

Über den inneren Wärmehaushalt in mächtigen Eisschilden

Von K. Philberth *

Zusammenfassung: Der Haushalt der thermischen Energie in mächtigen Eisschilden läßt sich einfach beschreiben: Erdwärme plus Reibungswärme werden vollständig in horizontaler Richtung abtransportiert. Das ergibt einen direkten Zusammenhang zwischen dem v_x -Profil und dem Temperaturprofil.

Abstract: The budget of thermal energy in thick ice sheets can be described in a simple way: The total amount of geothermal heat and frictional heat is transported in horizontal direction. This fact yields a direct relation between the v_x -profile and the temperature-profile.

Das Temperaturprofil von kalten Eisschilden wird bekanntlich durch zwei Hauptfaktoren bestimmt: den Kältetransport von der Oberfläche nach unten und die per Wärmeleitung nach oben dringende Erdwärme nebst etwa hinzukommender Reibungswärme. Die mathematische Formulierung ergibt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, an deren Integration viel gearbeitet worden ist (1, . . . , 11, 16). Keine befriedigende grundsätzliche Lösung wurde bisher gefunden, wenn die Erdwärme von Ort zu Ort verschieden ist oder wenn die Reibungswärme relativ groß, das heißt der Erdwärme vergleichbar wird. In diesen Fällen läßt sich das Problem nämlich nicht auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen; bei der Reibungswärme tritt außerdem noch ein inhomogener Term auf.

Angesichts dieser Schwierigkeiten erhebt sich die Frage, ob man vielleicht auf einem andersartigen, einfacheren Weg zu quantitativen Aussagen über das Temperaturprofil kommen kann. Wie nachfolgend gezeigt wird, ist das tatsächlich der Fall — und zwar über den inneren Energiehaushalt des Eisschildes. Da derartige Überlegungen anscheinend noch nicht angestellt worden sind, sollen sie unter Verzicht auf Einzelheiten von der grundsätzlichen Seite behandelt werden.

Man kann drei Arten von thermischen Einflüssen auf den kalten Eisschild unterscheiden: Den am Felsboden einströmenden Erdwärmefluß; die in den unteren Eisschichten entwickelte Reibungswärme; die an der Oberfläche angreifende Lufttemperatur. Nehmen wir den letzten Einfluß vorweg.

Die Oberflächentemperatur kann sich zeitlich und räumlich ändern. Zeitliche Änderung kann hervorgerufen werden durch Hebung bzw. Senkung der gesamten Eisoberfläche oder durch Änderung der Lufttemperatur in gegebener Höhe. Beides wirkt sich gleichartig aus und darf gemeinsam wie eine klimatische Veränderung bei stationärer Oberfläche behandelt werden. Räumliche Änderung der Temperatur der Oberfläche kommt durch deren Wölbung zustande.

Wie andernorts (9, 10, 11) näher erörtert, darf man mit ausreichender Genauigkeit die Auswirkung des Klimas und der Oberflächenwölbung separieren; das heißt, man darf ein ihnen allein zugehöriges Temperaturprofil ermitteln und dieses mit dem von Erd- und Reibungswärme bedingten Profil superponieren. Daher ist es mit der praktischen Anwendbarkeit durchaus vereinbar, wenn wir nachfolgend die Einflüsse von Klimaschwankung und Oberflächenwölbung ausklammern und so rechnen, als sei die Oberflächentemperatur T_0 zeitlich und räumlich konstant.

Unter dieser Voraussetzung wird — wenn man die Oberflächentemperatur T_0 als das energetische Null-Niveau ansieht — keine thermische Energie durch die Oberfläche des Eisschildes transportiert. In horizontaler Richtung dagegen wird thermische Energie

* Dr. Karl Philberth, Eidg. Institut für Schnee- und Lawinenforschung, Davos; Privat: D-8031 Puchheim bei München, Peter-Rosegger-Straße 6.

transportiert, aber nicht geleitet, weil die Wärmeleitung in dieser Richtung vernachlässigbar ist. Durch den Felsboden wird ausschließlich die Erdwärme geleitet, wenn man annimmt, daß sowohl diese als auch der Bewegungszustand des Eisschildes (und damit dessen Reibungswärme) stationär sind.

