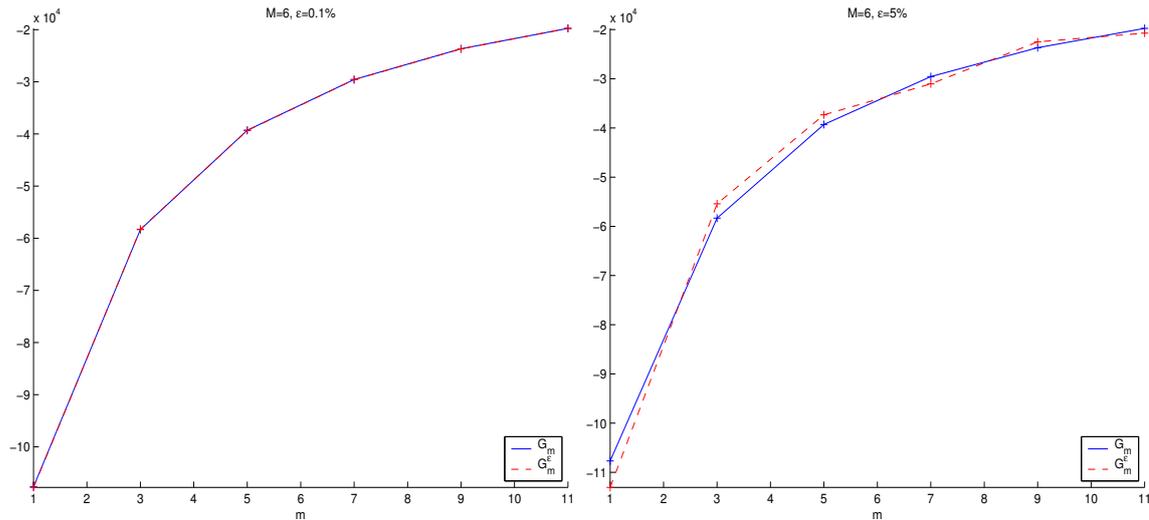


Abbildung C.2: Dichtemomente und die sich ergebenden fehlerbehafteten Momente für zwei verschiedene Datenfehler: links  $\epsilon = 0.1\%$ , rechts  $\epsilon = 5.0\%$ .

1. Der erste Weg betrachtet das Gleichungssystem (C.11) als Minimierungsproblem, so dass der Koeffizientenvektor zu finden ist, der das Funktional  $\|\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{G}\|_2$  minimiert. Dieses führt auf die sogenannte Normalengleichung  $\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{A}'\mathbf{G}$ , deren Lösung gegeben ist durch:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{G}. \quad (\text{C.12})$$

2. Der zweite Weg verwendet eine abgebrochene Singulärwertzerlegung (für Details siehe z.B. Hofmann (1999) [29] oder Olbers (1989) [43]). Bei dieser wird nicht die komplette Matrix  $\mathbf{A}'\mathbf{A}$  invertiert, sondern nur eine Näherung bis zu einer frei wählbaren Ordnung  $k \leq N$  dieser Matrix<sup>6</sup>. Selbst wenn es möglich wäre, kann dieses Verfahren nicht die exakte Lösung liefern. Doch ist es stabiler gegen Fehler in den Daten, so dass Abweichungen von der richtigen Lösung kleiner bleiben.

### C.3.1 Verwendung von Legendrepolyomen

Als Ansatzfunktionen sollen in diesem Abschnitt Legendrepolynome verwendet werden. Die Systemmatrix lautet dann

<sup>6</sup>Genauer ist hiermit gemeint, dass man den Lösungsvektor darstellen kann durch  $\mathbf{a}_{min} = \sum_i^N \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{b}_i$  mit den singulären Werten  $\sigma_i$  der Systemmatrix und speziellen Vektoren  $\mathbf{b}_i$ , die nur durch das singuläre System der Systemmatrix und die Eingangsdaten (hier die Momente) bestimmt sind. Da die Singulärwerte mit zunehmenden Index fallend sind, und bei schlecht gestellten Problemen die letzten Werte sehr klein ( $\approx 0$ ) sein können, kann man ein 'Explodieren' der Lösung dadurch unterdrücken, dass man die Summe nicht bis zum maximalen  $N$ , sondern nur bis zu einem 'ungefährlicheren'  $k < N$  laufen lässt.

für die Momente in Beziehung (C.10):

$$(A_{ji}) = \frac{g}{h^{2j}} \int_{-h}^0 L_i(z) z^{2j+1} dz, \quad (\text{C.13})$$

wobei  $L_i$  das  $i$ . verschobene Legendrepolynom bezeichnet, das sich aus dem herkömmlichen Legendrepolynom  $\bar{L}_i$  ergibt durch  $L_i = \bar{L}(2z/h + 1)$ .

Verwendet man jedoch die dem Talenti-Verfahren zu Grunde liegende Substitution  $z = -h\sqrt{x}$ , so lassen sich die Momente schreiben als:

$$G_{2j+1} = (-1)^{2j+1} \frac{gh^2}{2} \int_0^1 \hat{\rho}(x) x^j dx \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.14})$$

mit  $\hat{\rho}(x) = \rho(z = -h\sqrt{x})$  und  $x \in [0, 1]$ . In diesem Fall approximiert man die Funktion  $\hat{\rho}(x)$  durch geeignete Ansatzfunktionen und löst das Problem dann für diese. Die Ausgangsfunktion  $\rho(z)$  erhält man dann durch  $\rho(z) = \hat{\rho}(x = (-z/h)^2)$ . Die Matrix für diesen Fall ist gegeben durch:  $(A_{ji}^s) = (-1)^{2j+1} \frac{gh^2}{2} \int_0^1 L_i(x) x^j dx$ , wobei  $L_i$  nun das  $i$ . verschobene Legendrepolynom nach Talenti bezeichnet, das sich mit dem herkömmlichen Legendrepolynom  $\bar{L}_i$  schreiben lässt als  $L_i(x) = (-1)^i (2i + 1)^{1/2} \bar{L}_i(2x - 1)$ . Wie sich auch in den Ergebnissen zeigen wird, ist dieses Verfahren gleich dem Talenti-Verfahren, wobei mir der Grund nicht ganz klar vor Augen liegt.

Beide Ansätze sollen im Folgenden untersucht werden.

Ein Maß für die Schlechtgestellttheit eines Problems ist die Kondition der Systemmatrix. Die Systemmatrix lässt sich z.B. durch numerische Integration<sup>7</sup> (z.B. mit Hilfe der

<sup>7</sup>Man könnte sie auch analytisch hinschreiben, da hier ja 'nur' Polyno-

Simpsonschen Regel) einfach berechnen, und man kann die Kondition dann als Funktion der Anzahl  $N$  der verwendeten Polynome darstellen. Für einige Werte von  $N$  ist dies in Tabelle C.1 angegeben. Man erkennt deutlich, wie die Kondition mit wachsendem  $N$  stark ansteigt, so dass aus Gründen der Stabilität die Anzahl der Legendrepolynome nicht zu groß sein darf.

$N$	cond( $A$ ) ohne Sub.	cond( $A$ ) mit Sub.
2	$1.1 \cdot 10^1$	$0.4 \cdot 10^1$
3	$9.9 \cdot 10^1$	$2.2 \cdot 10^1$
4	$9.1 \cdot 10^2$	$1.2 \cdot 10^2$
5	$8.3 \cdot 10^3$	$6.9 \cdot 10^2$
8	$6.6 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^5$
10	$5.7 \cdot 10^8$	$4.0 \cdot 10^6$
15	$4.1 \cdot 10^{13}$	$2.5 \cdot 10^{10}$

Tabelle C.1: Kondition der Systemmatrix unter Verwendung der Legendrepolynome.

Die Aufstellung zeigt, dass die Substitution, die auf die Talentiform führt, zu kleineren Konditionszahlen führt. Dies deutet also darauf hin, mit dieser Substitution ein stabileres Verfahren an der Hand zu haben.

**Anwenden von Lösungsweg 1** Die Methoden sollen nun auf das bereits beschriebene Problem angewendet werden, bei dem man eine Dichtefunktion vorgibt, daraus die Momente berechnet, und aus diesen Momenten dann wieder auf die Ausgangsdichtefunktion schließt.

Zunächst sollen die Verfahren auf weitgehend ungestörte Daten angewendet werden<sup>8</sup>. In Abb. C.6 sieht man die Ausgangsdichte mit den rekonstruierten Dichten für verschiedene Anzahlen von Legendrepolynomen. In diesem Fall approximiert das Verfahren ohne Substitution bis zu einer Anzahl von 20 Polynomen die Ausgangsfunktion am besten. Diese Approximation wird in beiden Fällen mit zunehmendem  $N$  besser. Bei  $N = 20$  allerdings bricht das Verfahren ohne Substitution aus, während das andere weitgehend stabil bleibt, worin sich die angesprochenen besseren Konditionszahlen der Systemmatrix mit Substitution bemerkbar machen.

Nun wird auf die Momente ein Datenfehler addiert. In den Abb. C.7 und C.8 sieht man die Ergebnisse für einen

me verwendet werden.

<sup>8</sup>Selbst wenn keine zusätzliche Störung aufaddiert wird, sind die Momente nicht exakt bekannt, da man eine numerische Integration für ihre Bestimmung verwendet.

Datenfehler von  $\epsilon = 0.1\%$  und  $\epsilon = 2\%$ . Nun macht sich die geringere Kondition der Systemmatrix mit Substitution bemerkbar und lässt ein deutlich geringeres Ausreißen erkennen.

**Anwenden von Lösungsweg 2** Bisher wurde das Gleichungssystem immer nach Weg 1 gelöst. Nun soll untersucht werden, ob die abgebrochene Singulärwertzerlegung eine bessere und stabilere Approximation liefert. Die Abb. C.9 und C.10 zeigen das Ergebnis einer abgebrochenen Singulärwertzerlegung für die Matrix  $A$  mit einem Datenfehler von 2%. Im ersten Bild wird nur der letzte Singulärwert unterdrückt und die Anzahl der verwendeten Momente wird erhöht. Im zweiten Bild wird für eine feste Anzahl von  $N = 7$  die Abbruchordnung der Singulärwertzerlegung schrittweise runtergefahren. Beide Bilder zeigen zwar geringer werdende Oszillationen (insbesondere für eine große Abbruchordnung), aber die Lösungen schwanken immer noch stark um die Ausgangsdichte.

**Vergleich der Verfahren** Ein Vergleich der drei bisher vorgestellten Verfahren ist in Abb. C.11 zu sehen. Wie bereits erwähnt, ist das Verfahren nach Talenti mit dem Galerkin-Verfahren mit Substitution gleichwertig. Hinsichtlich der Stabilität sind diese Verfahren dem Verfahren ohne Substitution überlegen.

Bisher ist die Ausgangsdichtefunktion nicht verändert worden. Dieses soll hier kurz nachgeholt werden. In Abb. C.12 sind diese drei Methoden für verschiedene Ausgangsdichten und mit einem Datenfehler von 2% durchgespielt worden. Nach wie vor weist das Galerkin-Verfahren ohne Substitution unabhängig von der Form der Ausgangsdichte wieder die meisten Schwankungen auf.

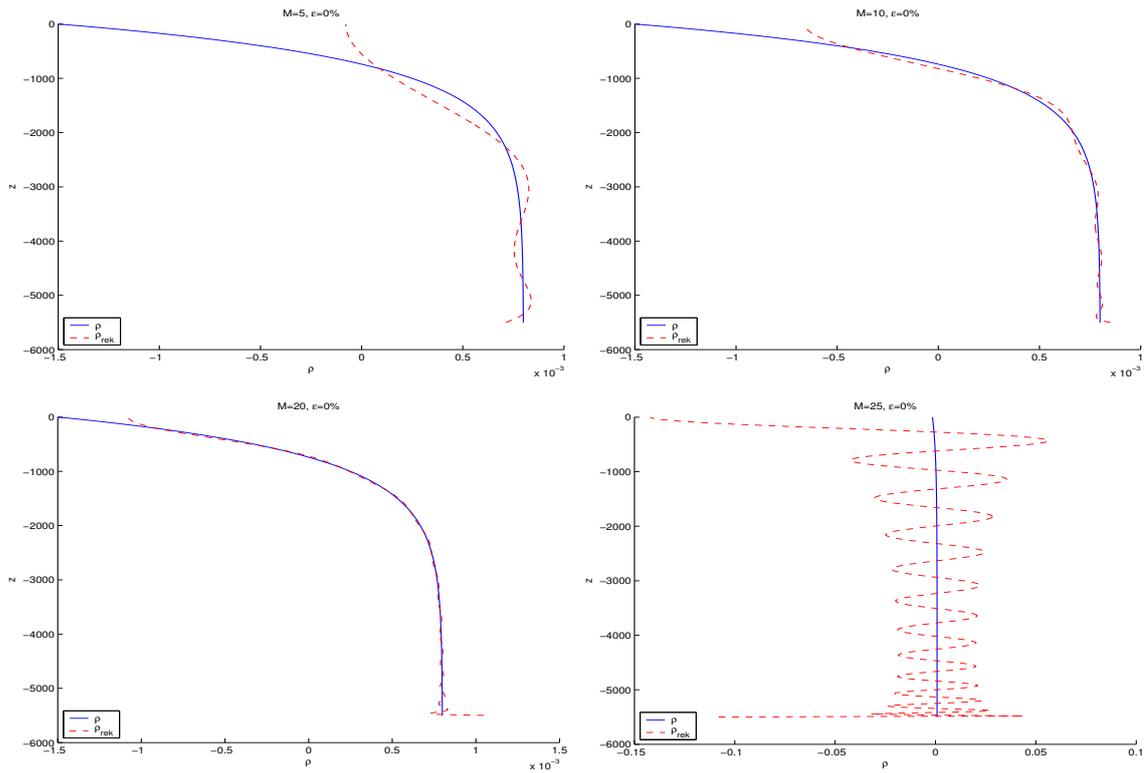


Abbildung C.3: Rekonstruktion der Dichte aus fehlerbehafteten Daten mit  $\epsilon = 0\%$  mit dem Verfahren nach Talenti.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte

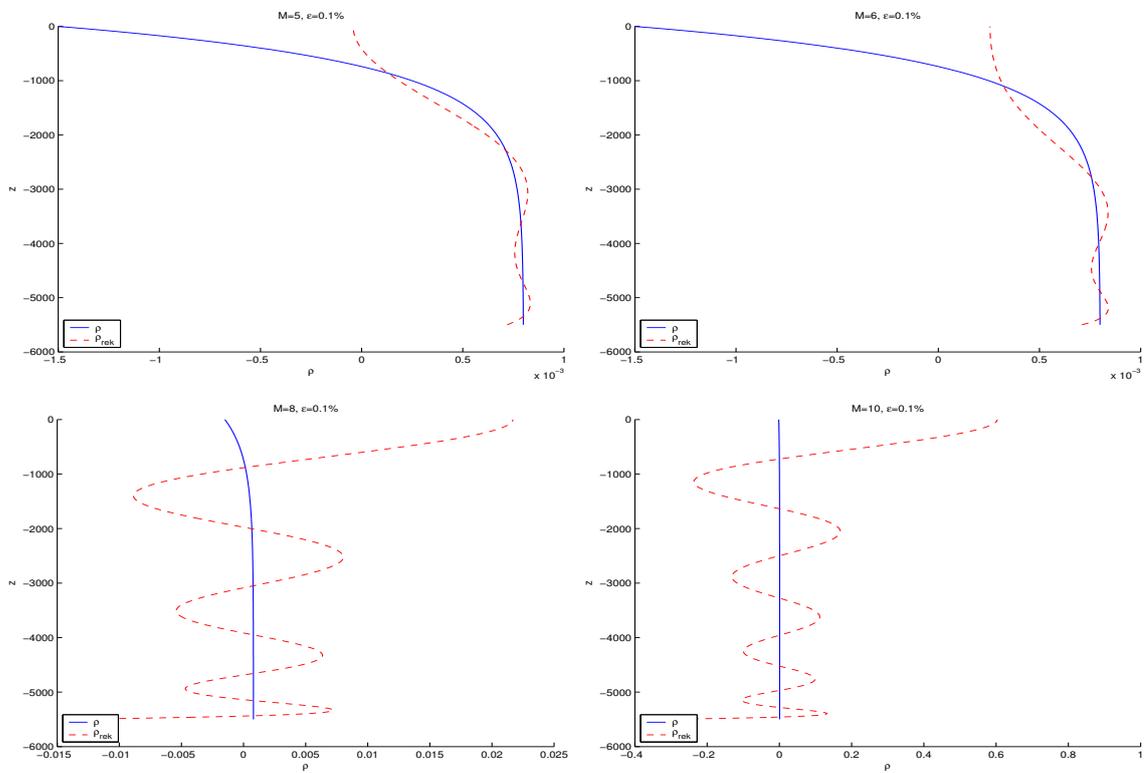


Abbildung C.4: Rekonstruktion der Dichte aus fehlerbehafteten Daten mit  $\epsilon = 0.1\%$  mit dem Verfahren nach Talenti.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte

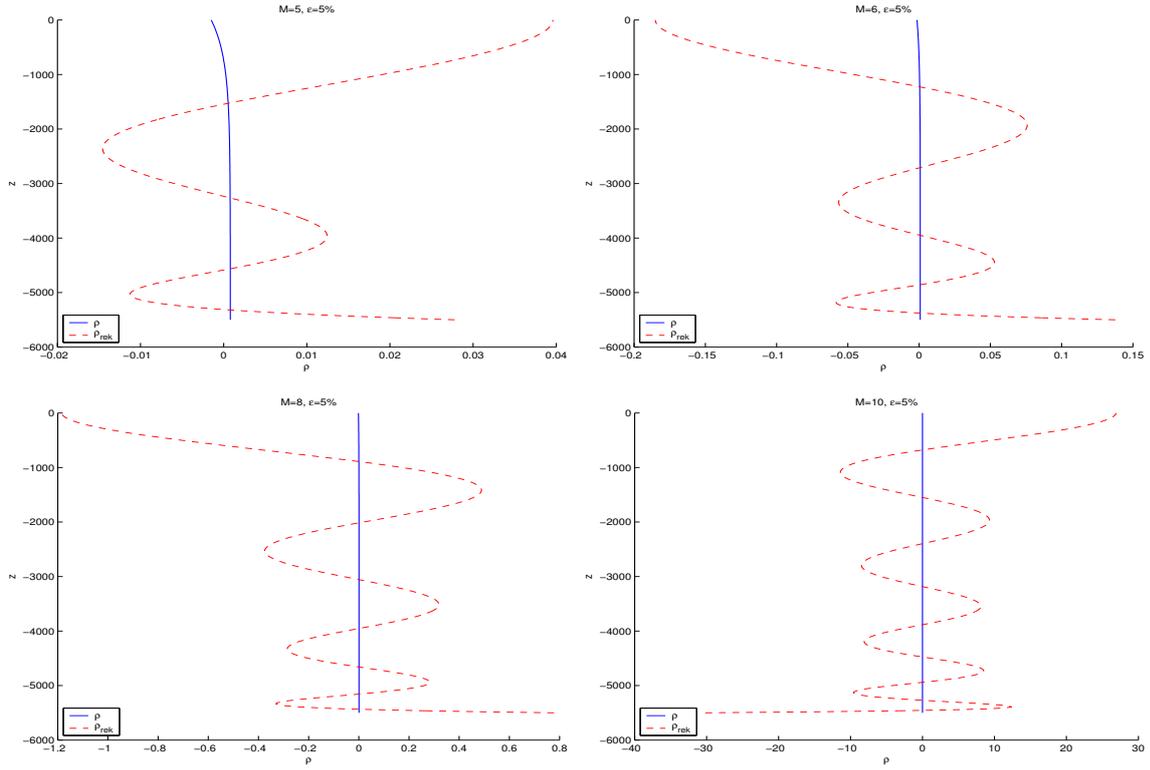


Abbildung C.5: Rekonstruktion der Dichte aus fehlerbehafteten Daten mit  $\epsilon = 5.0\%$  mit dem Verfahren nach Talenti.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte

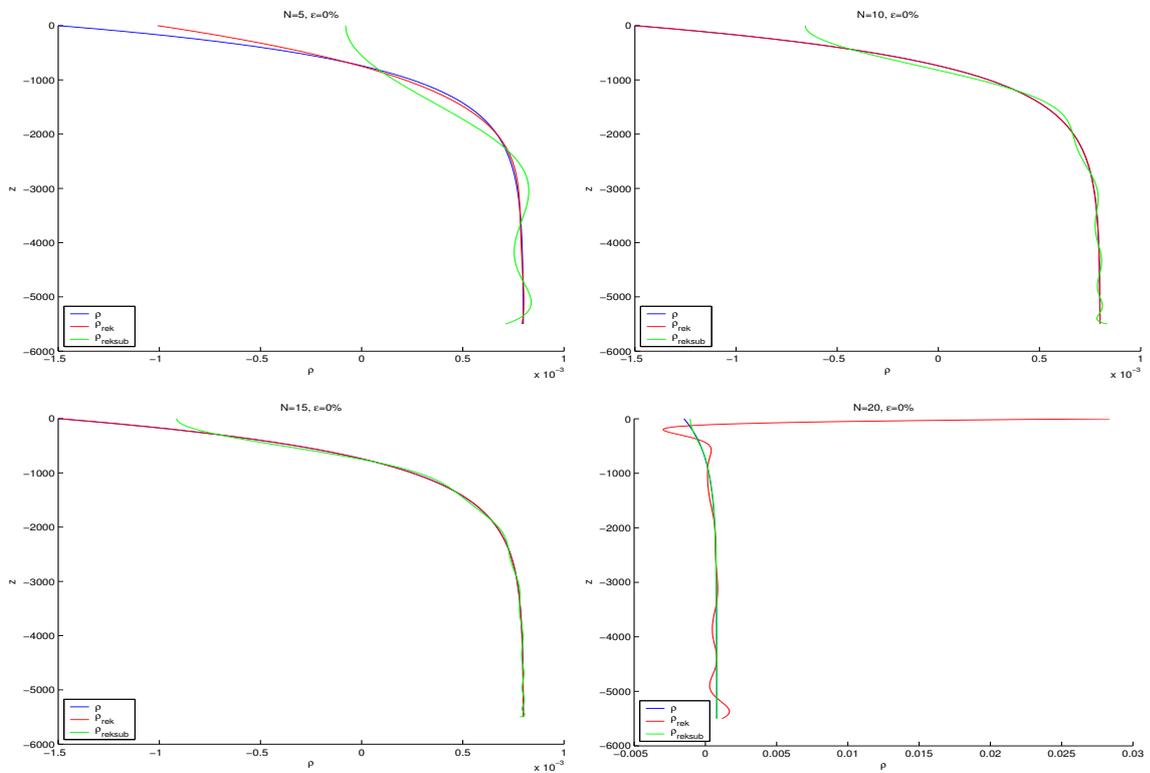


Abbildung C.6: Rekonstruktion der Dichte ohne zusätzlichen Datenfehler für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution.

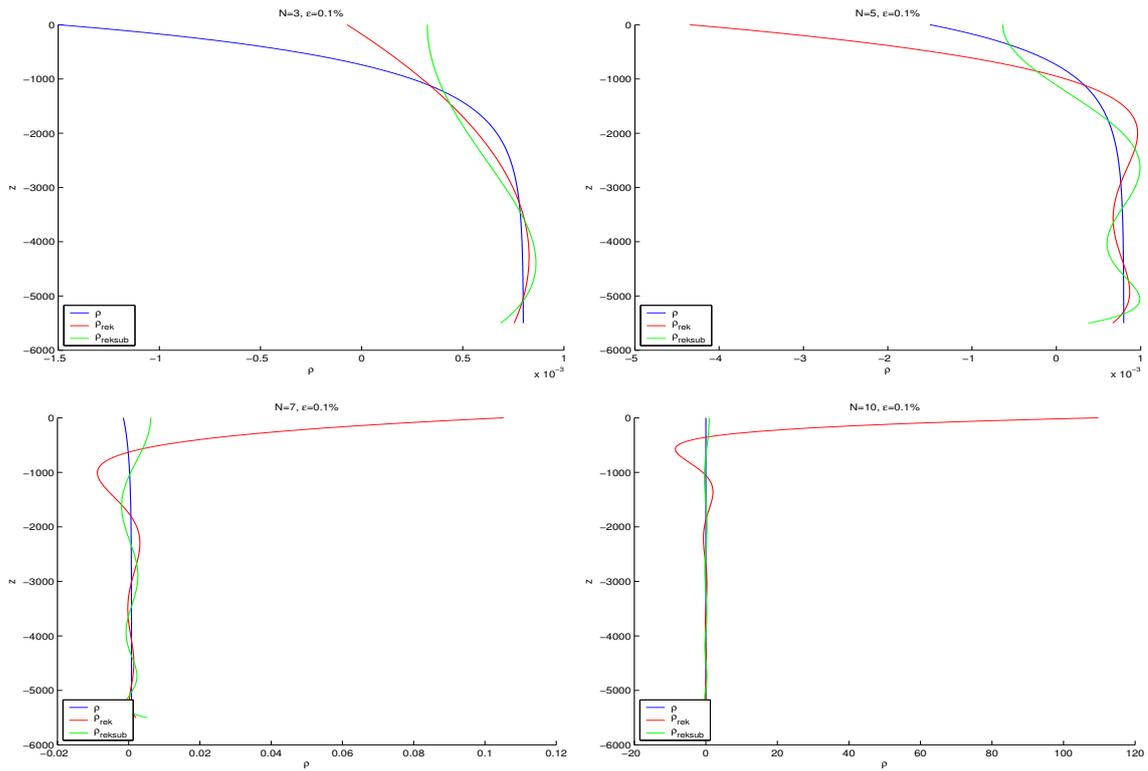


Abbildung C.7: Rekonstruktion der Dichte mit einem Datenfehler  $\epsilon = 0.1\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution.

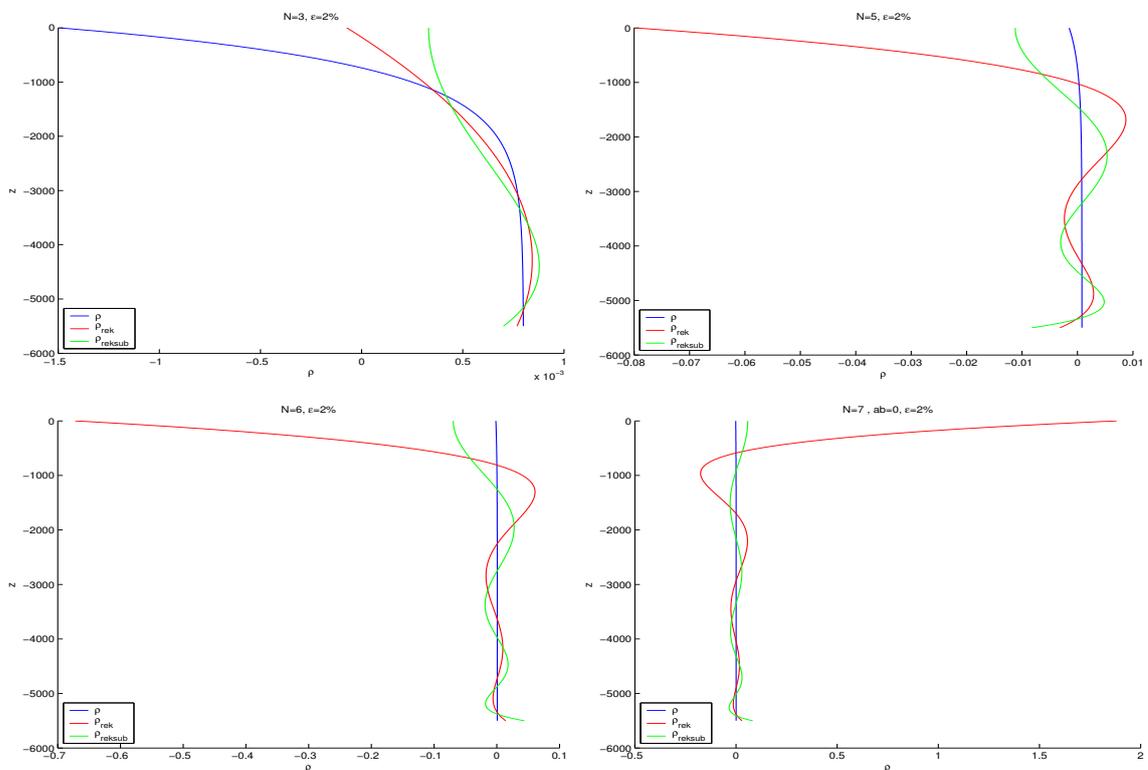


Abbildung C.8: Rekonstruktion der Dichte mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution.

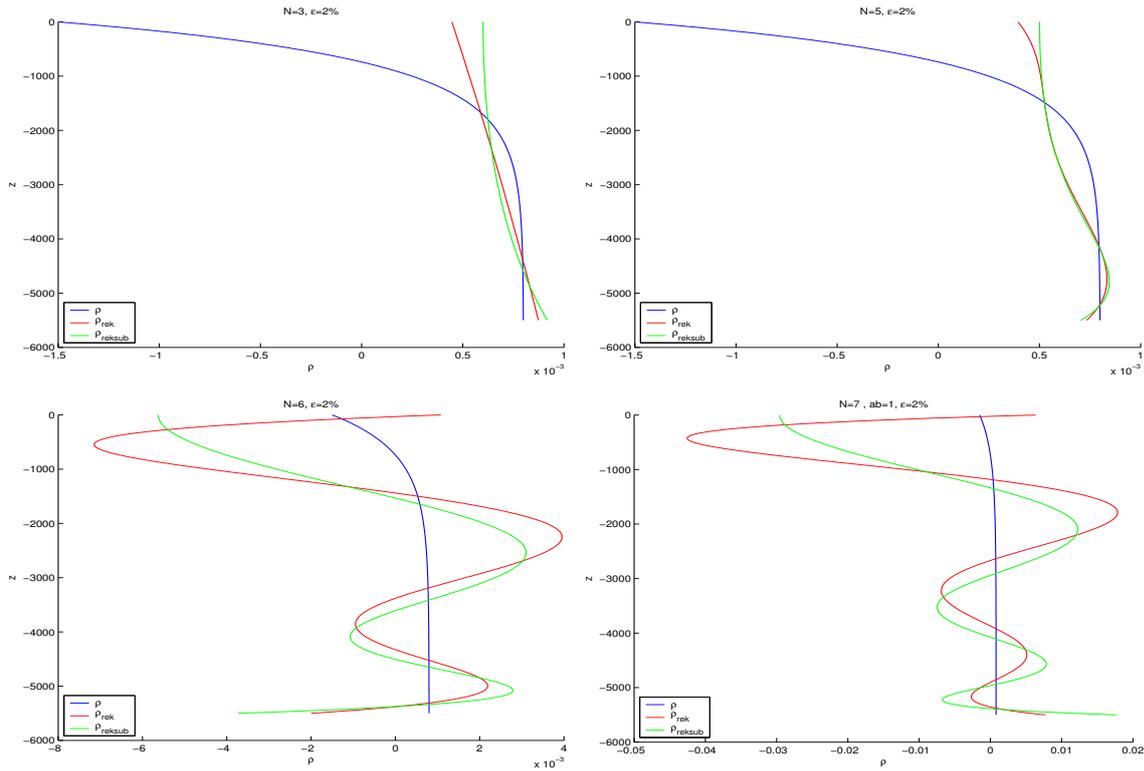


Abbildung C.9: Rekonstruktion der Dichte mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution. Hier wurde eine abgebrochene Singulärwertzerlegung der Matrix  $A$  verwendet. Dabei wurde der letzte Singulärwert unterdrückt.

