

# Studien zur trigonometrischen Höhenmessung über Meereis

Von P. Thiele und W. Zick\*

**Zusammenfassung:** Aus über 600 Zenitdistanzen wurde für zwei Tage der Refraktionskoeffizient  $k$  sowohl für die horizontale als auch für die geneigte Visur berechnet. Die Genauigkeit eines einzelnen Höhenunterschieds wurde bestimmt in Abhängigkeit von unterschiedlicher Nicht-Simultanität der Beobachtungen.

**Summary:** In connection with geodetic works on the determination of the influence of the tides on the sea ice near Pond Inlet, N.W.T. (Canada), trigonometric height measurements were carried out under different weather conditions. From more than 600 zenith angles, the refraction coefficient  $k$  was calculated on a horizontal and an inclined line of sight for two days. The accuracy of a single height difference is calculated depending on the varying non-simultaneity of the observations.

## 1. Einleitung

Die Teilnahme an einer geophysikalischen Polarexpedition nach Pond Inlet ( $73^{\circ}$  n. Br.,  $78^{\circ}$  w. Gr.) auf Baffin Island (Nord-Kanada) ermöglichte es den Verfassern, neben Untersuchungen zur Bewegung des ca. 2 m dicken Meereises auf dem Eclipse Sound zwischen Baffin Island und Bylot Island [Zick & Thiele, (1972)] Studien zur trigonometrischen Höhenmessung über Meereis vorzunehmen.

## 2. Feldmessungen

Die Messungen wurden am 9. 6. 1972 von  $9^h$  —  $23^h$  Ortszeit (Atlantic Standard Time +  $1^h$ ) und am 21. 6. 1972 von  $10^h$  —  $23^h30$  vorgenommen. Abb. 1 zeigt die Topographie des Meßprofils und die beiden über das Meereis verlaufenden Sichtstrahlen P 3 — H 2 und P 3 — P 1 von den zwei höhenmäßig möglichst weit auseinanderliegenden Festlandspunkten P 1 und H 2 zum ca. 2 km entfernten Punkt P 3 direkt auf dem Meereis. Auf Grund der Tidenbewegung von P 3 ändern sich die Höhenunterschiede P 3 — P 1 und P 3 — H 2 ständig. Um diesen Einfluß berücksichtigen zu können, wurden mit einem Nivelliergerät Zeiss Ni 2 die Tidenbewegungen in den Zeiten zwischen den einzelnen Zenitdistanzmessungsgruppen durch Zielungen nach 13 bis 400 m Küstenentfernung im Eis starr verankerten Aluminiumrohren, auf denen spezielle cm- bzw. dm-Teilungen befestigt waren, erfaßt. Im vorliegenden Profilstück tritt auf Grund der Küstenbeschaffenheit die gesamte Tidenbewegung erst nach 200 m Küstenentfernung auf.

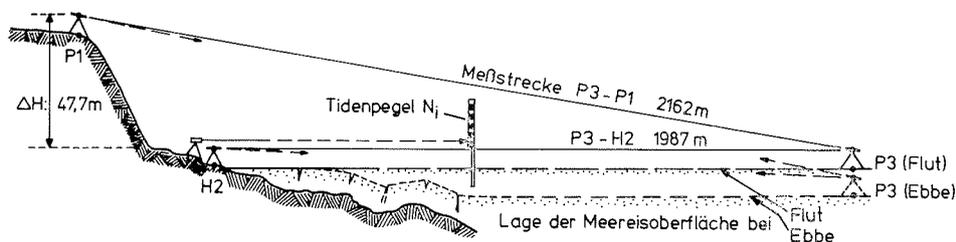


Abb. 1: Topographisches Profil des Meßgebietes (unmaßstäblich) und Sichtstrahlen zur Beobachtung der Refraktion über Meereis.

Fig. 1: Profile of the measuring area with the sights for the observation of the refraction over sea ice.