Unter diesen Umständen kann man den Haushalt der inneren thermischen Energie des Eisschildes folgendermaßen kennzeichnen:

Erd- plus Reibungswärme werden teils durch die Oberfläche abgeleitet, teils nach der Seite abtransportiert.

Die Wärmeableitung durch die Oberfläche darf dann vernachlässigt werden, wenn der vertikale Temperaturgradient in der Nähe der Oberfläche klein ist gegenüber seinem Wert am Boden. Ob das der Fall ist, kann man bei vernachlässigbarer Reibungsleistung durch longitudinale Deformation leicht überschlagen, wenn man eine an anderer Stelle (8) bewiesene Beziehung zuhilfe nimmt: Die maximale Krümmung des Temperaturprofils liegt ungefähr dort, wo die Höhe h über dem Felsboden gleich dem Verhältnis der Diffusivität \approx zur Vertikalgeschwindigkeit v_h ist. Liegt diese kritische Höhe unter der halben Dicke des Schildes, so wird der Temperaturgradient in Oberflächennähe sehr klein. Das trifft für sehr mächtige Schilde zu. Kürzshalber wollen wir jetzt nur noch diesen Fall betrachten. Es ist der Fall, in dem die gesamte Erd- plus Reibungswärme nach der Seite abtransportiert wird.

Gebrauchte *physikalische Konstante*:

g	Erdbeschleunigung	982 cm/s ²
ρ	Dichte des Eises	0,92 g/cm ³
c	spezifische Wärme des Eises	0,49 cal/°C · g
σ	Wärmeleitfähigkeit des Eises	5,5 mcal/°C · cm · s
\approx	Diffusivität des Eises	38 m ² /Jahr
k	exponent. Viskositäts-Koeffizient des Eises	rund 0,1/°C

Veränderliche Größen — in Klammern steht der Zahlenwert für die Station Jarl Joset [Zentralgrönland; 33° 30' w. L., 71° 20' n. Br.] (11).

x	Abstand von der Eisscheide	[125 km]
h	Höhe über dem Boden	
H	totale Dicke des Eisschildes	[2500 m]
a	altitudo (Fallhöhe); Oberflächen-Höhendifferenz zwischen dem jeweiligen Punkt und dem peripheren Bezugspunkt	
a_m	Mittelwert der altitudo (mittlere Fallhöhe)	[167 m]
v_x	Horizontalgeschwindigkeit	
v_{xm}	Mittelwert der Horizontalgeschwindigkeit	[15 m/Jahr]
v_h	Vertikalgeschwindigkeit	
A	Eiswert der Akkumulation	[0,30 m/Jahr]
μ	geothermische Leistung pro Fläche	[1 μ cal/cm ² · s]
T_o	Oberflächentemperatur — wird als konstant angesehen	
T_g	geothermisch bedingte Temperaturerhöhung	
$T_f = T_f + T_q$	reibungsbedingte Temperaturerhöhung (F = „Friktion“)	
T_f	Temperaturerhöhung, wie wenn die Reibungswärme am Boden entstünde	
T_q	„Quellenfunktion“; führt die ebengenannte Idealisierung auf den Realfall (Reibungswärme im Eis entstehend) zurück	
$T_s = T_g + T_f = T_g + T_f + T_q = T - T_o$	Summen-Temperaturerhöhung	
tr_s	Summen-„Transportfunktion“; gleich T_s mal $v_x/v_{xm} \cdot A/H$	
G	Betrag des effektiven vertikalen Temperaturgradienten	[1/44 °C/m]
Y	Eisdicke-Parameter; gleich $k \cdot G \cdot H$	[5 bzw. 8,5]

Damit schreibt sich die Haushaltgleichung:

$$\int \mu \cdot dF + \int \varrho \cdot g \cdot A \cdot a \cdot dF = H \int \oint \varrho \cdot c \cdot T_s \cdot v_x \cdot dl \cdot dh$$