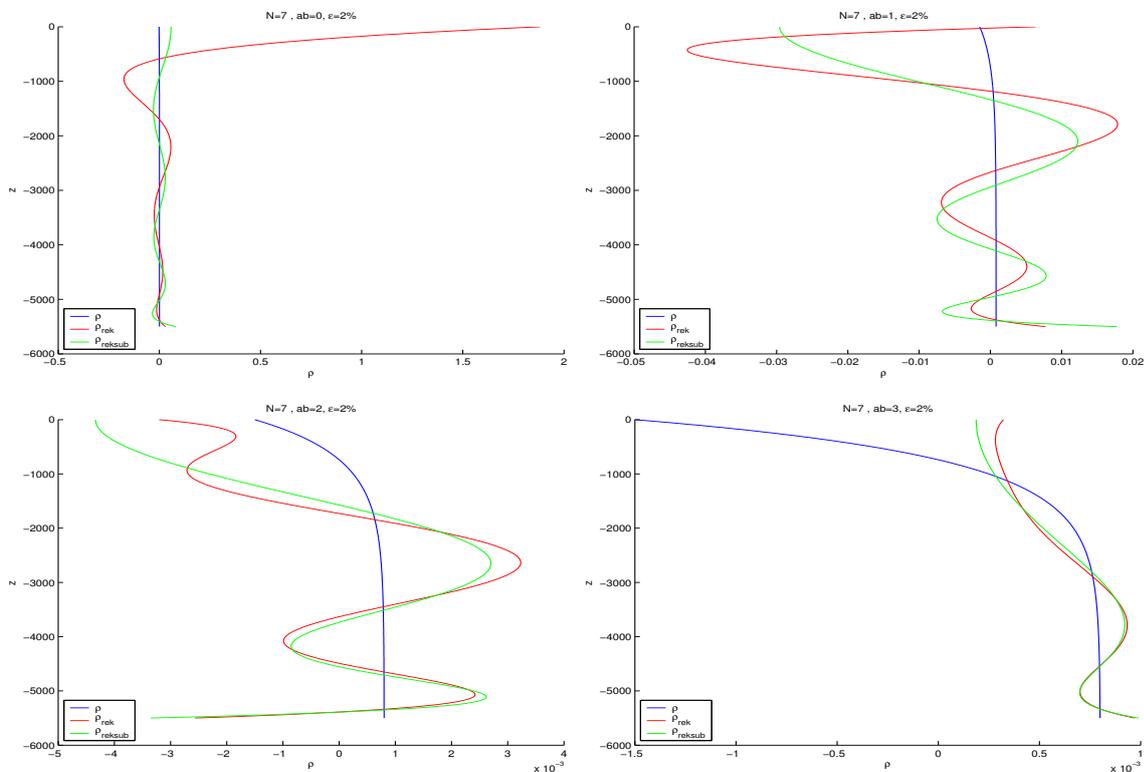


Abbildung C.10: Rekonstruktion der Dichte mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen.  $\rho_{rek}$  ist die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution. Hier wurde eine abgebrochene Singulärwertzerlegung der Matrix  $A$  verwendet.

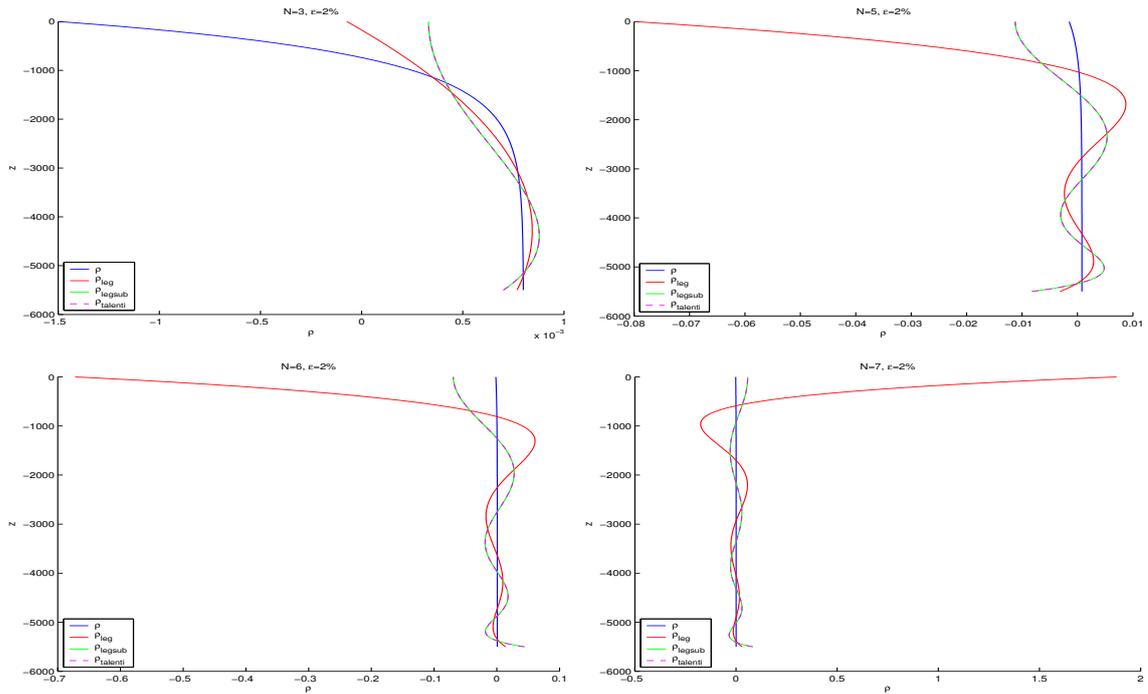


Abbildung C.11: Rekonstruktion der Dichte mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen und das Verfahren nach Talenti.  $\rho_{leg}$  ist die mit dem Galerkin-Verfahren Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution und  $\rho_{talenti}$  die mit dem Talenti-Verfahren rekonstruierte Dichte.

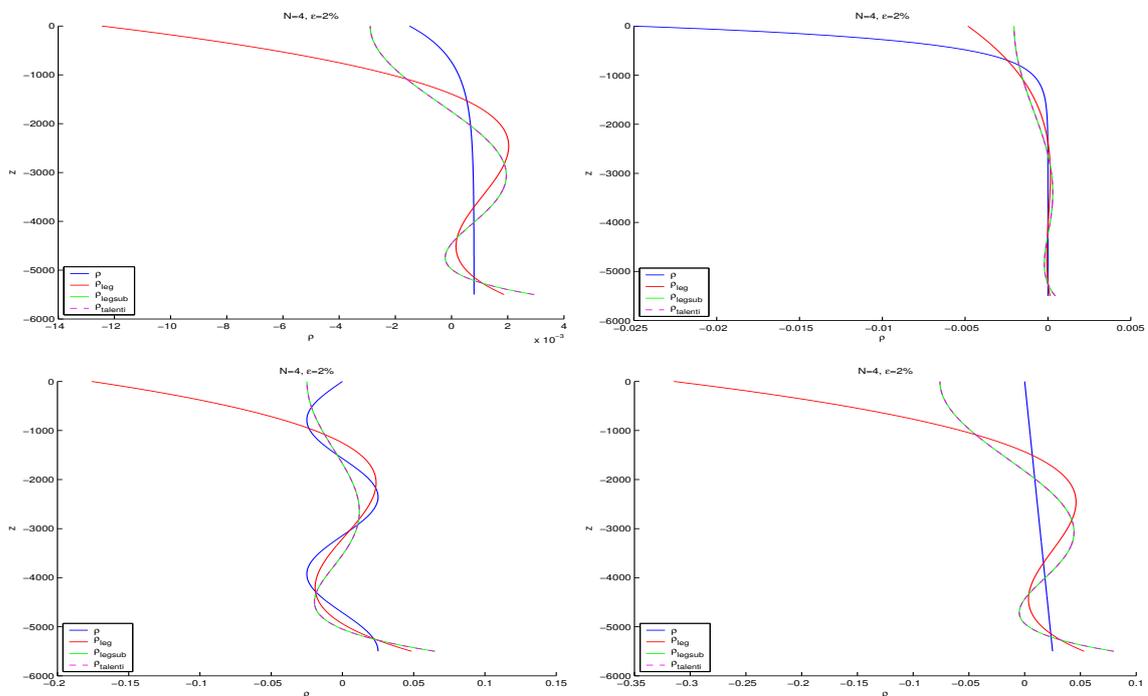


Abbildung C.12: Rekonstruktion verschiedener Ausgangsdichten bei gleicher Anzahl von Basisfunktionen mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  für das Galerkin-Verfahren mit Legendrepoly-nomen und das Verfahren nach Talenti.  $\rho_{leg}$  ist die mit dem Galerkin-Verfahren Dichte ohne Substitution,  $\rho_{reksub}$  mit Substitution und  $\rho_{talenti}$  die mit dem Talenti-Verfahren rekonstruierte Dichte.

### C.3.2 Ein Ansatz mit Stufenfunktionen

Anstelle der Legendrepolynome sollen nun als Ansatzfunktionen Stufenfunktionen gewählt werden. Zusätzlich werden dieses Mal die Momente nach Beziehung (C.1) dargestellt, so dass die Störungsdichte auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definiert ist. Dieses Intervall wird nun durch die Knotenfolge  $(-1 = k_0 < k_1 < \dots < k_N = 0)$  unterteilt. Weiterhin seien auf den Knotenintervallen die charakteristischen Funktionen  $\chi_j$  gegeben durch<sup>9</sup>:

$$\chi_j(z) = \begin{cases} 1 & k_{j-1} \leq z < k_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Die Störungsdichte lässt sich dann schreiben als  $\rho = \sum_{j=1}^N a_j \chi_j$ , und die Dichtemomente sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} G_i &= gh^2 \int_{-1}^0 \rho(z) z^{2i+1} dz \\ &= gh^2 \int_{-1}^0 \sum_{j=1}^N a_j \chi_j z^{2i+1} dz \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ &= gh^2 \sum_{j=1}^N a_j \int_{k_{j-1}}^{k_j} z^{2i+1} dz \\ &= gh^2 \sum_{j=1}^N a_j \frac{1}{2i+2} (k_j^{2i+2} - k_{j-1}^{2i+2}) \end{aligned}$$

Die Systemmatrix lautet dieses Mal:

$$(A_{ij}) := \frac{gh^2}{2i+2} (k_j^{2i+2} - k_{j-1}^{2i+2}) \quad (\text{C.16})$$

Das lineare Gleichungssystem soll wieder auf die zwei Arten gelöst werden, wobei in den folgenden Experimenten die Anzahl der Intervalle auf  $N = 5$  festgelegt wird. Die Lage der Knoten wird hier weiter nicht verändert, was allerdings interessant zu untersuchen wäre. Sie sollen im Folgenden bei  $(-1, -0.75, -0.5, -0.3, -0.1, 0)$  liegen.

**Rekonstruktion einer Stufenfunktion** Zunächst soll als Ausgangsdichte ein stufenförmiges Profil gewählt werden. Dieses wäre ja die Ausgabe eines Ozeanmodells mit diskreten vertikalen Schichten. In Abb. C.13 sieht man die Ergebnisse der Rekonstruktion ohne zusätzlichen Datenfehler und mit einem Fehler von 0.5%. Man erkennt, dass die Rekonstruktion ohne Datenfehler ziemlich gut gelingt. Nur an der Oberfläche sind leichte Abweichungen zu sehen. Betrachtet man jedoch den Fall mit Datenfehler, so sind die Abweichungen beträchtlich (insbesondere an der Oberfläche).

**Realistisches Dichteprofil** Nun soll ein glattes Dichteprofil betrachtet werden. In Abb. C.14 ist das Ergebnis der Rekonstruktion zu sehen. Bereits ohne zusätzlichen Datenfehler kann das Profil (mittleres Bild) nicht ausreichend wiedergegeben werden. Etwas besser sieht es aus, wenn man eine abgebrochene Singulärwertzerlegung unter Weglassen des höchsten Singulärwertes (rechtes Bild) verwendet. In diesem Fall sind die Schwankungen um die Ausgangsdichte nicht mehr so stark.

### C.3.3 Zusammenfassung

Nachdem nun die einzelnen Verfahren vorgestellt worden sind, soll an dieser Stelle eine kurze Bewertung der Verfahren gegeben werden. Sofern ich keine Fehler gemacht habe, kann ich sagen, dass keines der Verfahren richtig zufriedenstellend ist. Ich kann aber ein paar Empfehlungen geben:

- Vertraut man den Modelldaten und erwartet somit keine Datenfehler, so ist sicherlich das Galerkin-Verfahren ohne die Talenti-Substitution eine gute Wahl. (Die Substitution  $x = zh$  wäre noch zu testen.)
- Geht man aber von leichten Datenfehlern aus, so ist die Substitution nach Talenti und/oder die abgebrochene Singulärwertzerlegung die bessere Alternative.
- Man sollte die Anzahl der Momente nicht zu groß wählen. Obgleich die Ergebnisse mit wachsender Anzahl zunächst besser werden, treten ab einer Schwelle starke Oszillationen auf. Ein Wert bis  $N=7$  wäre angemessen. Der grobe Verlauf der Dichte sollte dann wenigstens enthalten sein.

Ob man nun eher Stufenfunktionen oder Legendrepolynome verwenden sollte, kann ich nicht genau sagen. Dazu müsste man etwas umfangreichere Untersuchungen machen. Generell könnte dieses Verfahren auch noch mit weiteren Ansatzfunktionen ausprobiert werden. Es wären z.B. Tschebyschew-Polynome oder eine Fourierreihe denkbar. Interessant wären auch B-Splines, da ihr Träger beschränkt ist, und Oszillationen in der Regel nicht so stark ausfallen. Die obigen Stufenfunktionen sind schon B-Splines erster Ordnung gewesen. Es wäre jedoch interessant, was B-Splines höherer Ordnung bewirken.

<sup>9</sup>Als Ausnahme gelte für  $z = 0$   $\chi_N(0) = 1$ .

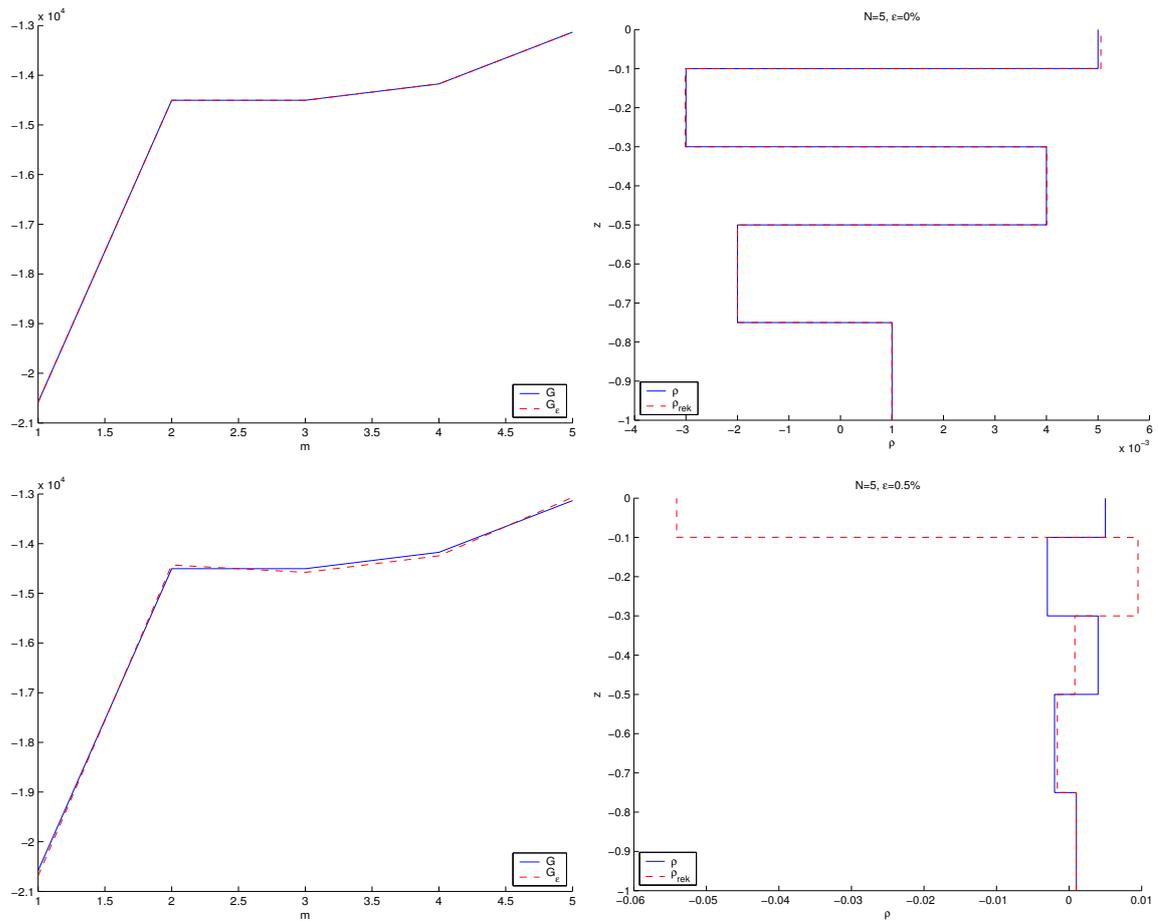


Abbildung C.13: **Links** sind die Dichtemomente und ihre Störung zu sehen, **rechts** die mit dem Verfahren rekonstruierte Dichte  $\rho_{rek}$ . **Obere Reihe**: ohne zusätzlichen Datenfehler. **Untere Reihe**: Datenfehler von 0.5%.