Die trigonometrischen Höhenmessungen wurden mit zwei Wild T2 Theodoliten gegenseitig ohne Beachtung der strengen Gleichzeitigkeitsforderung fortlaufend durchgeführt. Die Zenitdistanzen wurden zwischen P 3 — P 1 (horizontale Visur H) bzw. P 3 — H 2

\* Dipl.-Ing. Peter Thiele und Dipl.-Ing. Wolfgang Zick, Geodätisches Institut der Universität (TH), 75 Karlsruhe, Englerstraße 7

(geneigte Visur G) nacheinander beobachtet. Hierzu war das Umsetzen des einen Instruments zwischen den Punkten P 1 und H 2 notwendig. Eine Gruppe von Zenitdistanzmessungen umfaßte auf diesen Punkten jeweils 3 bis 5 Sätze. Auf P 3 wurde die Zenitdistanz nach H 2 nahezu kontinuierlich beobachtet, ausgenommen die kürzeren Zeitabschnitte von 15 — 20 min für 5 bis 8 Sätze zum Ziel P 1.

Die zu Zieltafeln hin gemessenen Vertikalwinkel werden auf den entsprechenden Instrumentenhorizont hin reduziert; am 21. 6. mußte eine zusätzliche Reduktion wegen des Absinkens von Zieltafel und Instrument am Punkt H 2 vorgenommen werden, obgleich alle Stativbeine durch Schnee vor Strahlung geschützt waren. Das Absinken, hervorgerufen durch das Aufstellen im nicht mehr gefrorenen nassen Sand des unmittelbaren Küstenstreifens, betrug 4 cm innerhalb von 14 Stunden.

Ausreichende meteorologische Daten liegen für die Meßstrecken direkt nicht vor, Informationen für die Umgebung des Meßgebietes sind vorhanden.

### 3. Auswertung der Feldmessungen

Tidenbewegung: Für eine Küstenentfernung von mehr als 200 m können alle ca. halbstündigen Pegelablesungen zur Ermittlung einer mittleren Tidenbewegung verwendet werden. Refraktionskorrekturen wurden angebracht, der mittlere Fehler einer gemittelten Ablesung an vier Pegeln liegt bei  $\pm 0,4$  cm. Die Differenz zwischen maximalem und minimalem Tidenwert beträgt 1,10 m für den 9. 6. 1972 und 1,81 m für den 21. 6. 1972.

Höhenunterschiede  $h$  aus gegenseitigen Zenitdistanzen  $z_i$  werden unter Annahme einer kreisbogenförmigen Lichtkurve im allgemeinen nach der Formel

$$h = H_2 - H_1 = s \left( 1 + \frac{H_m}{r} \right) \tan \frac{z_2 - z_1}{2} \quad (1)$$

berechnet, ohne die Größe des Refraktionskoeffizienten kennen zu müssen. Bei den vorliegenden Zenitdistanzen zwischen  $88^{\circ}7$  und  $91^{\circ}3$  und Strecken  $s \approx 2$  km wird  $h$  ohne Genauigkeitsverlust für alle sich ergebenden, bis zu 6 min nicht gleichzeitigen Bestimmungsmöglichkeiten durch das Mittel entsprechender Höhenunterschiede aus einseitigen Zenitdistanzen berechnet. Der Refraktionskoeffizient wird hierbei mit Null angenommen, der Erdkrümmungseinfluß wird berücksichtigt.

Die Berechnung des mittleren Refraktionskoeffizienten  $k$  längs des Zielstrahls erfolgt nach der Formel

$$k = 1 - \frac{z_1 + z_2 - 180^{\circ}}{\rho''} \cdot \frac{r}{s} \quad (2)$$

wieder unter der Annahme einer kreisbogenförmigen Lichtkurve. Abb. 2 enthält den zeitlichen Verlauf der Refraktionskoeffizienten für beide Meßstrecken und beide Meßtage.