Dabei bedeutet der erste Term die innerhalb einer beliebigen, relativ zum Boden ruhenden Grundfläche $\int dF$ eingespeiste Erdleistung und der zweite Term die über der gleichen Grundfläche entwickelte Reibungsleistung. Auf der rechten Seite steht die Leistung, welche durch den Umfang $\oint dl$ der genannten Grundfläche abtransportiert wird (falls dl nicht orthogonal zu v_x steht, darf nur seine Projektion in v_x -Richtung gerechnet werden). Wenn am Boden oder in Bodennähe Schmelzwasser gebildet wird, so ist auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Energie (-Differenz gegenüber Eis mit der Temperatur T_0) der pro Zeiteinheit ausfließenden Schmelzwassermenge hinzuzufügen. Diesen Fall wollen wir aber im Folgenden ausschließen.

Die Haushaltgleichung vereinfacht sich, wenn μ und A nicht nur zeitlich sondern auch räumlich konstant sind, und wenn man sich auf zwei Grenzfälle, nämlich den zweidimensionalen und den rotationssymmetrischen Fall beschränkt. Man bekommt dann im

zweidimensionalen Fall:

$$\mu + \varrho \cdot g \cdot A/x \cdot \int a \cdot dx = \mu + \varrho \cdot g \cdot A \cdot a_m = \varrho \cdot c \cdot H \int T_s \cdot v_x/x \cdot dh$$

rotationssymmetrischen Fall:

$$\mu + \varrho \cdot g \cdot A/x^2 \cdot 2 \cdot \int a \cdot x \cdot dx = \mu + \varrho \cdot g \cdot A \cdot a_m = 2 \cdot \varrho \cdot c \cdot H \int T_s \cdot v_x/x \cdot dh$$

Diese beiden Fälle und ihre Übergangsformen lassen sich in einer einzigen Form ausdrücken:

$$\mu/(\varrho \cdot c) + a_m \cdot A \cdot g/c = A/H \cdot H \int T_s \cdot v_x/v_{xm} \cdot dh$$

Statt dessen kann man auch schreiben:

$$\mu/(\varrho \cdot c) = A/H \cdot H \int T_g \cdot v_x/v_{xm} \cdot dh; \quad a_m \cdot A \cdot g/c = A/H \cdot H \int T_f \cdot v_x/v_{xm} \cdot dh$$

wobei man das rechte Integral als Summe eines Integrals mit T_f und eines Integrals mit T_g schreiben kann. Der in den letzten Gleichungen auftretende Quotient v_x/v_{xm} ist die Profilmfunktion \emptyset (8), die unabhängig davon ist, ob es sich um Zweidimensionalität oder Rotationssymmetrie handelt. Die Eisdicke H braucht nicht räumlich konstant zu sein; zu setzen ist der Wert, den sie am festen Bezugspunkt (also z. B. bei Station Jarl Joset) hat.

Die Definition von a_m ist aus den weiter oben stehenden Doppelgleichungen ersichtlich. Wie daraus hervorgeht, kann im zweidimensionalen Fall a_m einfach durch Planimetrierung des Oberflächenprofils zwischen dem festen Bezugspunkt (also der Station, für welche die Berechnungen gelten sollen) und der Eisscheide gewonnen werden. Im rotationssymmetrischen Fall kann a_m mit Hilfe der Planimetrierung eines Pseudoprofils gewonnen werden, das aus dem tatsächlichen Oberflächenprofil durch horizontale Dilatation jedes Oberflächenelements mit dem zugehörigen x -Wert erhalten wird.

Der praktische Wert der Haushaltgleichungen liegt vor allem in ihrer übersichtlichen und einfachen Anwendbarkeit. Man braucht sich nur das Produkt aus der (bereits bekannten oder vermuteten) Temperaturerhöhung T_s oder deren Teilgliedern T_g , T_f , T_q mit der Profilmfunktion v_x/v_{xm} und dem festen Faktor A/H aufzuzeichnen und sieht die von jeder Schicht transportierte thermische Energie anschaulich vor sich. Planimetrierung ergibt den gesuchten Gesamtwert. Die Profilmfunktion v_x/v_{xm} ist relativ einfach zu gewinnen; beispielsweise aus dem erweiterten Glen'schen Gesetz (8) oder aufgrund eines Näherungs-Ansatzes (6). Dagegen wird die komplizierte, sich erst aus v_x ableitende Vertikalgeschwindigkeit v_h für die Haushaltgleichungen nicht benötigt — im Gegensatz zur eingangs genannten Differentialgleichung des Temperaturprofils.