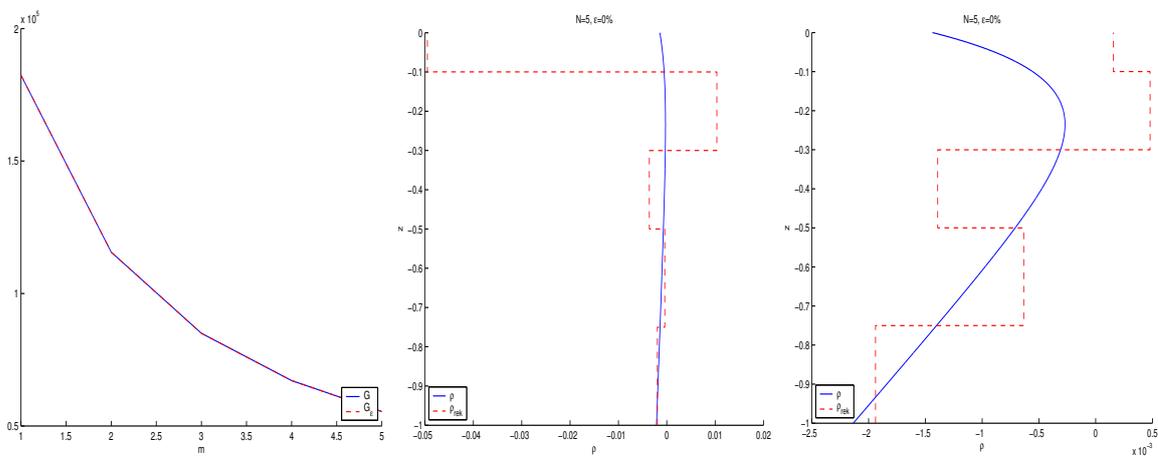


Abbildung C.14: **Links** sind die Dichtemomente und ihre Störung zu sehen. Auf dem **mittleren** Bild die rekonstruierte Dichte  $\rho_{rek}$  im Vergleich zur Ausgangsdichte nach Methode 1. Auf dem **rechten** Bild die rekonstruierte Dichte mit einer abgebrochenen Singulärwertzerlegung.

## C.4 Die Methode der Tichonov-Regularisierung

Die folgende Methode ist im Grunde kein neuer Ansatz, sondern ergänzt die weiter vorne vorgestellten Verfahren 1 und 2 zur Lösung des linearen Gleichungssystems (C.11). Wie sich weiter unten zeigen wird, ist sie in gewissem Sinne mit der abgebrochenen Singulärwertzerlegung verwandt. Sie soll an dieser Stelle gesondert besprochen werden, da ich den vorhergehenden Abschnitt nicht noch unübersichtlicher machen wollte. Die Methode kann u.a. nachgelesen werden bei Hofmann (1999) [29] und soll hier ein bisschen ausführlicher als nötig eingeführt werden, weil man darauf aufbauend weitere Untersuchungen anschließen könnte, die aber den Rahmen dieser Arbeit überschreiten.

### C.4.1 Allgemeine Beschreibung

Gegeben sei folgende lineare Abbildung zwischen den Hilberträumen<sup>10</sup>  $X$  und  $Y$ :

$$A : X \longrightarrow Y \quad Ax = y \quad (\text{C.17})$$

Es sei weiter das inverse Problem für den fehlerbehafteten Datenvektor  $y_\delta$  zu lösen. Dann liefert

$$x_\delta^\alpha := (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*y_\delta \quad (\text{C.18})$$

eine gute Lösung, die einigermaßen stabil von den Ausgangsdaten abhängt. Dabei bezeichnen  $A^* : Y \longrightarrow X$  den zu  $A$  adjungierten Operator,  $I$  den Einheitsoperator in  $X$  und  $\alpha > 0$  einen festen Parameter. Die Lösung ist in dem Sinne gut, als dass sie das sogenannte Tichonov-Funktional  $T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\|x\|_X^2$  minimiert. Dieses Funktional unterscheidet sich von dem des letzten Abschnittes um den zusätzlichen Term  $\alpha\|x\|_X^2$ , den man auch als Strafterm bezeichnen kann. Dieser Term kann sicherstellen, dass die zu suchende Lösung zusätzlich der Norm entsprechende Eigenschaften hat.

Der Zusammenhang zur abgebrochenen Singulärwertzerlegung ergibt sich dann folgendermaßen. Unter Verwendung des singulären Systems des Operators (Matrix) lässt sich diese Lösung auch schreiben als:

$$x_\delta^\alpha = \sum_i \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha} b_i \quad (\text{C.19})$$

mit  $b_i \in X$  und derselben Bedeutung wie vorne. Wählt man also den Parameter  $\alpha = 0$ , so erhält man wieder die Darstellung der ursprünglichen Singulärwertzerlegung. Anstatt

<sup>10</sup>Ein Hilbertraum ist grob gesprochen ein linearer Raum mit Skalarprodukt und weiteren speziellen Eigenschaften.

nun die höheren Terme mit kleinen singulären Werten einfach wegzulassen, wird der Parameter  $\alpha$  eingeführt, um ihre explodierende Wirkung abzuschwächen<sup>11</sup>. Je nach Wahl dieses Parameters wirkt er mehr auf die kleinsten oder auf alle Anteile der Summe. Obgleich damit das System stabilisiert werden kann, ergibt sich das neue Problem, den Parameter  $\alpha$  geschickt zu wählen. Es gibt eine Reihe von Verfahren, um ein optimales  $\alpha$  nach gewissen Kriterien zu bestimmen. Diese sollen aber hier nicht vorgestellt oder angewendet werden, da dieses für mich zu umfangreich gewesen wäre.

Hiermit ist das Besondere der Tichonov-Regularisierung eigentlich abgeschlossen. Das Folgende ist wieder etwas allgemeinerer Natur. Es stellt sich nun die Frage, wie man die entsprechenden Operatoren in den Räumen bestimmt und welche Räume (mit der entsprechenden Normen) man eigentlich wählt. Es wird sich nämlich später zeigen, dass dieses entscheidenden Einfluss auf die Stabilität der Lösungen hat.

**Darstellung der Operatoren auf den Basen** In den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  seien jeweils Basen  $\{u_i\}$  und  $\{v_j\}$  gegeben, so dass sich jedes Element in  $X$  eindeutig als  $x = \sum_i x_i u_i$  bzw. jedes Element in  $Y$  als  $y = \sum_i y_i v_i$  schreiben lässt. Es sei dann  $\mathbf{x} = (x_1, \dots)^T$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots)^T$ . Weiterhin bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  das (hier nur reellwertige) Skalarprodukt in  $X$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  das in  $Y$ .

- Vorwärtsoperator  $A$ :

Sei  $x$  ein beliebiges Element in  $X$  und  $y := Ax$  sein Bild in  $Y$  so gilt:

$$\begin{aligned} \sum_i y_i \langle v_i, v_j \rangle_Y & \\ \parallel & \\ \langle y, v_j \rangle_Y &= \langle \sum_i y_i v_i, v_j \rangle_Y \\ \parallel & \\ \langle Ax, v_j \rangle_Y &= \langle A \sum_i x_i u_i, v_j \rangle_Y \\ \parallel & \\ \sum_i x_i \langle Au_i, v_j \rangle_Y & \end{aligned}$$

Mit  $\mathbf{E}^Y := (\langle v_i, v_j \rangle_Y)$  und

$\mathbf{B} := (\langle Au_i, v_j \rangle_Y)$  ergibt sich also in Matrix-

<sup>11</sup>Ein physikalisches Beispiel wäre die Einführung der Reibung  $\epsilon$  bei einem Oszillator nahe der Resonanzfrequenz. In den Amplituden des Oszillators treten dann nicht mehr Faktoren auf der Form  $(|\omega^2 - \omega_0^2|)^{-1}$  mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  sondern der Form  $((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \epsilon\omega^2)^{-1}$ .

schreibweise  $E^Y y = Bx$ . Mit der in der Regel gegebenen Invertierbarkeit von  $E^Y$  folgt  $(E^Y)^{-1} Bx = y$ . Der Operator<sup>12</sup>  $A$  hat also die Darstellung  $A = (E^Y)^{-1} B$ .

- Adjungierter Operator  $A^*$ :

Sei nun  $y$  ein beliebiges Element in  $Y$  und  $x := A^*y$  sein Bild in  $X$ .

Weiterin gilt  $\langle x, A^*y \rangle_X = \langle Ax, y \rangle_Y$ <sup>13</sup>, so dass dann folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_i x_i \langle u_i, u_j \rangle_X \\ & \parallel \\ \langle x, u_j \rangle_X &= \langle \sum_i x_i u_i, u_j \rangle_X \\ & \parallel \\ \langle A^*y, u_j \rangle_X &= \langle A^* \sum_i y_i v_i, u_j \rangle_X \\ & \parallel \\ & \sum_i y_i \langle A^*v_i, u_j \rangle_X \\ & \parallel \\ & \sum_i y_i \langle v_i, Au_j \rangle_Y \\ & \parallel \\ & \sum_i y_i \langle Au_j, v_i \rangle_Y \end{aligned}$$

Mit  $E^X := (\langle u_i, u_j \rangle_X)$  und  $B^T = (\langle Au_j, v_i \rangle_Y)$ <sup>14</sup> ergibt sich also in Matrixschreibweise  $E^X x = B^T y$ . Unter der im allgemeinen erfüllten Annahme der Invertierbarkeit von  $E^X$  folgt  $(E^X)^{-1} B^T y = x$ . Der Operator  $A^*$  hat also die Darstellung  $A^* = (E^X)^{-1} B^T$ .

**Die Entwicklung eines Elementes nach den Basiselementen** Man betrachte z.B. den Hilbertraum  $X$ <sup>15</sup>. Mit Hilfe der Basis in  $X$  lässt sich nun jedes Element  $x$  schreiben als  $x = \sum_i x_i u_i$ . Wie erhält man nun die Entwicklungskoeffizienten  $x_i$ , wenn  $x$  und die  $u_i$  bekannt sind? Dazu betrachte man zunächst für ein Basiselement  $u_j$  die fol-

gende Beziehung:

$$\langle x, u_j \rangle_X = \langle \sum_i x_i u_i, u_j \rangle_X = \sum_i x_i \langle u_i, u_j \rangle_X$$

Dieses ist die  $j$ . Zeile eines Gleichungssystems mit den unbekanntem  $x_i$ . Schreibt man auch die anderen Zeilen auf und definiert  $x_s := (\langle x, u_1 \rangle_X, \dots)^T$  so lässt sich dieses Gleichungssystem schreiben als  $x_s = E^X x$ . Unter der Annahme der Invertierbarkeit von  $E^X$  folgt dann  $x = (E^X)^{-1} x_s$ . Für den Raum  $Y$  erhält man dann analog  $y = (E^Y)^{-1} y_s$  mit  $y_s := (\langle y, v_1 \rangle_Y, \dots)^T$ .

Sind die Basen orthonormal bezüglich des verwendeten Skalarproduktes, so sind die Matrizen  $E^X$  und  $E^Y$  gerade die Einheitsmatrizen und es gilt dann  $x = x_s$  bzw  $y = y_s$ .

**Geeignete Wahl des Urbildraumes  $X$**  Wie bereits erwähnt, minimiert das hier beschriebene Tichonov-Verfahren das entsprechende Tichonov-Funktional  $T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2$ . Dieses stellt eine Kombination aus dem üblicheren kleinste-Quadrate-Funktional und einem sogenannten Strafterm  $\alpha \|x\|_X^2$  dar. Dieser hat nun Einfluss auf die Gestalt der Lösung. Für z.B. wenig schwankende Lösungen (im Falle eines Funktionenraumes  $X$ ) muss man eine Norm in  $X$  bzw. den Raum  $X$  so wählen, dass unerwünschte Lösungen ein großes Tichonov-Funktional bedingen. Eine Norm, die diese Eigenschaft erfüllt, wäre z.B.

$$\begin{aligned} \|x\|_{H^1(a,b)} &:= \sqrt{\|x\|_{L^2(a,b)}^2 + \|x'\|_{L^2(a,b)}^2} \\ &= \sqrt{\int_a^b (x(t))^2 dt + \int_a^b (x'(t))^2 dt} \end{aligned}$$

Diese bezieht also zusätzlich zur Funktion selbst ihre 1. Ableitung mit ein. Ein Strafterm mit dieser Norm würde also große 1. Ableitungen, wie sie durch scharfe Sprünge oder Oszillationen bedingt sind, bestrafen. Das entsprechende Skalarprodukt dazu lautet dann

$$\langle f, g \rangle_{H^1} := \int_a^b f(t) g(t) dt + \int_a^b f'(t) g'(t) dt \quad (C.20)$$

Je nach Urbildraum ergibt sich also über die Matrix  $E^X$  ein anderer adjungierter Operator  $A^*$ . Der Vorwärtsoperator wird durch diese Wahl jedoch nicht beeinflusst. Dass bei diesem Verfahren im Gegensatz zu den zwei anderen Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems Gedanken über den Urbildraum eine Rolle spielen, liegt daran, dass der zusätzliche Strafterm eben die Norm des Urbildraumes enthält. Betrachtet man nur die Norm des Residuums  $\|Ax - y_\delta\|_Y^2$ , so ist diese die Norm Bildraumes  $Y$ .

<sup>12</sup>Verwendet man orthonormale Basen, so ist  $E^Y$  gleich der Einheitsmatrix. Diese umständliche Formulierung wäre dann nicht nötig. Es sollten aber ursprünglich mal die nicht orthonormalen B-Splines als Basisfunktionen verwendet werden. Dieses steht noch aus.

<sup>13</sup>So ist  $A^*$  ja definiert.

<sup>14</sup> $B^T$  ist die zu  $B$  transponierte Matrix, die man erhält, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht.

<sup>15</sup>Für  $Y$  ist die Rechnung analog.

### C.4.2 Legendrepolynome mit Substitution nach Talenti

Nach diesen relativ ausführlichen Ausführungen zum Verfahren, soll dieses nun eine kurze Anwendung finden. Als spezielle Basis in  $X$  werden die Legendrepolynome nach Talenti, und als Raum für  $X$  werden hier der  $L^2$ , der oben beschriebene  $H^1$  und der  $H^2$  (man betrachtet noch die zweiten Ableitungen der Funktionen) verwendet. Der Raum  $Y$  ist je nach Anzahl der Momente der  $\mathbb{R}^N$ . Weiterhin wird bei der Berechnung der Momente die schon erwähnte Substitution des Talenti-Verfahrens verwendet, so dass die Systemmatrix allgemein lautet:

$$(A_{ji}) = (-1)^{2j+1} \frac{gh^2}{2} \int_0^1 L_i(x) x^j dx$$

Um dieses Verfahren einsetzen zu können, werden zunächst die Operatoren  $A$  und  $A^*$  mit Hilfe der Matrizen  $B$ ,  $E^X$  und  $E^Y$  berechnet. Danach wird Beziehung (C.18) verwendet, um die Entwicklungskoeffizienten in der Legendre-Basis zu bestimmen. Schließlich kann man die Lösung mit diesen Koeffizienten und den Legendrepolynomen zusammensetzen.

Neben der Anzahl der Polynome, muss man nun noch den Parameter  $\alpha$  passend wählen. Dabei sind sowohl zu kleine als auch zu große Werte problematisch.