### 4. Ergebnisse der Gesamtauswertung

Als Ausgangsmaterial finden alle Messungen Verwendung, abgesehen von den Beobachtungen auf der Strecke P 3 — H 2 am 21. 6. 1972 ab 19h, da genaue Zenitdistanzmessungen ab diesem Zeitpunkt auf Grund von Schwebungserscheinungen unmöglich wurden; für diesen Zeitraum wurden nur Refraktionskoeffizienten berechnet (Abb. 2). Schwebungserscheinungen periodischer Art konnten am 21. 6. von 23h35 bis 24h auf P 3 für das Ziel in H 2 mit einer Sinuskurve (Periode 5 min, doppelte Amplitude ca. 25 cm) beschrieben werden; das Bild des höher gelegenen Ziels P 1 blieb im ganzen Beobachtungszeitraum annähernd gleich ruhig und klar.

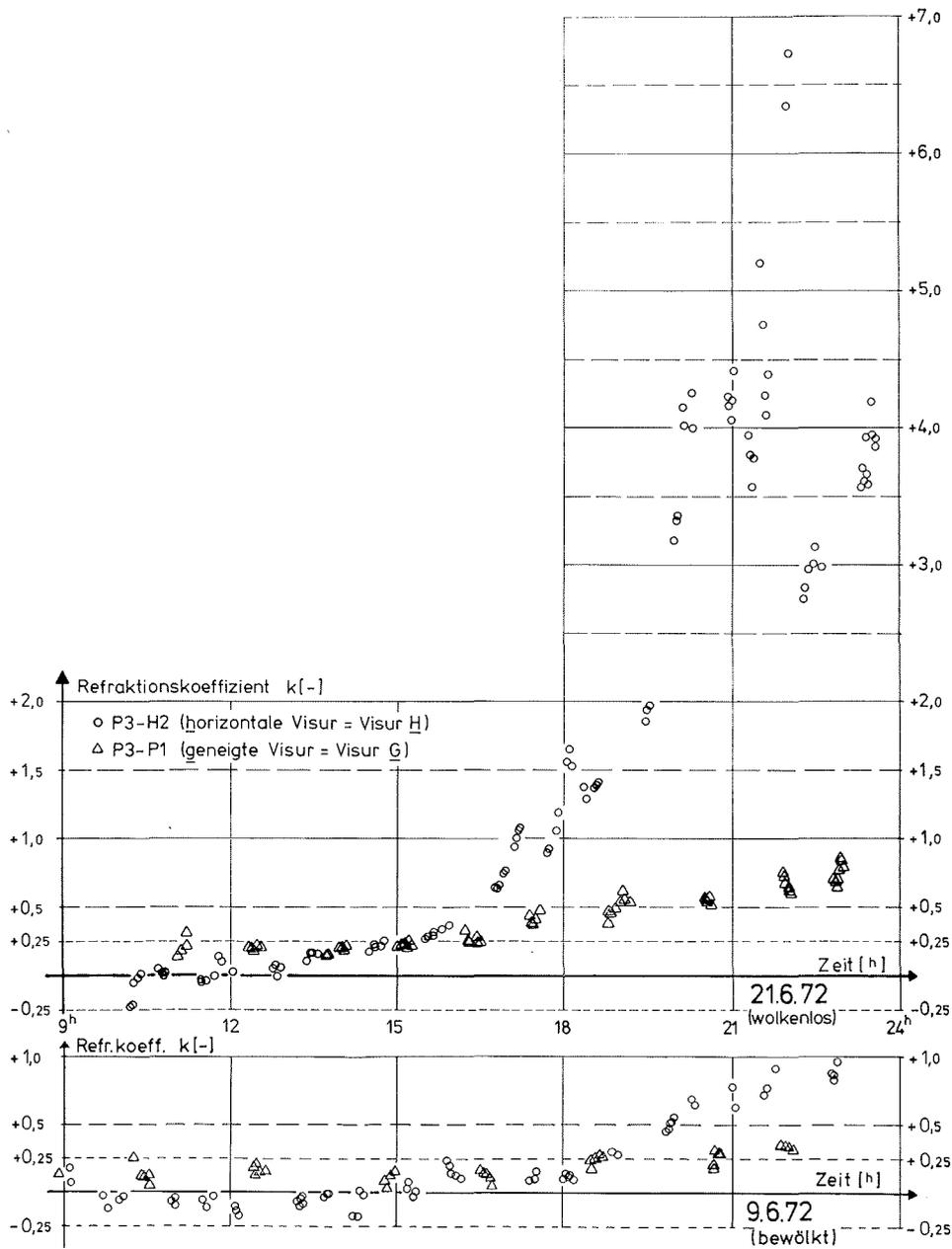


Abb. 2: Verlauf der mittleren Refraktionskoeffizienten der horizontalen bzw. geneigten Visur über Meer-eis für den 9. 6. 1972 und den 21. 6. 1972.

Fig. 2: The mean refraction coefficient  $k$  of the horizontal and inclined line of sight over sea ice (9. 6. 1972, 21. 6. 1972).

Der mittlere Fehler einer Zenitdistanz beträgt  $m_z = \pm 0,7$  bis  $1,0$  bzw. umgerechnet  $m_h = \pm 0,7$  bis  $1,0$  cm, der daraus resultierende mittlere Fehler des Refraktionskoeffizienten  $k$  nach (2) ergibt sich unter Annahme simultaner Beobachtungen zu  $m_k = \pm 0.02$ .