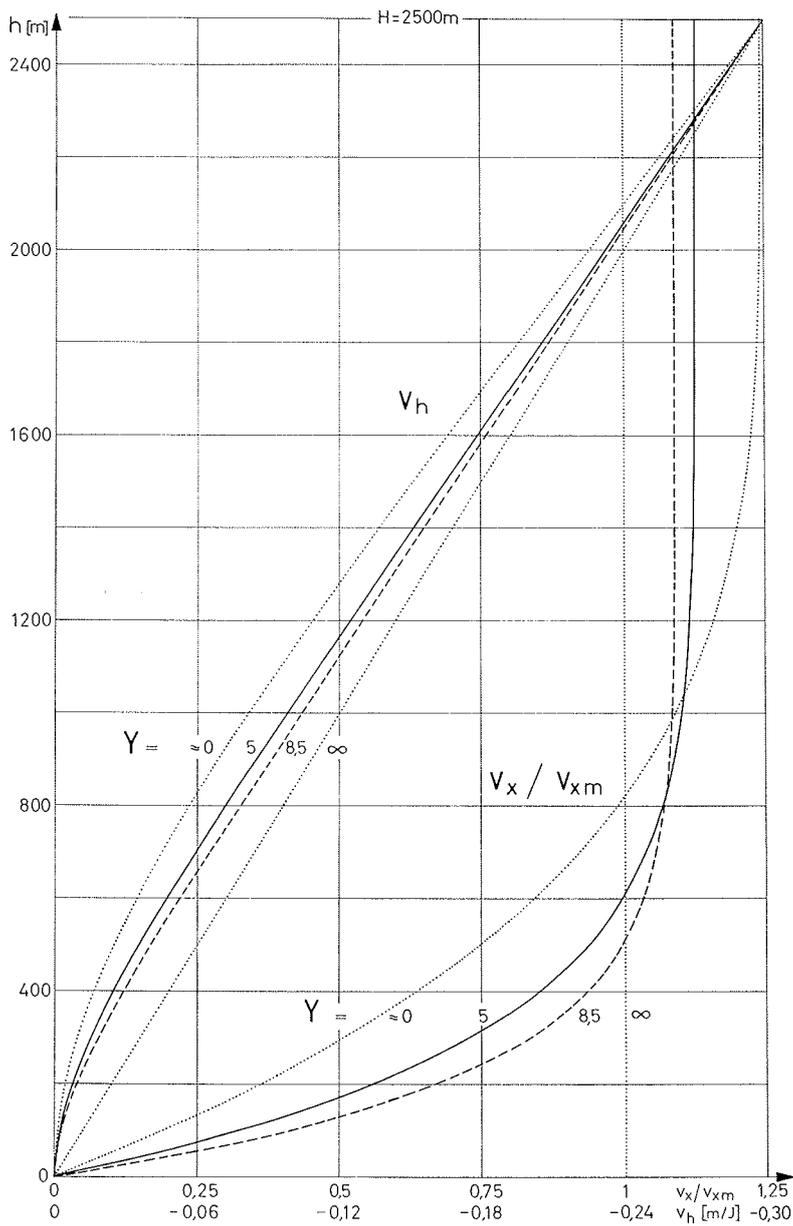


Fig. 1: Profilfunktion v_x/v_{xm} und Vertikalgeschwindigkeit v_h . Für Station Jarl Joset gelten die Kurven mit $Y = 5$ oder $Y = 8,5$. Die Kurven $Y = \infty$ (Nye's Modell) und $Y = 0$ (kein Temperatureinfluß) sind irrealer Grenzfälle.

Profile function v_x/v_{xm} and vertical velocity v_h . For the station Jarl Joset the curves with $Y = 5$ or $Y = 8,5$ are valid. The curves $Y = \infty$ (Nye's model) and $Y \approx 0$ (no influence of temperature) are unreal limiting cases.