**Vergleich der Räume** Zunächst soll nur ein Vergleich der Räume mit festem  $\alpha$  betrachtet werden. In Abb. C.15 sind die drei Räume für zwei verschiedene  $N$  gegenüber gestellt. Der Parameter  $\alpha$  wird mit  $\alpha = 10^{10}$  recht groß gewählt. Die  $L^2$ -Lösung schwankt deutlich stärker als die  $H^1$ - oder die  $H^2$ -Lösung. Trotz eines relativ großen Datenfehlers von 5% sind die Ergebnisse für die Räume  $H1$  und  $H2$  relativ gut, denn die Lösungen zeichnen sich durch schwache Oszillationen aus.

**Wahl von  $\alpha$**  Nun soll der Einfluss von  $\alpha$  auf die  $H^1$ - und die  $H^2$ - Lösungen betrachtet werden, wobei einmal 5 und einmal 10 Legendrepolynome verwendet werden. Man erkennt in Abb. C.16, dass mit wachsendem  $\alpha$  die Lösungen zwar weniger schwingen, sich aber dafür von der Ausgangsdichte an der Oberfläche weiter entfernen. Die Herausforderung besteht nun darin, das optimale  $\alpha$  zu finden.

**Zusammenfassung** Wie das Verfahren der abgebrochenen Singulärwertzerlegung ist dieses Verfahren gut geeignet, starke Oszillationen in der Lösung zu unterdrücken.

Parallel zu ersterem Verfahren, bei dem man die Abbruchordnung geschickt wählen muss, gilt es hier den zusätzlichen Parameter  $\alpha$  geeignet zu wählen. Vielleicht sollte man ihn eher zu groß wählen, damit die Lösungen mit großer Sicherheit nicht 'explodieren'. Als Urbildraum scheint der  $H^1$  oder der  $H^2$  eine gute Wahl zu sein.

Als weitere Schritte könnte man die Basisfunktionen austauschen und/oder die andere Substitution verwenden. Insbesondere würde ich es mal mit B-Splines versuchen, da die verwendeten Basispolynome trotz wachsender Momentenzahl konstant kleine Potenzen verwenden, und somit Oszillationen nicht so stark ausgeprägt sein sollten.

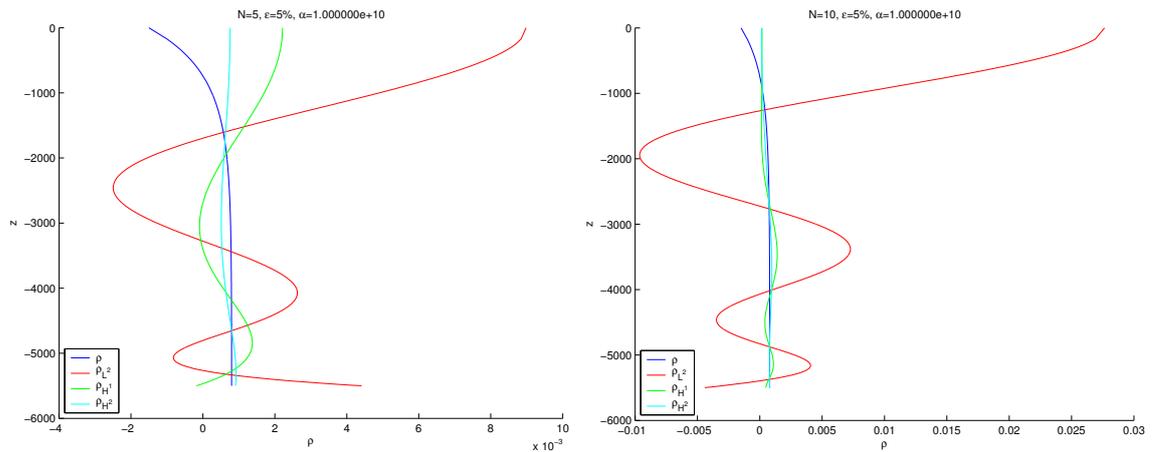


Abbildung C.15: Rekonstruktion der Ausgangsdichten für zwei verschiedene Anzahlen von Basisfunktionen mit einem Datenfehler  $\epsilon = 5\%$  mit Hilfe der Tichonov-Regularisierung.

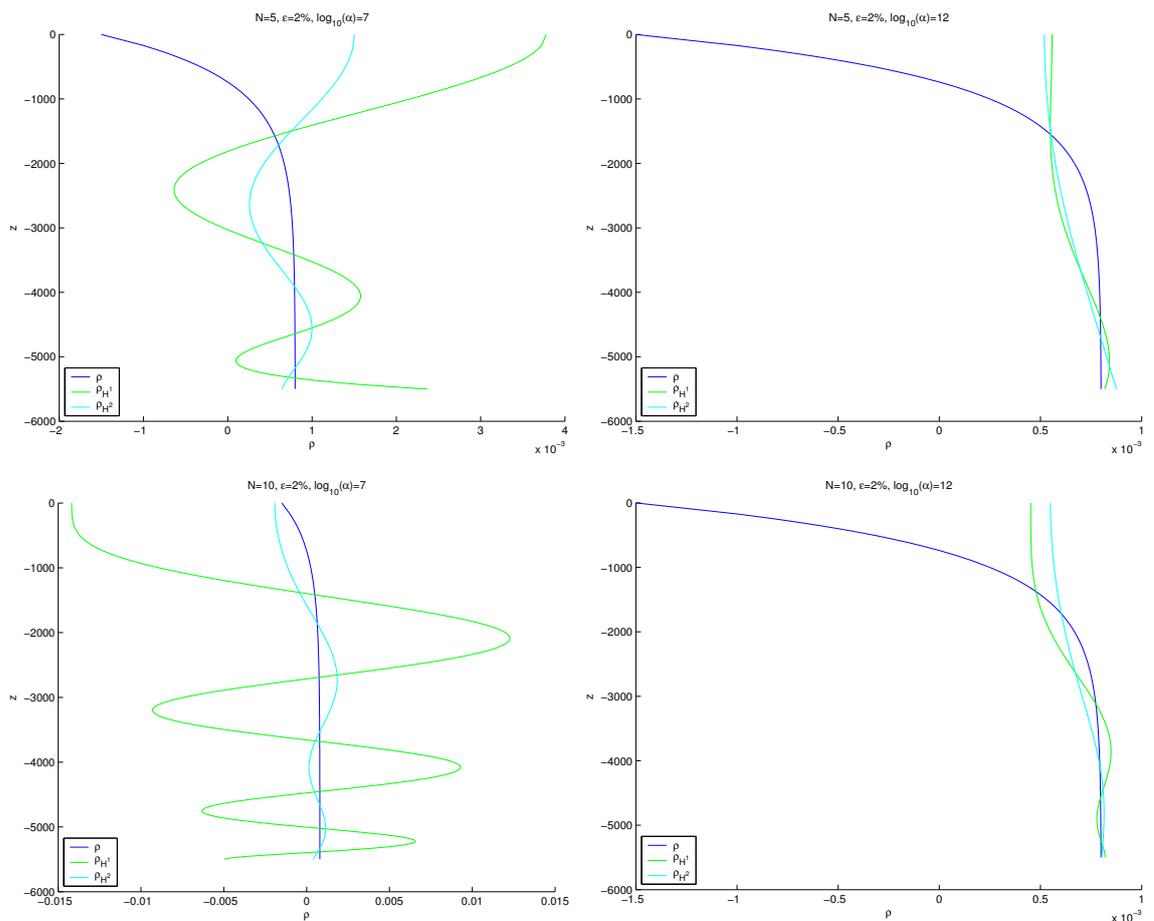


Abbildung C.16: Rekonstruktion der Ausgangsdichten für zwei verschiedene Anzahlen von Basisfunktionen mit einem Datenfehler  $\epsilon = 2\%$  und zwei Werten für  $\alpha$  mit Hilfe der Tichonov-Regularisierung.

## C.5 Schätzen von Parametern für Mixed-Layer Profile

### C.5.1 Einleitung

Alle bisher vorgestellten Verfahren hatten gemeinsam, dass die zu bestimmende Dichte nach einem Satz von Basisfunktionen entwickelt wurde - 'nur' die Entwicklungskoeffizienten waren gesucht. Das dabei auftretende lineare Gleichungssystem konnte wiederum auf drei verschiedene Arten<sup>16</sup> gelöst werden. Dabei konnte die Lösung jede im Raum der Basisfunktionen mögliche Struktur besitzen.

Das folgende Verfahren verfolgt einen etwas anderen Ansatz. Nun wird die prinzipielle Struktur/Gestalt der Dichtefunktion durch eine parameterabhängige Funktion vorgegeben, und es sind die Parameter den Momenten anzupassen. Dieses Problem führt dann auf ein teilweise nichtlineares Inversionsproblem, das nicht mehr mit den oben vorgestellten Verfahren zu lösen ist.<sup>17</sup>

Nun, machen wir es etwas konkreter. Aus vielerlei Messungen von Dichteprofilen ist eine ziemlich konstante Struktur des vertikalen Dichteprofiles bekannt. Diese ist geprägt durch eine oberflächennahe homogen durchmischte Schicht, eine Sprungschicht mit extremen Dichtegradienten und einer nahezu konstanten Dichte in der Tiefe. Dieses Profil lässt sich relativ gut durch folgende Funktion annähern:

$$\rho_{fit}^*(z) = \begin{cases} \rho_m^* & -h_m \leq z \leq 0 \\ \rho_h^* + (\rho_m^* - \rho_h^*)e^{\frac{z+h_m}{d}} & -h \leq z < -h_m \end{cases} \quad (C.21)$$

Die dimensionsbehaftete potentielle Dichte  $\rho^*$  ist also durch die vier Parameter  $h_m, \rho_m^*, \rho_h^*, d$  eindeutig bestimmt. Dabei bezeichnen  $h_m$  die Dicke der durchmischten Schicht an der Oberfläche,  $\rho_m^*$  die Dichte in dieser,  $d$  eine Skalentiefe für den Übergangsbereich, für die in der Regel gilt  $0 < d \ll h - h_m$ , und  $\rho_h^*$  die Dichte für  $z = -\infty$  (wegen  $d \ll h - h_m$  gilt schon in guter Näherung  $\rho_{fit}^*(-h) = \rho_h^*$ ). Die Struktur dieses Profiles ist in Abb. C.17 zu sehen.

<sup>16</sup>1. Lösung der Normalgleichung durch Invertieren der Matrix  $(A'A)$ , 2. durch Darstellung der Matrix  $(A'A)$  mit Hilfe der abgebrochenen Singulärwertzerlegung und 3. durch Minimierung des Tichonov-Funktionsals.

<sup>17</sup>Vielleicht könnte prinzipiell auch der Ansatz über die Basisfunktionen so beschrieben werden, dass man die feste Struktur vorgibt und nur die Parameter bestimmt. Wird die Dichtefunktion z.B. als  $\rho(z) = a_1 B_1(z) + a_2 B_2(z) + a_3 B_3(z)$  geschrieben, so sind eben die drei Parameter  $a_1$  bis  $a_3$  zu bestimmen. Der Hauptunterschied dürfte dadurch gegeben sein, dass in diesem Fall ein lineares Problem mit einer im Prinzip unbegrenzten Anzahl von Parametern gegeben ist.

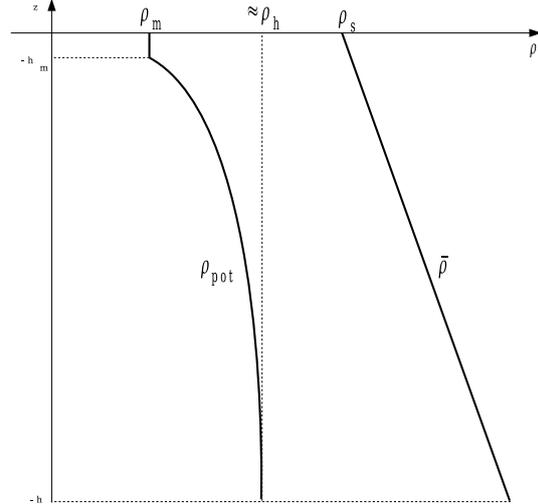


Abbildung C.17: Schematische Darstellung des Fit-Dichteprofiles der dimensionsbehafteten realen potentiellen Dichte.

Zu vorgegebenen Momenten aus der Modellintegration mit BARBI ist nun durch eine geeignete Wahl dieser vier Parameter das Dichteprofil 'möglichst' gut an diese Momente anzupassen.

### C.5.2 Die Struktur der Dichteprofile und des inversen Problems

Die Frage ist zunächst, welche Gestalt das Dichteprofil der Störungsdichte und die Dichtemomente mit diesem Ansatz haben.

**Die Störungsdichte** Mit Hilfe dieses Profiles ist dann die Strukturfunktion der Störungsdichte gegeben durch  $\rho_{fit} = (\rho_{fit}^* - \bar{\rho}^*)/\rho_0^*$ . Setzt man obige Beziehung ein und schreibt  $\bar{\rho}^* = \rho_S^* - (\rho_0^* N^2/g)z$ , so ergibt sich:

$$\rho_{fit}(z) = \frac{1}{\rho_0^*} \cdot \begin{cases} (\rho_m^* - \rho_S^*) + \frac{\rho_0^* N^2}{g} z; & -h_m \leq z \leq 0 \\ (\rho_h^* - \rho_S^*) + (\rho_m^* - \rho_h^*)e^{\frac{z+h_m}{d}} + \frac{\rho_0^* N^2}{g} z; & -h \leq z < -h_m \end{cases} \quad (C.22)$$

Definiert man weiter die Dichteunterschiede  $\Delta\rho^* := \rho_m^* - \rho_h^*$ ,  $\Delta\rho_m^* := \rho_m^* - \rho_S^*$ ,  $\Delta\rho_h^* := \rho_h^* - \rho_S^*$ , und berücksichtigt man  $\Delta\rho_h^* = \Delta\rho_m^* - \Delta\rho^*$ , so lässt sich dies auch schreiben als:

$$\rho_{fit}(z) = \frac{1}{\rho_0^*} \cdot \begin{cases} \Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)z; & -h_m \leq z \leq 0 \\ \Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)z + \Delta\rho^*(e^{\frac{z+h_m}{d}} - 1); & -h \leq z < -h_m \end{cases} \quad (C.23)$$

Und man kann noch einen Schritt weiter gehen durch die Definition  $\tilde{z} = z/h$ :

$$\tilde{\rho}_{fit}(\tilde{z}) = \frac{1}{\rho_0^*} \cdot \begin{cases} \Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)h\tilde{z}; & -\tilde{h}_m \leq \tilde{z} \leq 0 \\ \Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)h\tilde{z} \\ + \Delta\rho^*(e^{\frac{\tilde{z}+\tilde{h}_m}{\tilde{d}}} - 1); & -1 \leq \tilde{z} < -\tilde{h}_m \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

mit  $\tilde{h}_m := h_m/h$  und  $\tilde{d} = d/h$ .

Auf diese Weise sind also die neuen vier Parameter  $\{\Delta\rho_m^*, \Delta\rho^*, h_m, d\}$  anzupassen. Bei Kenntnis dieser Parameter kann man nun z.B. direkt ablesen, dass für  $\Delta\rho^* > 0$  die Wassersäule instabil ist, da das vorgegebene Dichteprofil prinzipiell monoton wachsend oder fallend ist.