Paterson & Stesser (1956) weisen für nicht simultane Beobachtungen (Zeitintervall  $5 \text{ min} < \Delta T < 15 \text{ min}$ ) auf große Reduktionsbeträge zur Erreichung der Simultanität hin, die sich auf Grund sich ändernder Refraktionskoeffizienten ergeben, wobei der Tagesgang auf mehreren nacheinander gemessenen Meßstrecken gewonnen wird. Inwieweit diese Simultanität bei den vorliegenden Messungen von Bedeutung ist, soll hier aufgezeigt werden.

Die tidenbedingt veränderlichen, gegenseitig bestimmten, nur annähernd simultan gemessenen Höhenunterschiede werden um die nahezu fehlerfrei ermittelten Tidenbewegungen reduziert und der mittleren Beobachtungszeit nach meßgruppenweise aufgetragen (Abb. 3).

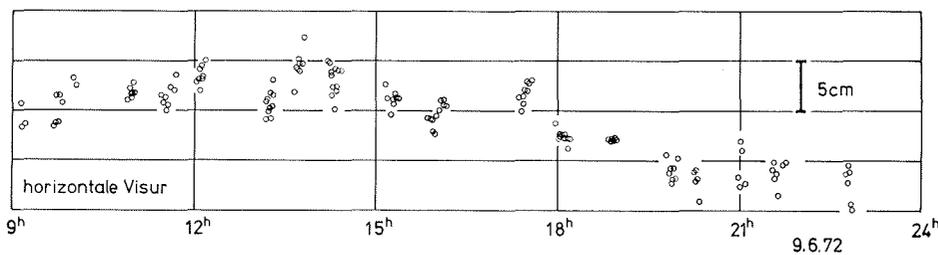


Abb. 3: Verlauf des tidenreduzierten, aus gegenseitigen, nicht simultanen Beobachtungen berechneten Höhenunterschiedes für die horizontale Visur am 9. 6. 1972.  
Fig. 3: Variation of the height differences for the horizontal line of sight, calculated from reciprocal, non simultaneously observed zenith angles. The values are reduced for tide movements (9. 6. 1972).