Die Haushaltsgleichungen sind eine Gleichheit von Gesamtwerten. Sie ergeben eine Aussage über die gesamte Fläche des mit v_x gefalteten Temperaturprofils. Daher können sie die klassische Berechnung des Temperaturprofils im allgemeinen nicht ersetzen, können sie aber auf einfache Weise kontrollieren. Darüber hinaus sind sie geeignet, ohne viel Rechnung eine einigermaßen quantitative Vorstellung des Temperaturprofils zu ergeben. Denn einerseits ist der vertikale Temperaturgradient am Boden bekannt (nämlich $-\mu/\sigma$), andererseits kennt man aus z/v_h (siehe oben) die ungefähre Lage der maximalen Krümmung des Temperaturprofils, so daß die Hinzunahme der Haushaltsgleichungen das Bild weitgehend vervollständigt. Umgekehrt kann man natürlich bei gemessenem Temperaturprofil über den inneren Haushalt der thermischen Energie Rückschlüsse auf die Profilkurve v_x/v_{xm} und die anderen Parameter ziehen.

Im Rahmen von EGIG II sind in der bereits genannten Station Jarl Joset thermische Tiefbohrungen (12) nach einem neuen Prinzip (13, 14) durchgeführt worden. Bei den Auswertungsarbeiten (11) wurde an die Meßwerte ein bis zum Boden reichendes theoretisches Temperaturprofil angehängt, das unabhängig von den jetzt besprochenen Haushaltsgleichungen ermittelt wurde. Dieses setzt sich — nach Abtrennung der von Klima und Oberflächenwölbung herrührenden Teilfunktion T_k und T_α (9,10) — aus den oben erklärten Teilfunktionen T_g , T_f , T_q zusammen. Die 5 ebengenannten Teilfunktionen sind andernorts (9) dargestellt. Unsere ebenfalls für Station Jarl Joset geltenden Figuren zeigen daher nur (Fig. 1) verschiedene Typen der Profilkurve v_x/v_{xm} und (Fig. 2) die Transportfunktionen tr_g , tr_f , tr_q sowie $tr_s = tr_g + tr_f + tr_q$; diese sind das Produkt aus der gleichindizierten Temperaturerhöhung mit der Profilkurve v_x/v_{xm} und dem konstanten Faktor $A/H (= 0,12 \cdot 10^{-3}/\text{Jahr})$.

Figur 1 zeigt 4 Kurven, die die Profilkurve v_x/v_{xm} , und 4 Kurven, die v_h darstellen. Die jeweils 4 Kurven unterscheiden sich voneinander durch die Verschiedenheit des Eisdicke-Parameters $Y = k \cdot G \cdot H$ (8), wobei G den Betrag des Effektivwertes bedeutet, das heißt eines im unteren Bereich wirksamen Mittelwertes des endgültigen Temperaturgradienten.

Es ist schwer, einen genauen Wert von k anzugeben (15, 16). Deshalb sind in beiden Figuren je eine ausgezogene Kurve für $k = 0,09/^\circ\text{C}$, also $Y = 5$, und eine gestrichelte Kurve für $k = 0,15/^\circ\text{C}$, also $Y = 8,5$, eingetragen. Außerdem sind in Figur 1 als punktierte Kurven noch die beiden Grenzfälle $k = \infty$, also $Y = \infty$ (Nye'sches Modell) und $k \approx 0$, also $Y \approx 0$, angegeben. Man darf unterstellen, daß der wahre Profilverlauf sich von den Kurven mit $Y = 5$ und $Y = 8,5$ nicht sehr unterscheidet.