**Die dimensionsbehaftete Dichte** Die dimensionsbehaftete Dichte ergibt sich mit diesen neuen Parametern und  $\rho_m^* = \rho_S^* + \Delta\rho_m^*$  zu:

$$\tilde{\rho}_{fit}^*(z) = \begin{cases} \rho_S^* + \Delta\rho_m^*; & -\tilde{h}_m \leq \tilde{z} \leq 0 \\ \rho_S^* + \Delta\rho_m^* \\ + \Delta\rho^*(e^{\frac{\tilde{z}+\tilde{h}_m}{\tilde{d}}} - 1); & -1 \leq \tilde{z} < -\tilde{h}_m \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

**Formulierung des inversen Problems** Das Problem lässt sich nun folgendermaßen formulieren: Sei  $\mathbf{p} \in D := (\Delta\rho_m^*, \Delta\rho^*, h_m, d)^T$  ein beliebiger Parametersatz mit  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , so ist das Momentproblem mit der nichtlinearen Abbildung  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \left( \frac{g}{h^{2i}} \int_{-h}^0 \rho_{fit}(z, \mathbf{p}) z^{2i+1} dz \right)_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{C.26})$$

und mit  $\mathbf{G} = (G_0, \dots, G_{n-1})^T$  gegeben durch:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) \approx \mathbf{G}. \quad (\text{C.27})$$

Wendet man die in Gleichung C.1 beschriebene Substitution  $\tilde{z} = z/h$  an, so ergibt sich für F:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \left( gh^2 \int_{-1}^0 \tilde{\rho}_{fit}(\tilde{z}, \mathbf{p}) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \right)_i; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\text{C.28})$$

Zunächst lässt sich die Abbildung (C.28) bei Annahme

des obigen Dichteprofiles etwas genauer hinschreiben:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{p}) &= gh^2 \int_{-1}^0 \tilde{\rho}_{fit}(\tilde{z}, \mathbf{p}) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z}; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)h\tilde{z}) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} \Delta\rho^*(e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \left[ \Delta\rho_m^* \int_{-1}^0 \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} + \frac{\rho_0^* N^2 h}{g} \int_{-1}^0 \tilde{z}^{2i+2} d\tilde{z} \right] \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \left[ \Delta\rho^* \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \right] \\ &= \frac{N^2 h^3}{2i+3} - \frac{gh^2}{\rho_0^*(2i+2)} \Delta\rho_m^* \\ &\quad + \Delta\rho^* \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \end{aligned}$$

Obwohl BARBI mit den ungeraden Momenten rechnet, könnte man prinzipiell ja auch die geraden Momente hinzunehmen. Es wird sich später zeigen, dass dies bei der Lösung des inversen Problems gewisse Vorteile hat. Mit diesen ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_i^g(\mathbf{p}) &= gh^2 \int_{-1}^0 \tilde{\rho}_{fit}(\tilde{z}, \mathbf{p}) \tilde{z}^i d\tilde{z} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\Delta\rho_m^* + (\rho_0^* N^2/g)h\tilde{z}) \tilde{z}^i d\tilde{z} \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} \Delta\rho^*(e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^i d\tilde{z} \\ &= \frac{gh^2}{\rho_0^*} \Delta\rho_m^* \int_{-1}^0 \tilde{z}^i d\tilde{z} + \frac{\rho_0^* N^2 h}{g} \int_{-1}^0 \tilde{z}^{i+1} d\tilde{z} \\ &\quad + \frac{gh^2}{\rho_0^*} \Delta\rho^* \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^i d\tilde{z} \\ &= (-1)^i \frac{gh^2}{\rho_0^*(i+1)} \Delta\rho_m^* + \frac{(-1)^{i+1} N^2 h^3}{i+2} \\ &\quad + \Delta\rho^* \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^i d\tilde{z} \end{aligned}$$

**Die ganze Wassersäule ist durchmischt** Für den Fall, dass die gesamte Wassersäule durchmischt ist, ist die Mixed-Layer-Tiefe die gesamte Ozeantiefe  $h_m = h$ . Die Parameter  $\Delta\rho^*$  und  $d$  sind dann unerheblich, so dass man  $\Delta\rho^*$  Null setzen kann.

**Bemerkungen zur Notation** An dieser Stelle seien aus Gründen der Übersichtlichkeit nochmal alle Größen benannt und bezeichnet, die im Zusammenhang mit dem Mixed-Layer-Dichteprofil stehen. Prinzipiell unterscheiden wir zwischen dimensionslosen und dimensionsbehafteten Größen, wobei dimensionsbehaftete Größen mit einem \*

versehen werden.

$\rho^*$	dim.behaftete Dichte
$\bar{\rho}^*$	dim.behaftete Hintergrunddichte
$\rho_0^*$	dim.behaftete Skalierungsdichte
$\rho_S^*$	dim.behaftete Oberflächendichte
$\rho_m^*$	dim.behaftete Mixed-Layer Dichte
$\rho_h^*$	dim.behaftete Tiefendichte $h \rightarrow -\infty$
$\rho$	dimensionslose Störungsdichte
$h_m$	Tiefe der Mixed-Layer
$\Delta\rho^*$	$\rho_m^* - \rho_h^*$
$\Delta\rho_m^*$	$\rho_m^* - \rho_S^*$
$\Delta\rho_h^*$	$\rho_h^* - \rho_S^*$
$\tilde{h}_m$	$h_m/h$
$\tilde{d}$	$d/h$

### C.5.3 Lösungsansatz mit linearem Teilproblem

Zur Lösung des nicht-linearen Problems (C.27) könnten die Parameter so bestimmen werden, dass das Funktional  $\|F(\mathbf{p}) - \mathbf{G}\|^2$  minimiert wird. Hierzu könnte man Standardverfahren für nicht-lineare Ausgleichsprobleme verwenden. Es wird sich aber gleich zeigen, dass unser Problem ein lineares Teilproblem enthält, so dass es in meinen Augen besser scheint, die Lösungsmethode auf dieses Problem abzustimmen, da man das lineare Teilproblem durch eine einfache Matrixinversion schnell lösen kann.

Bei konstant gesetzten Parametern  $\tilde{h}_m$  und  $\tilde{d}$  lässt sich Abbildung (C.26) schreiben als:

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{p}_2) &= -\frac{gh^2}{\rho_0^*(2i+2)}\Delta\rho_m^* + \frac{N^2h^3}{2i+3} \\ &\quad + \Delta\rho^* \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z} \\ &= a_{1i}\Delta\rho_m^* + a_{2i}\Delta\rho^* + d_i \end{aligned}$$

mit  $a_{1i} := -\frac{gh^2}{\rho_0^*(2i+2)}$ ,  $a_{2i} := \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^{-\tilde{h}_m} (e^{(\tilde{z}+\tilde{h}_m)/\tilde{d}} - 1) \tilde{z}^{2i+1} d\tilde{z}$  und  $d_i := \frac{N^2h^3}{2i+3}$ . Mit Hilfe der Matrix  $A = (a_{ji})$ ,  $j = 1, 2$ , und der Vektoren  $\mathbf{d} = (d_1, \dots)^T$  und  $\mathbf{p}_2 := (\Delta\rho_m^*, \Delta\rho^*)^T$  lässt sich dieses als Matrixgleichung schreiben  $F(\mathbf{p}_2) \approx A\mathbf{p}_2 + \mathbf{d}$ , so dass das inverse Problem dann lautet:

$$\mathbf{G} \approx A\mathbf{p}_2 + \mathbf{d} \quad (\text{C.29})$$

Die Matrixelemente  $a_{2i}$  können mit Hilfe von numerischen Quadraturformeln berechnet werden, etwa der Simpsonregel oder der Trapezregel. Da man nur zwei Parameter hat, sollten prinzipiell nur zwei Momente reichen. Man kann aber mehr Momente (z.B. 5) verwenden, und die Parameter durch ein Ausgleichsverfahren bestimmen.

**Lösungsalgorithmus** Zur Lösung des nicht-linearen Ausgleichsproblems mit linearen Teilproblem kann man folgenden Algorithmus verwenden:

Für zunächst feste Parameter  $\tilde{d}_i$  und  $\tilde{h}_m^i$  wird das lineare Teilproblem  $\|F(\mathbf{p}_2) - \mathbf{G}_{data}\|^2 = \min$  gelöst, wodurch sich die für das aktuelle  $\tilde{d}_i$  und  $\tilde{h}_m^i$  optimalen Parameter  $\mathbf{p}_2^i$  ergeben. Mit diesen aktuellen 4 Parametern  $\mathbf{p}_i := (\tilde{h}_m^i, \tilde{d}_i, \mathbf{p}_2^i)^T$  kann man dann die Größe  $\Delta(\tilde{d}_i, \tilde{h}_m^i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$  berechnen. Als optimales  $\tilde{d}$  und  $\tilde{h}_m$  wählt man dann das  $\tilde{d}_i$  und  $\tilde{h}_m^i$ , für die  $\Delta(\tilde{d}_i, \tilde{h}_m^i)$  minimal wird.

**Ideale Daten** Zunächst soll die Rekonstruktionseigenschaft der Methode an idealen Daten getestet werden. Dabei wird analog zu vorne vorgegangen, wonach für ein gegebenes Mixed-Layer-Profil die Momente bestimmt werden<sup>18</sup>. Danach werden an diese Momente die Parameter angepasst.

Dabei wird als ideales Profil ein Mixed-Layer Profil nach (C.25) mit folgenden Parametern verwendet:  $N = 0.0023$ ;  $\rho_0^* = 1027$ ;  $\rho_S^* = 1030$ ;  $h = 4000$ . Die übrigen Parameter werden gesondert erwähnt. Es werden weiterhin vier Momente verwendet.

Genauer soll nun untersucht werden, wie gut sich die zwei 'nicht-linearen' Parameter  $\tilde{d}$  und  $\tilde{h}_m$  schätzen lassen. Es wird sich zeigen, dass es dabei doch deutliche Unterschiede gibt.

-  $\tilde{h}_m$  schätzen:

Zunächst werden die Rekonstruktionseigenschaften bezüglich der Tiefe der durchmischten Schicht betrachtet. Dazu werden zwei ideale Profile vorgegeben: eines mit einer kleinen Tiefe von  $h_m = 60 m$  und eines mit  $h_m = 1560 m$ . Es soll versucht werden, diese Werte so genau wie möglich zu rekonstruieren, wobei die Momente nicht zusätzlich gestört werden. In Abb. C.19 sind die Ergebnisse zu sehen. Betrachtet man zunächst die Darstellungen der Kleinste-Quadrate-Funktion  $\Delta(h_m^i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$ , so erkennt man, dass für die kleinere Tiefe, diese kein 'gutes' Minimum bei  $h_m = 60 m$  erkennen lässt, während dies für die größere Tiefe ( $h_m = 1560 m$ ) eindeutig der Fall ist. Dementsprechend wird die kleinere Tiefe auch nicht richtig geschätzt, während das für die größere relativ gut gelingt.

Besser sieht es bei zusätzlicher Verwendung der geraden Momente aus. Hier werden z.B. nicht die ersten vier ungeraden, sondern die ersten vier Momente inklusive der Geraden verwendet. Das Ergebnis dieser Rekonstruktion ist in der unteren Reihe von Abb. C.19 zu sehen, auf der man ein

<sup>18</sup>Diese könnten wieder mit einem künstlichen Fehler versehen werden.

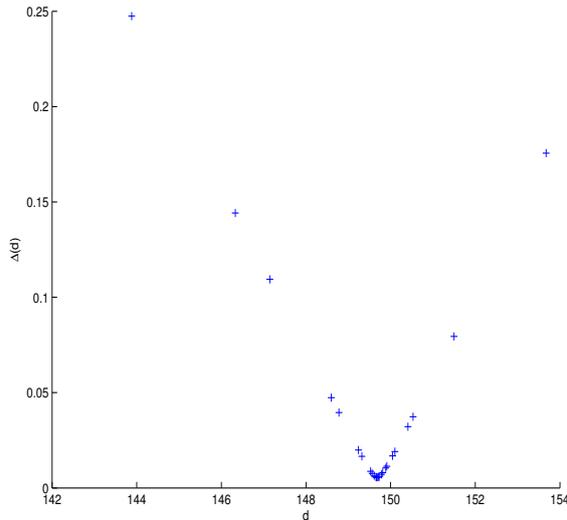


Abbildung C.18: Die Kleinst-Quadrate Werte  $\Delta(d_i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$  als Funktion von  $d_i$ . Der richtige Wert liegt für  $h_m = 60m$  bei  $d = 150$ . Hier wird gerade der Parameter  $d$  minimiert für  $h_m^i = 70m$ , so dass dieser nicht genau mit dem Ausgangswert übereinstimmt.

klares Minimum zwischen  $h_m = 40m$  und  $h_m = 70m$  erkennen kann.

Eine mögliche Erklärung für die schlechtere Rekonstruktion von oberflächennahen Dichtewerten könnte sein, dass die oberflächennahen Bereiche weniger in die Momente eingehen als tiefere Bereiche, da die Faktoren  $z^i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  unter dem Integral für  $z \rightarrow 0$  ebenfalls gegen Null gehen. Diese verschwinden umso schneller, je größer der Exponent  $i$  ist. Deshalb ist es scheinbar auch besser, die kleineren geraden Momente noch mitzunehmen als die größeren ungeraden, da erstere noch mehr Informationen über die Dichte nahe der Oberfläche enthalten.

-  $\tilde{d}$  schätzen:

Dieser Parameter lässt sich etwas besser schätzen, wie aus Abb. C.18 zu erkennen ist. Ein Minimum zeichnet sich sehr deutlich ab. Ein Grund für die gute Bestimmbarkeit des Parameters dürfte sein, dass er in der Regel die gesamte Funktion bis in die Tiefe beeinflusst, so dass kleine Schwankungen in diesem sich stark in den Momenten widerspiegeln. Dies gilt für die Mixed-Layer Tiefe scheinbar nur, wenn sie eine gewisse Größe erreicht. Vorher sind Schwankungen in ihr eher unbedeutend für die Momente.

**Reale Daten** Nun soll dieses Verfahren auf 'reale' Daten angewendet werden, wobei wieder der Levitus-94 Datensatz als Datenquelle verwendet wird. Es werden auch die

geraden Dichtemomente verwendet, die aber nicht zusätzlich gestört werden.

Man erkennt zunächst in Abb. C.20, dass die Tiefe der durchmischten Schicht oft zu tief rekonstruiert wird. Weiterhin wird der Oberflächenwert der Dichte in der Regel nicht gut wiedergegeben. Anders ist es mit dem Verlauf in der Tiefe, der in allen Fällen sehr gut getroffen wird. Dieses zeigt wieder, dass dieses Mixed-Layer Profil als solches gut geeignet ist, reale Daten wiederzugeben. Auch wenn das Schätzen der Mixed-Layer-Tiefe nicht besonders gut gelingt, so scheint das Minimum zumindest eindeutig zu sein, wie die rechten Spalte dieser Abbildung zeigt. Die Minima der Funktion  $\Delta(h_m^i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$  sind gut und deutlich ausgebildet.

**Modellprofil** Nach den idealen und den realen Profilen sollen abschließend Modelldaten getestet werden. Dazu wird das 3d-Modell SPFLAME, eine von MOM [48] abgeleitete Variante, verwendet, um ein einfaches Konvektionsexperiment durchzuführen. Mit diesem Modell soll ein Konvektionsexperiment simuliert werden, um charakteristische vertikale Dichteprofile zu erzeugen. Anstelle der potentiellen Dichte rechnet SPFLAME mit der potentiellen Temperatur und dem Salzgehalt. Diese Profile können über eine geeignete Zustandsgleichung in die potentielle Dichte umgewandelt werden.

Betrachtet wird ein zonaler Kanal auf einer  $\beta$ -Ebene, der durch einen zonalen Windstress  $\tau(y) = \sin^4\left(\frac{y}{y_N - y_S}\pi\right)$  und eine feste meridionale Oberflächentemperatur der Form  $T_S(y) = -20\cos\left(\frac{y}{y_N - y_S}\pi\right)$  mit  $y \in [y_S, y_N]$ <sup>19</sup> angetrieben wird. Der Ozean selbst hat zu Beginn der Integration eine konstante Temperatur von  $0^\circ C$ . Weiterhin wird ein explizites Konvektionsschema verwendet, das die Wassersäule im Falle der Instabilität durchmischt. Die Art der Oberflächentemperatur bedingt, dass im Süden schwereres Wasser in die Tiefe sinkt. In Abb. C.21 ist die Temperatur auf einem meridionalen Schnitt durch den Kanal gezeigt. Mit Hilfe einer linearen Zustandsgleichung kann aus der vertikalen Temperaturschichtung die Dichte an jedem Ort rekonstruiert werden<sup>20</sup>, aus der man dann wieder die Dichtemomen-

<sup>19</sup>Im Süden kalt, im Norden warm.