Aufgeteilt nach den Zeitintervallen  $\Delta T$  zwischen den zwei verwendeten nicht simultanen Beobachtungen werden die Abweichungen der einzelnen reduzierten Höhenunterschiede gegenüber zwei Größen, die als übergeordnete Größen wegen ihrer Zusammensetzung aus allen Zeitintervallklassen und ihrer daher weitaus höheren Genauigkeit als Sollwerte angesehen werden, ermittelt:

*erstens:* gegenüber dem Gruppenmittel einer Messungsgruppe, das über die Beobachtungszeit (10 bis 30 min) als konstant angenommen wird;

*zweitens:* gegenüber einer ausgleichenden Geraden oder einem Geradenstück, welche eine zeitabhängige Änderung der reduzierten Höhenunterschiede vereinfacht darstellen.

Auf Grund des zu geringen Beobachtungsmaterials kann die Ursache des Trendverhaltens in Abb. 3 nicht angegeben werden. Die Differenzen der einzelnen Zeitintervallklassen werden für jedes Verfahren zur Berechnung der mittleren Fehler  $m_1$  bzw.  $m_2$  nach

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}} \quad \text{verwendet, siehe Abb. 4.}$$

Für diese nach Zeitintervallklassen angegebenen mittleren Fehler  $m_1$  und  $m_2$  werden wiederum mittlere Fehler nach  $m_m = \pm \frac{m}{\sqrt{2n}}$  berechnet. Diese ergeben die in Abb. 4

gezeigten Bandbreiten von 11 bis 22% der einzelnen mittleren Fehler. Nahezu in allen Fällen liegen die ausgleichenden Geraden zur formelmäßigen Erfassung der mittleren Fehler innerhalb der vorgegebenen Bandbreiten. Es ergeben sich

| mittl. Fehler $m_1$<br>berechnet über: |               | Meßstrecke          | Formel für $m_1$ mit Zeitintervall<br>$\Delta T$ [min] |
|--|---------------|---------------------|--|
| $m_1$                                  | Gruppenmittel | horizontale Visur H | $m_1 = \pm (1,1 + 0,05 \Delta T)$ [cm]                 |
| $m_2$                                  | ausgl. Gerade |                     | $m_2 = \pm (1,6 + 0,05 \Delta T)$ [cm]                 |
| $m_1$                                  | Gruppenmittel | geneigte Visur G    | $m_1 = \pm (1,3 + 0,12 \Delta T)$ [cm]                 |
| $m_2$                                  | ausgl. Gerade |                     | $m_2 = \pm (1,5 + 0,11 \Delta T)$ [cm]                 |