Figur 2 zeigt die besprochenen Transportfunktionen übersichtshalber nur für die beiden realistischen Fälle $Y = 5$ und $Y = 8,5$. Der Vergleich der von den Haushaltsgleichungen geforderten Sollwerte mit den planimetrierten Flächen der tr -Kurven nach Figur 2 ergibt — wenn man alle Zahlenwerte noch mit der Dimension $^\circ\text{C} \cdot \text{m}/\text{Jahr}$ versieht:

Sollwert	Teil- funktion	ausgezogene Kurve ($Y=5$)	gestrichelte Kurve ($Y=8,5$)
$\mu/(\sigma \cdot c) = 0,700;$	$tr_g = 0,694$	also -1% Abw.,	$0,694$ also -1% Abw.
	$tr_f = 0,275$		$0,272$
	$tr_q = -0,050$		$-0,032$
$a_m \cdot A \cdot \sigma / c = 0,240;$	$tr_f + tr_q = 0,225$	also -6% Abw.,	$0,240$ also 0% Abw.
Summe = $0,940;$	$tr_s = 0,919$	also -2% Abw.,	$0,934$ also -1% Abw.

Die Abweichungen von der durch die Haushaltsbeziehung geforderten Gleichheit sind demnach nur klein; nicht viel außerhalb der angewandten Rechen- und Zeichengenauigkeit. Man darf deshalb sagen, daß das vorgeführte Beispiel für Station Jarl Joset die Theorie des Haushalts der inneren thermischen Energie ausgezeichnet bestätigt.