<sup>20</sup>Unter der Annahme eines konstanten Salzgehaltes kann man mit Hilfe der linearen Zustandsgleichung (SPFLAME arbeitet auch mit einer solchen) der Form  $\rho^* = \rho_{ref}^*[1 - \alpha(T - T_{ref})]$  aus der Temperatur eine Dichte ableiten, wenn man eine Referenzdichte  $\rho_{ref}^*$  bzw. Referenztemperatur  $T_{ref}$  vorgibt. Nach der MOM Anleitung [48] gilt z.B. für eine Salinität von 35 psu und eine Temperatur von  $T_{ref} = 19^\circ C$  etwa  $\rho_{ref}^* = 1025.02 \text{ kg/m}^3$  und  $\alpha = 2.489 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ .

te berechnen kann. In Abb. C.21 ist ebenfalls die abgeleitete Dichte auf diesem Schnitt zu erkennen. Sie ist geprägt durch eine durchmischte Wassersäule im Süden und eine stabil geschichtete Wassersäule im Norden.

Mit Hilfe des Verfahrens werden nun die Dichteprofile entlang dieses Schnittes rekonstruiert. In Abb. C.21 ist der rekonstruierte Parameter  $\Delta\rho^*$ , der sich aus der Dichtedifferenz zwischen der Oberflächendichte und der Dichte in der Tiefe berechnet, als Funktion des Breitenindex (der erste Index liegt im Süden) dargestellt. Man erkennt deutlich, dass er von Null -bedeutet homogene Wassersäule- ins Negative abfällt, was einer Stabilisierung der Wassersäule von Süden nach Norden entspricht. In Abb. C.22 sind die Original- und die rekonstruierten Dichteprofile zu sehen. Man erkennt, dass das Profil der durchmischten Wassersäule sehr gut wiedergegeben wird, während die beiden anderen leichte Schwächen im oberen Bereich der Wassersäule aufweisen.

## Zusammenfassung

- Insgesamt lässt sich also  $d$  besser als  $h_m$  schätzen. Das hat zur Konsequenz, dass es wenig sinnvoll erscheint, die Tiefe der oberflächennahen durchmischten Schicht besonders genau schätzen zu wollen. Dies könnte auch bedeuten, dass es wenig Sinn macht, ein Mixed-Layer-Model zu verwenden.
- In jedem Fall scheint es besser, für die Dichterekonstruktion, auch die geraden Momente mit zu verwenden. Die Ergebnisse werden deutlich besser.
- Leider muss für jedes Dichteprofil das lineare Zwei-Parameterproblem für feste  $d_i$  und  $h_m^i$  oft gelöst werden, um das optimale  $d$  und  $h_m$  zu finden (etwa 200 Iterationen). Somit ist diese Methode sehr rechenintensiv. Ein kleines Trostpflaster könnte dabei sein, dass die Instabilität der Schicht entweder total gegeben ist oder nicht. D.h. es gibt in einem Profil keine instabilen und zugleich stabilen Bereiche. Es muss also nicht, wie beim Konvektiven Adjustment die Wassersäule nach stabilen und instabilen Bereichen durchsucht werden. Hier erkennt man dies ja auf einen Blick an dem Parameter  $\Delta\rho^*$ . Zeigt dieser eine Instabilität an, so ist die neue Dichte der Wassersäule bei vollständiger Durch-

mischung und mit Beziehung (C.25) gegeben durch:

$$\begin{aligned}\rho_{mixed}^* &= \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \rho_{fit}^* dz = \int_{-1}^0 \tilde{\rho}_{fit}^* d\tilde{z} \\ &= \rho_S^* + \Delta\rho_m^* - \Delta\rho^*(1 - \tilde{h}_m) \\ &\quad + \tilde{d}\Delta\rho^*[1 - \exp((\tilde{h}_m - 1)/\tilde{d})]\end{aligned}$$

Mit dieser Durchmischungsdichte lassen sich dann die neuen Momente nach dem Konvektionsvorgang berechnen. Verwendet man nur die ungeraden Momente, so ergibt sich:

$$G_{2i+1} = \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* - \bar{\rho}^*) z^{2i+1} d\tilde{z} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Nimmt man die geraden Momente mit hinzu, so ergibt sich:

$$G_i = \frac{gh^2}{\rho_0^*} \int_{-1}^0 (\rho_{mixed}^* - \bar{\rho}^*) z^i d\tilde{z} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

## C.6 Zusammenfassung

Nachdem nun alle von mir verwendeten Verfahren vorgestellt worden sind, wird meine Bemerkung aus der Einleitung etwas deutlicher. Keines der Verfahren scheint die Rekonstruktion 100% zu lösen und alle haben ihre Vor- und Nachteile.

Wenn ich nun doch auf dieser Grundlage eine Empfehlung aussprechen soll, so würde ich vermutlich die abgebrochene Singulärwertzerlegung oder die Tichonov-Regularisierung mit den Räumen  $H^1$  oder  $H^2$  verwenden, da man unerwünschte Oszillationen eher kontrollieren kann. Zusätzlich würde ich die Anzahl der Momente nicht zu groß wählen, um auf der einen Seite das Modell nicht zu langsam zu machen und auf der anderen Seite zu starken Oszillationen vorzubeugen.

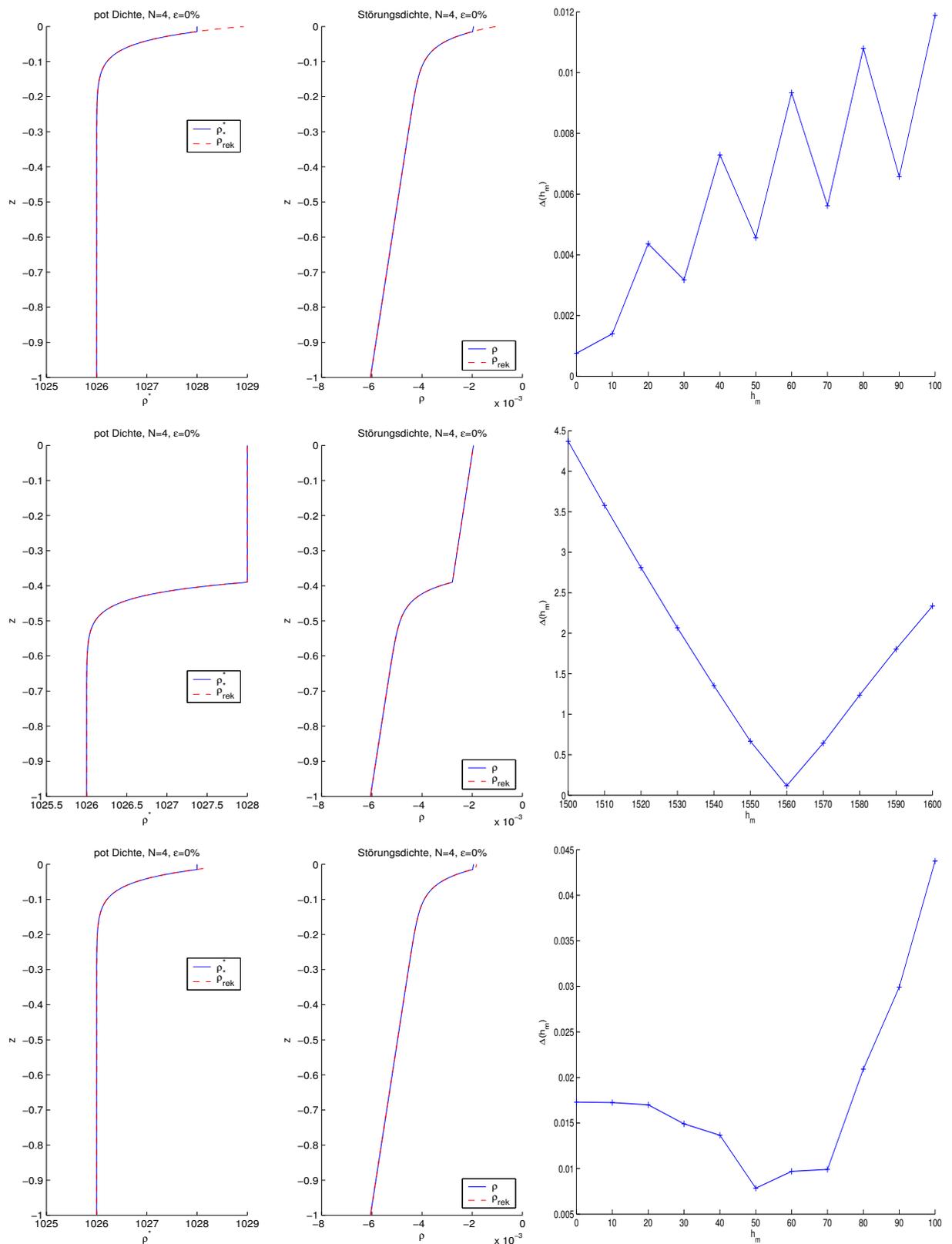


Abbildung C.19: **Links** sind jeweils die rekonstruierten Dichten und **rechts** die Kleinste-Quadrate Werte  $\Delta(h_m^i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$  zu sehen. In der oberen Reihe beträgt die zu schätzende Tiefe  $h_m = 60 \text{ m}$  und in der mittleren Reihe  $h_m = 1560 \text{ m}$ . In der unteren Reihe ist die Rekonstruktion für  $h_m = 60 \text{ m}$  mit zusätzlicher Verwendung der geraden Momente (also insgesamt die Momente: 1, 2, 3 und 4) zu sehen .

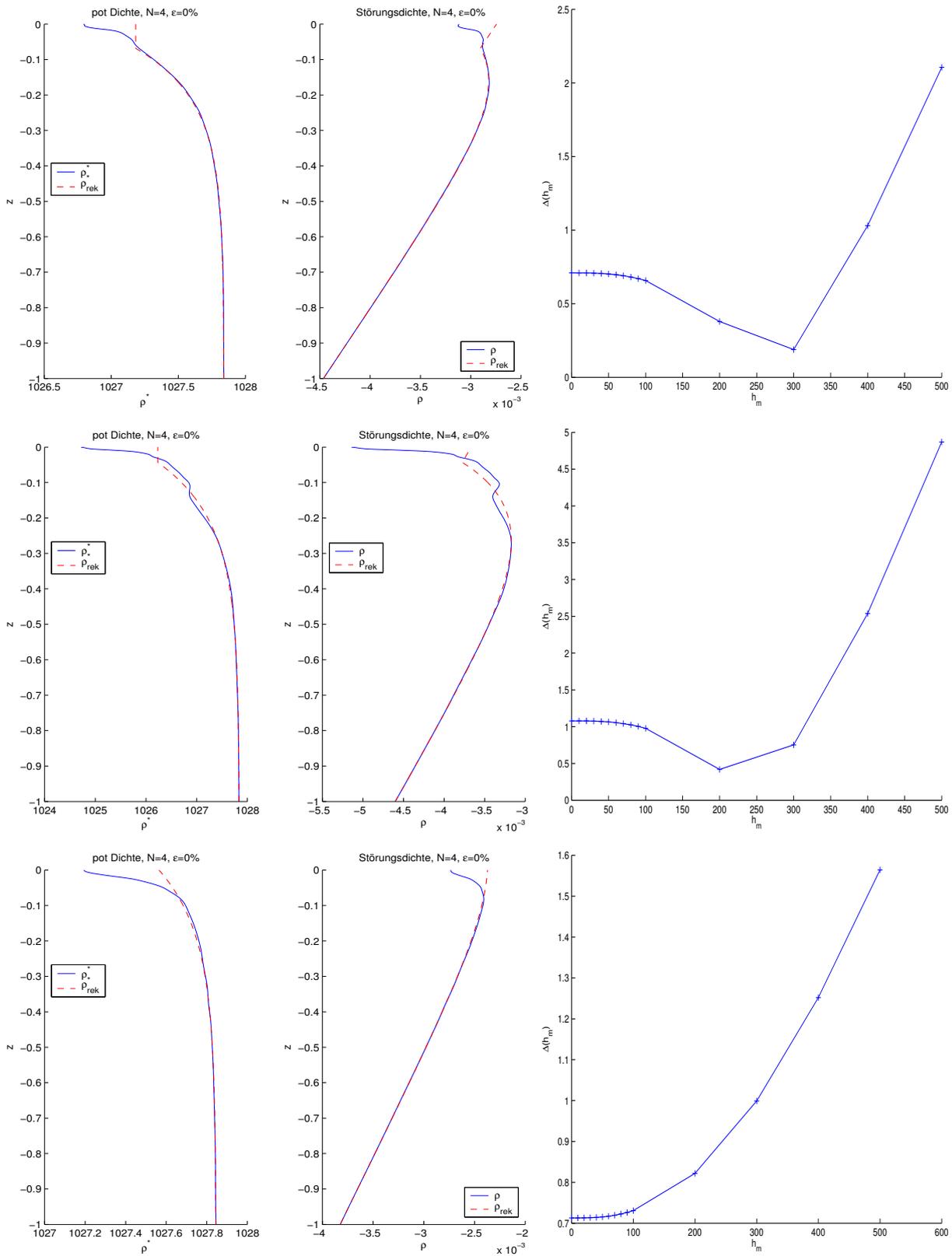


Abbildung C.20: **Links** ist jeweils die rekonstruierten Dichten und **rechts** die Kleinste-Quadrate Werte  $\Delta(h_m^i) := \|F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{G}_{data}\|$  zu sehen. Man sieht die Rekonstruktion realer Daten mit zusätzlicher Verwendung der geraden Momente (also insgesamt die Momente: 1, 2, 3 und 4) für drei verschiedene reale Dichteprofile.

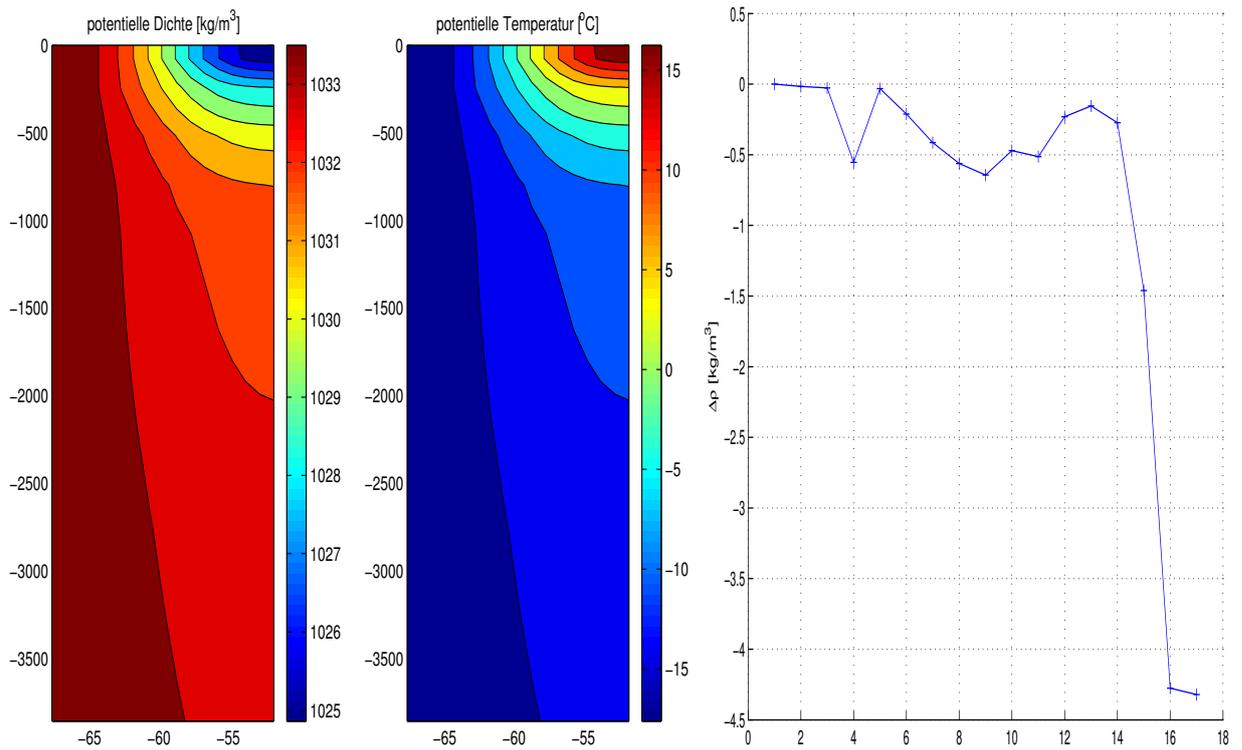


Abbildung C.21: **Links:** Temperaturschnitt und abgeleiteter Dichteschnitt. **Rechts:** Rekonstruierter Parameter  $\Delta\rho^*$ .