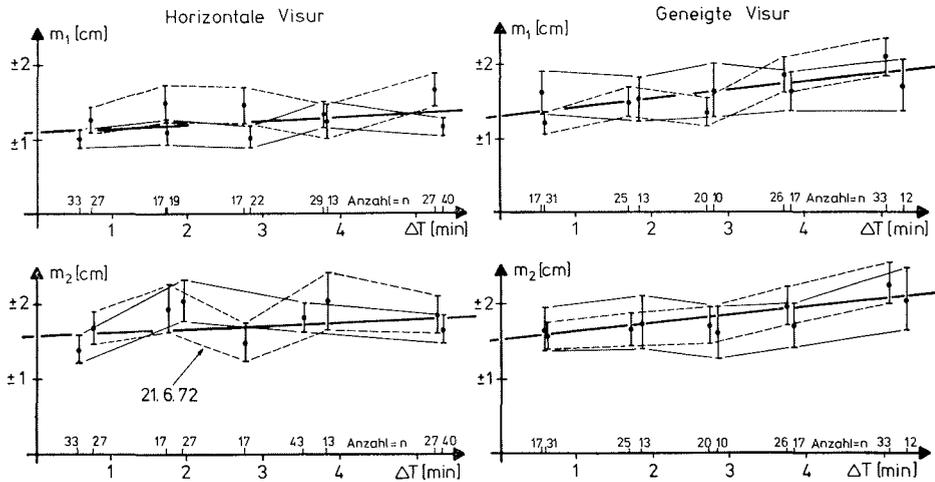


Abb. 4: Mittlere Fehler  $m_1$  bzw.  $m_2$  von — aus gegenseitigen, um  $\Delta T$  nicht simultanen Zenitdistanzen berechneten — tidenreduzierten Höhenunterschieden, berechnet gegenüber:  
 1. dem mittleren Höhenunterschied einer Beobachtungsgruppe,  
 2. der ausgleichenden Geraden für alle Beobachtungen.  
 $n$  = Anzahl der Elemente pro Zeitintervallklasse; Breite des Fehlerbandes: mittlere Fehler von  $m_1$  bzw.  $m_2$ .

Fig. 4: Mean square errors  $m_1$  and  $m_2$  from tide-reduced height differences — calculated from reciprocal, non simultaneously (time difference  $\Delta T$ ) observed zenith angles — referred:  
 1. to the mean height difference of a group of observations,  
 2. to the balanced line through all observations.  
 $n$  = number of elements for a group of same time difference  $\Delta T$ .

Auf Grund weitaus größerer Homogenität der einzelnen Messungsgruppen ergeben sich bei Verwendung der Gruppenmittel erwartungsgemäß kleinere mittlere Fehler  $m_1$  als unter Berücksichtigung sämtlicher Messungen, in denen langzeitige, meteorologisch bedingte Änderungen (z. B. Formänderungen der Lichtkurve durch örtlich sich ändernde Refraktionskoeffizienten) deutlich durch das Abweichen einzelner Gruppenmittel gegenüber der Ausgleichsgeraden zum Ausdruck kommen. Der mittlere Fehler  $m_2$ , berechnet über die ausgleichende Gerade, erfaßt die Unkenntnis der tatsächlichen Refraktionsverhältnisse weitaus besser und ist daher als die wirklichkeitsnähere Größe weiterzuverwenden. Die zeitintervallabhängige Zunahme der mittleren Fehler ist bei beiden Verfahren für gleiche Meßstrecken gleich groß. Eine größere horizontale Stabilität der Luftmassen und damit auch der Refraktionsverhältnisse über dem Meereis führt bei horizontalen Visuren (Meßstrecke P 3 — H 2) zu geringeren Zeiteinflüssen als bei geneigten Visuren (Meßstrecke P 3 — P 1). Bei beiden Verfahren könnte eine einseitige zeitliche Änderung des Refraktionskoeffizienten — ähnlich wie bei Paterson u. a. (1956) — für die größten Zeitintervalle systematische Einflüsse erwarten lassen, doch durch die Erfüllung des Zufallkriteriums  $|\epsilon| \leq 0 \pm m\sqrt{n}$  wird eine solche Systematik nicht bestätigt. Unabhängig von den vorliegenden Genauigkeitsangaben  $m_1$  und  $m_2$  kann der mittlere

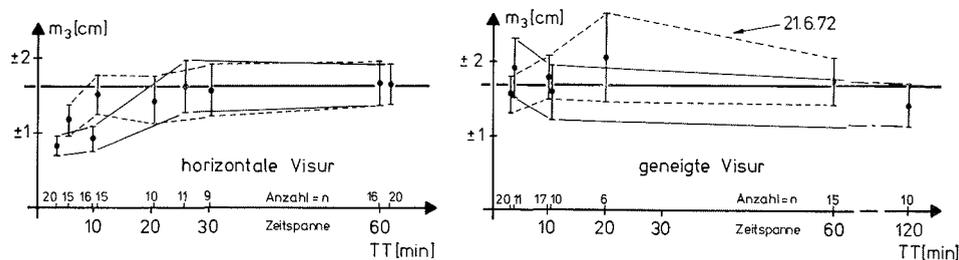


Abb. 5: Mittlere Fehler  $m_3$  von — aus gegenseitigen, um ein mittleres Zeitintervall ( $\Delta T \approx 2$  min) nicht simultanen Zenitdistanzen berechneten — tidenreduzierten Höhenunterschieden, berechnet über Doppelbestimmungen, zwischen denen eine vorgegebene Zeitspanne  $TT$  liegt.  $n$  = Anzahl der einzelnen Differenzen pro Gruppe; Breite des Fehlerbandes: mittlere Fehler von  $m_3$ .