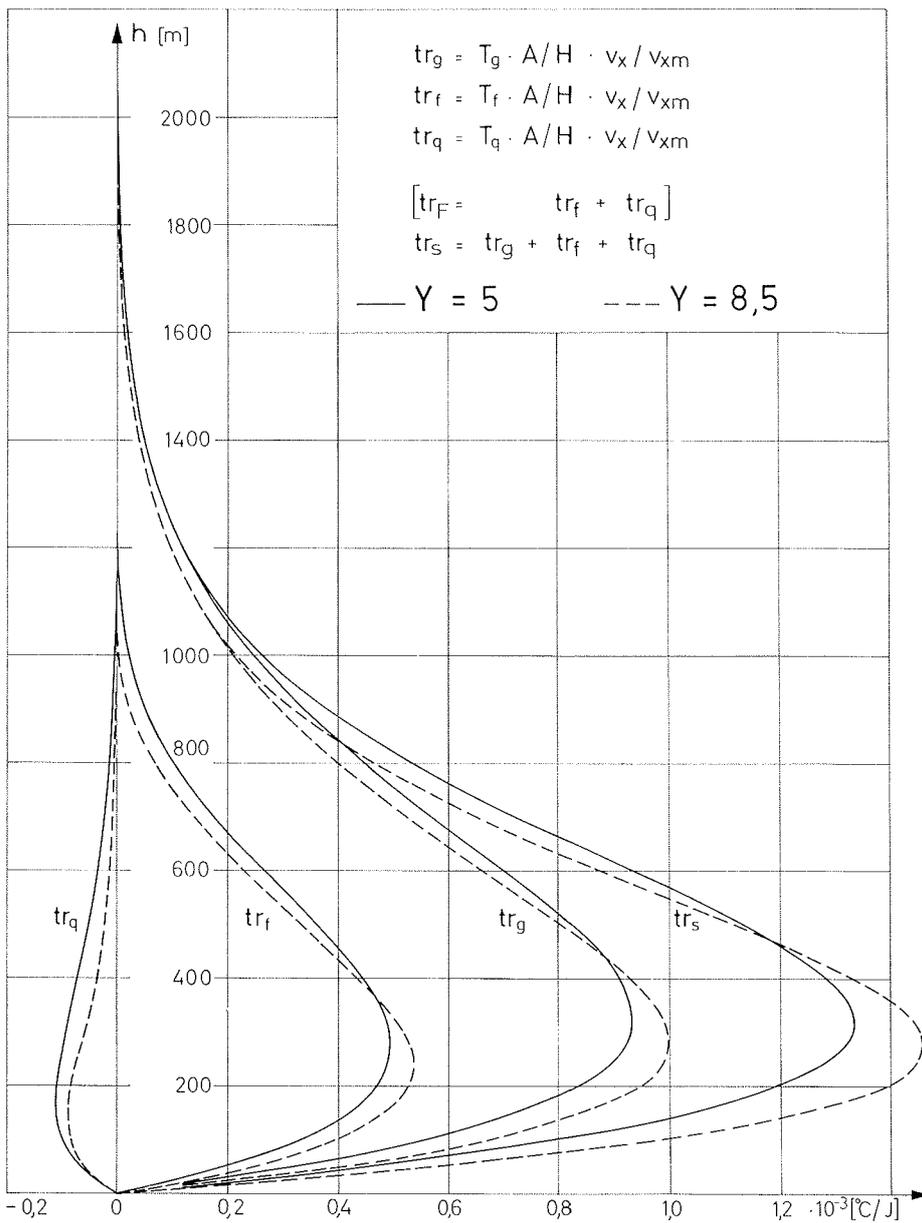


Fig. 2: Die Transportfunktionen mit $H = 2500$ m für $Y = 5$ und $Y = 8,5$ (Jarl Joset). Sie sind ein Maß für die in der jeweiligen Höhe horizontal abtransportierte thermische Energie (g: geothermischer Teil; f + q: Reibungs-Teil; s: beide Teile zusammen).

The transportation functions with $H = 2500$ m for $Y = 5$ and $Y = 8,5$ (Jarl Joset). They are a proportion for the thermal energy transported in horizontal direction (g: geothermal part; f + q: frictional part; s: both parts together).

Literatur

- (1) Brockamp, B. (1951): Nachtrag zu den wiss. Ergebnissen der Deutschen Grönlandexped. Alfred Wegener. N.Jahrb. f. Mineral., Geol. u. Paläont., Bd 93, Heft 2, S. 177—232.
- (2) Robin, G. de Q. (1955): Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets. J. of Glaciol. Vol. 2, No. 18, S. 523—532.
- (3) Chi Tien (1960): Temperature distribution of an idealized ice cap. U.S. Army snow ice and permafrost research establishment, Research report 64, S. 1—8.
- (4) Liboutry, L. (1968): Steady-state temperatures at the bottom of ice sheets and computation of the bottom ice flow law from the surface profile. J. of Glaciol. Vol. 7, No. 51, S. 363—376.
- (5) Weertman, J. (1968): Comparison between measured and theoretical temperature profiles of the Camp Century, Greenland, Borehole. J. of Geophys. Research, Vol. 73, No. 8, S. 2691—2700.
- (6) Dansgaard, W. and Johnsen, S. J. (1969): Comment on paper by J. Weertman, „Comparison between measured and theoretical temperature profiles of the Camp Century, Greenland, Borehole“. J. of Geophys. Research, Vol. 74, No. 4. S. 1109—1110.
- (7) Budd, W., Jenssen, D., Radok, U. (1969): The extent of basal melting in Antarctica. Polarforschung, Bd. VI, Jg. 39, S. 293—306.
- (8) Philberth, K. und Federer, B. (1971): On the temperature profile and the age profile in the central part of cold ice sheets. J. of Glaciol., Vol. 10, No. 58, S. 3—14.
- (9) Philberth, K. (1972): Factors influencing deep ice temperatures. Nature Physical Science, Vol. 237, No. 72, S. 44—45.
- (10) Philberth, K. und Federer, B. (1973): On the temperature gradient in cold ice sheets. J. of Glaciol. Im Druck.
- (11) Philberth, K.: Die thermische Tiefbohrung in Station Jarl Joset und ihre theoretische Auswertung. Meddelelser om Grönland. Im Druck.
- (12) Philberth, K. (1970): Thermische Tiefbohrung in Zentralgrönland. Umschau in Wissenschaft und Technik, Heft 16, S. 515—516.
- (13) Philberth, K. (1962): Une méthode pour mesurer les températures à l'intérieur d'un Inlandsis. Compt. rend. des séances de l'Acad. d. Sciences, t. 254, S. 3881—3883.
- (14) Aamot, W. C. (1967): The Philberth probe for investigating polar ice caps. U.S. Cold Regions Research & Engineering Labor., Hanover, Special Report 119, S. 1—11.
- (15) Liboutry, L. (1970): Le fluage de la glace. Communic. présentée au Comité Techn. de la Soc. Hydrotechn. de France. S. 489—492.
- (16) Budd, W. F. und Radok, U. (1971): Glaciers and other large ice masses. Reports on Progress in Physics, Vol. 34, No 1, S. 1—70.