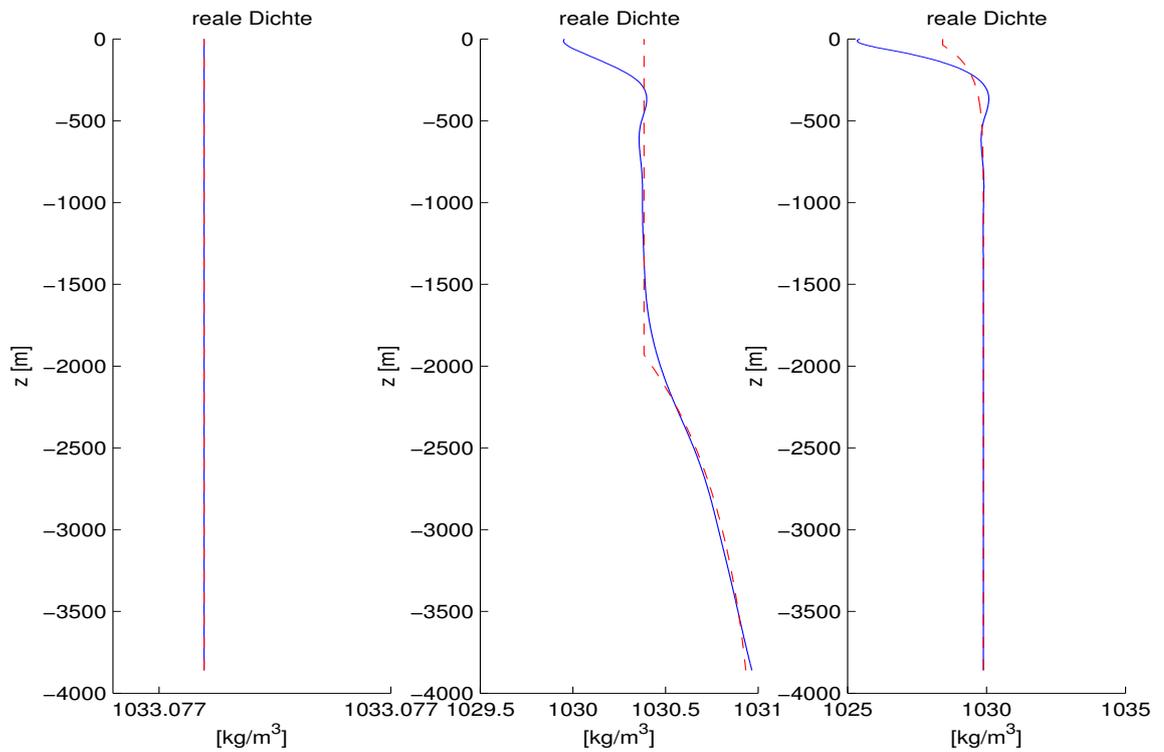


Abbildung C.22: Rekonstruktion der Dichteprofile an drei Orten auf dem Schnitt (links: Süden, rechts: Norden).



# Literaturverzeichnis

- [1] *Numerical Recipes in C: THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-43108-5.
- [2] D. L. T. Anderson and A. E. Gill. Spin-up of a stratified ocean with applications to upwelling. *Deep-Sea Research*, 22:583–596, 1975.
- [3] S. Aoki. Coherent sea level response to the Antarctic Oscillation. *Geophysical Research Letters*, 29(20), 2002. doi:10.1029/2002GL015733.
- [4] B. Barnier. A Numerical Study on the Influence of the Mid-Atlantic Ridge on Nonlinear First-Mode Baroclinic Rossby Waves Generated by Seasonal Winds. *Journal of Physical Oceanography*, 18:417–433, March 1988.
- [5] B. Barnier, L. Siefridt, and P. Marchesiello. Thermal forcing for a global ocean circulation model using a three year climatology of ECMWF analysis. *J. Mar. Sys.*, 6:363–380, 1995.
- [6] D. Borowski, R. Gerdes, and D. Olbers. Thermohaline and Wind Forcing of a Circumpolar Channel with blocked Geostrophic Contours. *Journal of Physical Oceanography*, 32:2520–2540, 2002.
- [7] Daniel Borowski. *The Antarctic Circumpolar Current: Dynamics of a circumpolar channel with blocked geostrophic contours*. PhD thesis, Universität Bremen, Fachbereich Physik und Elektrotechnik, 2003.
- [8] W. Broecker. The biggest chill. *Nat. Hist. Mag.*, 97:74–82, 1987.
- [9] W. Broecker. The great ocean conveyor. *Oceanography*, 4:79–89, 1991.
- [10] Wenju Cai and Peter G. Baines. Interactions between thermohaline- and wind-driven circulations and their relevance to the dynamics of the Antarctic Circumpolar Current, in a coarse-resolution global ocean general circulation model. *Journal of Geophysical Research*, 101(C6):14,073–14,093, 1996.
- [11] Paola Cessi and Francois Primeau. Dissipative Selection of Low-Frequency Modes in a Reduced-Gravity Basin. *Journal of Physical Oceanography*, 31:127–137, 2001.
- [12] C. Chatfield. *The Analysis of Time Series- An Introduction*. Texts in Statistical Science. Chapman & Hall, 4 edition, 1989.
- [13] D. B. Chelton and M. G. Schlax. Global Observations of Oceanic Rossby Waves. *Science*, pages 234–238, April 1996.
- [14] Dudley Chelton. Altimetric Observations of Midlatitude and Equatorial Rossby Waves. [www.aviso.oceanobs.com/documents/swt/presentations2003/PIs\\_06\\_chelton\\_rossby\\_waves.pdf](http://www.aviso.oceanobs.com/documents/swt/presentations2003/PIs_06_chelton_rossby_waves.pdf), 2003.
- [15] S.A. Cunningham, S.G. Alderson, B.A. King, and M.A. Brandon. Transport and variability of the Antarctic Circumpolar Current in Drake passage. *Journal of Geophysical Research*, 108(C5), 2003. 8084, doi:10.1029/2001JC001147.
- [16] Benoit Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [17] ETOPO5. Data Announcement 88-MGG-02, Digital relief of the Surface of the Earth. NOAA, National Geophysical Data Center, Boulder, Colorado, 1988.
- [18] J.C. Fyfe, G.J. Boer, and G.M. Flato. The Arctic and Antarctic oscillations and their projected changes under global warming. *Geophysical Research Letters*, 26:1601–1604, 1999.
- [19] Sarah T. Gille. Evaluating southern ocean response to wind forcing. *Phys. Chem. Earth (A)*, 24(4):423–428, 1999.
- [20] Sarah T. Gille, David P. Stevens, Robin T. Tokmakian, and Karen J. Heywood. Antarctic circumpolar current response to zonally averaged winds. *Journal of Geophysical Research*, 106(C2):2743–2759, February 2001.

- [21] N. Gillet and D.W.J. Thompson. Simulation of Recent Southern Hemisphere Climate Change. *Science*, 302:273–275, 2003.
- [22] Anand Gnanadesikan and Robert W. Hallberg. On the Relationship of the Circumpolar Current to Southern Hemisphere Winds in Coarse-Resolution Ocean Models. *Journal of Physical Oceanography*, 30:2013–2034, August 2000.
- [23] D. Gong and S. Wang. Definition of Antarctic Oscillation Index. *Geophysical Research Letters*, 26:459–462, 1999.
- [24] Alex Hall and Martin Visbeck. Synchronous Variability in the Southern Hemisphere Atmosphere, Sea Ice, and Ocean Resulting from the Annular Mode. *Journal of Climate*, 15:3043–3057, November 2002.
- [25] K. Hasselmann. An ocean model for climate variability studies. *Prog. Oceanog.*, 11:69–92, 1982.
- [26] Klaus Hasselmann. Stochastic climate models. part i: Theory. *Tellus*, 28:473–485, 1976.
- [27] K.L. Hill, I.S. Robinson, and P. Cipollini. Propagation characteristics of extratropical planetary waves observed in the ATSR global sea surface temperature record. *Journal of Geophysical Research*, 105(C9):21,927–21,945, SEPTEMBER 2000.
- [28] Keith M. Hines, David H. Bromwich, and Gareth J. Marshall. Artificial Surface Pressure Trends in the NCEP-NCAR Reanalysis over the Southern Ocean and Antarctica. *Journal of Climate*, 13:3940–3952, November 2000.
- [29] Bernd Hofmann. *Mathematik inverser Probleme*. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999.
- [30] W.W. Hsieh, M.K. Davey, and R.C. Wajsowicz. The Free Kelvin Wave in Finite-Difference Numerical Models. *Journal of Physical Oceanography*, 13:1383–1397, August 1983.
- [31] C. W. Hughes. Rossby Waves in the Southern Ocean: A Comparison of TOPEX/POSEIDON Altimetry with Model Predictions. *Journal of Geophysical Research*, 100(C8):15,933–15,950, August 1995.
- [32] Chris W. Hughes, Michael P. Meredith, and Karen J. Heywood. Wind-Driven Transport Fluctuations through Drakepassage: A Southern Mode. *Journal of Physical Oceanography*, 29:1971–1992, August 1999.
- [33] C.W. Hughes, P.L. Woodworth, M.P. Meredith, V. Stepanov, T. Whitworth, and A.R. Pyne. Coherence of Antarctic sea levels, Southern Hemisphere Annular Mode, and flow through Drakepassage. *Geophysical Research Letters*, 30(9), 2003. doi:10.1029/2003GL017240.
- [34] V.O. Ivchenko, V.B. Zalesny, and M.R. Drinkwater. Can the equatorial ocean quickly respond to Antarctic sea ice/salinity anomalies? *Geophysical Research Letters*, 31(L15310), 2004. doi:10.1029/2004GL020472.
- [35] Peter D. Killworth and Jeffrey R. Blundell. The Effect of Bottom Topography on the Speed of Long Extratropical Planetary Waves. *Journal of Physical Oceanography*, 29:2689–2710, October 1999.
- [36] P.J. Kushner, I.M. Held, and T.L. Delworth. Southern Hemisphere atmospheric circulation response to global warming. *Journal of Climate*, 14:2238–2249, 2001.
- [37] P.H. LeBlond and L.A. Mysak. *Waves in the Ocean*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, 1978.
- [38] G.J. Marshall. Trends in the Southern Annular Mode from Observations and Reanalyses. *Journal of Climate*, 16:4134–4143, Dezember 2003.
- [39] John Marshall and Friedrich Schott. Open-Ocean Convection: Observations, Theory, And Modells. *Reviews of Geophysics*, 37:1–64, February 1999.
- [40] Michael P. Meredith and Chris W. Hughes. On the sampling timescale required to reliably monitor interannual variability in the Antarctic circumpolar transport. *Geophysical Research Letters*, 32:L03609, 2005. doi:10.1029/2004GL022086.
- [41] M.P. Meredith, P.L. Woodworth, C.W. Hughes, and V. Stepanov. Changes in the ocean transport through Drakepassage during the 1980s and 1990s, forced by changes in Southern Annular Mode. *Geophysical Research Letters*, 31, 2004. doi:10.1029/2004GL021169.

- [42] John F. Middleton and Mauro Cirano. A northern boundary current along Australia's southern shelves: The Flinders Current. 107, 2002. doi:10.1029/2001JC000701.
- [43] D. Olbers. A Geometrical Interpretation of Inverse Problems. *D.L.T. Anderson and J. Willebrand (eds.), Ocean Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, pages 79–93, 1989.
- [44] D. Olbers, D. Borowski, C. Völker, and J.O. Wolff. The dynamical balance, transport and circulation of the Antarctic Circumpolar Current. *Antarctic science*, 16(4):439–470, 2004. doi:10.1017/S0954102004002251.
- [45] D. Olbers and C. Eden. A Simplified General Circulation Model for a Baroclinic Ocean with Topography. Part I: Theory, Waves, and Wind-Driven Circulations. *Journal of Physical Oceanography*, 33:2719–2737, December 2003.
- [46] D. Olbers, K. Lettmann, and R. Timmermann. Six circumpolar currents - on the forcing of the Antarctic Circumpolar Current by wind and mixing. *in press*, 2006.
- [47] G.W. Owen, I.D. Abrahams, A.J. Willmott, and C.W. Hughes. On the scattering of baroclinic Rossby waves by a ridge in a continuously stratified ocean. *Journal of Fluid Mechanics*, 26:131–155, 2002.
- [48] R.C. Pacanowski and S.M. Griffies. *MOM 3.0 Manual*. NOAA/Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, Princeton, USA, 08542, 1998.
- [49] Joseph Pedlosky. *Waves in the Ocean and Atmosphere*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [50] P. Rhines. The dynamics of unsteady currents. *The Sea, E.D. Goldberg. Marine Modeling*, 6:189–318, 1977. John Wiley and Sons.
- [51] S. R. Rintoul, C. W. Hughes, and D. Olbers. *The Antarctic Circumpolar Current System*. In G. Siedler, J. Church and J. Gould, editor. Ocean Circulation and Climate. Academic Press, 2001.
- [52] Fabian Schlösser. The Effect of Topography on the Seasonal Cycle of Circulation and Propagation of Planetary Waves: A Simplified Model Study. Master's thesis, Christian-Albrechts-Universität Kiel, Naturwissenschaftliche Fakultät, 2005.
- [53] G.A. Schmidt and E.R. Johnson. The Scattering of Stratified Topographic Rossby Waves By Seafloor Ridges. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 84:29–52, 1997.
- [54] Christian Dietrich Schönwiese. *Praktische Statistik für Meteorologen und Geowissenschaftler*. Gebrüder Borntraeger, 2000.
- [55] J. Soares, I. Wainer, and N.C. Wells. Reflection of equatorial Kelvin waves at eastern ocean boundaries. Part I: hypothetical boundaries. *Ann. Geophysicae*, 17:812–826, 1999.
- [56] Robert H. Stewart. *Introduction To Physical Oceanography*. Department of oceanography, Texas A & M University, august 2003 edition, 2003.
- [57] Rémi Tailluex and James C. McWilliams. Acceleration, creation, and depletion of wind-driven, baroclinic rossby waves over an ocean ridge. *Journal of Physical Oceanography*, 30:2186–2213, September 2000.
- [58] Giorgio Talenti. Recovering a function from a finite number of moments. *Inverse Problems*, 3:501–517, 1987.
- [59] David W.J. Thompson and John M. Wallace. The Arctic Oszillation signature in the wintertime geopotential height and temperatur fields. *Geophysical Research Letters*, 25(9):1297–1300, 1998.
- [60] D.W.J. Thompson and S. Solomon. Interpretaton of Recent southern Hemisphere Climate Change. *Science*, 296:895–899, 2002.
- [61] D.W.J. Thompson and J.M. Wallace. Annular modes in the extratropical circulation. Part I: Month-to-month variability. *Journal of Climate*, 13:1000–1016, 2000.
- [62] D.W.J. Thompson, J.M. Wallace, and G.C. Hegerl. Annular modes in the extratropical circulation. Part II: trends. *Journal of Climate*, 13:1018–1036, 2000.
- [63] Christopher Torrence and Gilbert P. Compo. A Practical Guide to Wavelet Analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), January 1998.

- [64] Hans von Storch and Antonio Navarra. *Analysis of Climate Variability*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1999.
- [65] Hans von Storch and Francis W. Zwiers. *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press, 1999.
- [66] Richard B. Jr. Wearn and D. Jr. James Baker. Bottom pressure measurements across the antarctic circumpolar current and their relation to the wind. *Deep-Sea Research*, 27A:875–888, 1980.
- [67] Wilbert Weijer. High-frequency wind forcing of a channel model of the ACC: normal mode excitation. *Ocean Modelling*, 9:31–50, 2005.
- [68] T. Whitworth. Monitoring the Transport of the Antarctic Circumpolar Current at Drake Passage. *Journal of Physical Oceanography*, 13:2045–2057, November 1983.
- [69] T. Whitworth, W.D. Nowlin, and S.J. Worley. The Net Transport of the Antarctic Circumpolar Current through Drakepassage. *Journal of Physical Oceanography*, 12:960–971, September 1982.
- [70] T. Whitworth and R.G. Peterson. Volume Transport of the Antarctic Circumpolar Current from Bottom Pressure Measurements. *Journal of Physical Oceanography*, 15:810–816, June 1985.