Fig. 5: Mean square errors  $m_3$  from tide-reduced height differences — calculated from reciprocal non simultaneously ( $\Delta T \approx 2$  min) observed zenith angles — calculated by double observations with a time interval  $TT$ .  $n$  = number of group elements for the same  $TT$ .

Fehler von — aus gegenseitigen, um ein mittleres  $\Delta T$  nicht simultanen Zenitdistanzen berechneten — tidenreduzierten Höhenunterschieden auch über Doppelbestimmungen, die in einem bestimmten zeitlichen Abstand vorgenommen worden sind, ermittelt werden. Abb. 5 enthält die Darstellung dieser mittleren Fehler  $m_3$  — wieder mit ihren mittleren Fehlern als Fehlerband — in Abhängigkeit von der Zeitspanne  $TT$ . Da  $m_3$  jeweils aus  $n$  unabhängigen Wertepaaren ermittelt wird, sind nach Abspalten des Trendverhaltens nahezu gleichbleibende Werte für alle untersuchten Zeitspannen zu erwarten. Dieses trifft aber nur für die geneigte Visur  $G$  zu, bei der Visur  $H$  besteht zwischen den Doppelbestimmungen mit Zeitspannen von 10 min und weniger — also innerhalb einer Meßgruppe — eine deutliche Korrelation. Die Bestimmungen daraus sind nicht mehr unabhängig voneinander, die daraus resultierenden  $m_3$ -Werte dürfen für Genauigkeitsbetrachtungen nicht herangezogen werden. Die hier nachgewiesene Erhaltungstendenz bestätigt gleichzeitig die geringere Steigung des oben berechneten zeitintervallabhängigen mittleren Fehlers für die horizontale Visur  $H$  (Abb. 4).

Eine Gegenüberstellung der Beträge von  $m_2$  und  $m_3$  zeigt volle Übereinstimmung der Ergebnisse; für  $m_2$  wird hierbei ein mittleres Zeitintervall von  $\Delta T = 2$  min angesetzt.

| Meßstrecke            | $m_2$        | $m_3$         |
|-----------------------|--------------|---------------|
| horizontale Visur $H$ | $\pm 1,7$ cm | $\pm 1,6$ cm  |
| geneigte Visur $G$    | $\pm 1,7$ cm | $\pm 1,65$ cm |

Diese Ergebnisse gelten für beide Meßtage, ausgenommen für die Zeiten sich sehr stark ändernder Refraktionskoeffizienten; die Messungen für die Visur  $H$  vom 21. 6. nach 19<sup>h</sup> bleiben aus diesem Grund unberücksichtigt.

##### 5. Refraktionsverhältnisse

Aus insgesamt über 600 Zenitdistanzen konnte für beide Tage ein zuverlässiger Tagesgang der wirksamen Refraktionskoeffizienten sowohl für die eisnahe horizontale Sicht ( $h \approx 2$  m, Visur  $H$ ) als auch für die geneigte Sicht (mittlere Höhe über Eis  $\approx 25$  m, Visur  $G$ ) berechnet werden (Abb. 2). Obwohl die Sonnenbahn in dieser Breite auch am 21. 6. relativ flach ist ( $z_{12}^h \approx 50^\circ$ ,  $z_{24}^h \approx 84^\circ$ ), ist für die Visur  $H$  an beiden Tagen eine deutliche Abhängigkeit von der Sonnenhöhe festzustellen; dieser Einfluß ist auf die eisnahe Schicht beschränkt. Auffallend ist, daß für Visur  $H$  — trotz der Bewölkung — nur am 9. 6. deutlich negative  $k$  auftreten, am 21. 6. (wolkenlos) bleibt  $k_{\text{Visur } H}$  für gleiche Zeitpunkte stets mehr zu positiven Werten hin verschoben. Eine Erklärung geben die auf

einem Punkt in etwa 12 km Küstenabstand auf dem Eis gemessenen, leicht verstrahlten Temperaturgradienten:

|        | 12 <sup>00</sup> Uhr |          | 14 <sup>30</sup> Uhr |          | Eistemperatur<br>in 40 cm Tiefe |
|--------|----------------------|----------|----------------------|----------|---------------------------------|
|        | t 30 cm              | t 600 cm | t 30 cm              | t 600 cm |                                 |
| 9. 6.  | — 3,2° C             | — 4,8° C | — 4,3° C             | — 4,5° C | — 4,3° C                        |
| 21. 6. |                      |          | + 0,2° C             | + 1,9° C | — 3,2° C                        |

Am 9. 6. liegt der wohl normale Zustand vor, bei dem in einer relativ dicken Kaltluftschicht durch Einstrahlung mittags starke negative Temperaturgradienten mit gleichzeitig auftretendem Flimmern entstehen. Am 21. 6. wird im Feldbuch auf P 1 warmer Wind von SW besonders vermerkt; auch die Temperaturmessungen bestätigen, daß von außen warme Luftmassen herangeführt wurden, so daß selbst die Erwärmung von über 3° C der untersten Luftschicht gegenüber der Oberflächentemperatur des Eises keinen negativen Temperaturgradienten in der Luft entstehen läßt. So erklären sich auch die nach dem Überwiegen der Ausstrahlung abnorm hohen, stark schwankenden Refraktionskoeffizienten bis + 6,7; gegen 24 Uhr hatte die Kaltluftschicht eine Mächtigkeit zwischen 5 m und 10 m erreicht.

Obwohl die Windgeschwindigkeiten mit  $< 3$  m/sec relativ gering waren, sind die Schwankungen der wirksamen Refraktionskoeffizienten aus beiden Tagen vor 17 Uhr auch in der eisnahen Luftschicht äußerst gering ( $\leq \pm 0,05$ ); bisher wurden nur bei starkem katabatischem Wind in der untersten Luftschicht stabile Refraktionsverhältnisse vermutet. Offensichtlich bestätigt sich die von Lichte (1957) geäußerte Vermutung, daß trotz der beträchtlichen Schwankungen der örtlichen Refraktionskoeffizienten über größere Strecken der wirksame Refraktionskoeffizient merklich kleiner, hier aber auch wesentlich stabiler ist. Auf Grund dieser Erfahrungen, die teilweise mit Messungen in der Antarktis übereinstimmen, sollte auch für genaue Höhenübertragungen und Traversierungen der Einsatz der trigonometrischen Höhenmessung neu geprüft werden.

#### Literatur

- Dittrich, G. u. Schwarz, G.: Die Geodätischen Arbeiten der deutschen Gruppe während der 7. Sowjetischen Antarktis-Expedition 1962. Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik der Deutschen Demokratischen Republik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Reihe III, 5. Berlin 1966.
- Lichte, H.: Geodätische Messungen auf dem grönländischen Inlandeis. Zeitschrift für Vermessungswesen 82 (1957) S. 46—50, 65—73.
- Paterson, W. S. B. u. Stesser, C. G. M.: Trigonometrical Levelling across the Inland Ice in North Greenland. Empire Survey Review, Vol. XIII, Nr. 100, 1956, S. 252—261.
- Zick, W. u. Thiele, P.: Geodätische Arbeiten im Rahmen des Canadian Arctic Channel Project 1972. Polarforschung, 42. Jg., Nr. 2, 1972.