

Thermodynamisches Modell eines äußeren Eisschelfs

Von M. S. Krass und P. A. Šumskij *

Резюме: Краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения относительно приведенной температуры в квазистационарном внешнем шельфовом леднике решается методом сшиваемых асимптотических разложений. Показано, что устойчивость термического режима имеет место лишь при условии, что линии тока проходят через обе поверхности ледника, так как тогда адвекция выносит диссипируемое тепло наружу. При встречном движении льда с верхней и нижней поверхностей ледника режим неустойчив, так как ведёт к внутренней аккумуляции тепла.

Zusammenfassung: Das Randwertproblem für die nicht-linearen Integrodifferentialgleichungen, welche die Temperatur in einem quasi-stetigen äußeren Eisschelf kontrollieren, wird gelöst durch Anpassen asymptotischer Expansionsen. Es wird gezeigt, daß thermische Stabilität nur besteht, wenn die Stromlinien durch beide Schelfoberflächen austreten, da in diesem Fall die innere Verformungswärme durch Advektion abgeführt wird. Im Falle, daß Eis von der oberen und unteren Grenzfläche in entgegengesetzter Richtung fließt, würde das System wegen der Anhäufung innerer Wärme instabil sein.

Summary: The boundary problem for the non-linear integro-differential equation governing the temperature in a quasi-steady external ice shelf is solved by means of matching asymptotic expansions. It is shown that stability of the thermal regime exists only if streamlines pass through both the glacier surfaces, because in this case the advection removes the heat dissipation by internal deformation. In the case of ice moving in opposite directions from the upper and lower surfaces the regime would be unsteady because of internal heat accumulation.

Einleitung

Eine frühere Arbeit [1] enthält eine Klassifikation von Gletschern und zeigt die grundlegenden Unterschiede zwischen Landgletschern und schwimmenden Gletschern auf. Insbesondere fehlt bei schwimmenden Gletschern praktisch jede Reibung auf der Unterseite, was dazu führt, daß beide Grenzflächen — sowohl die obere als auch die untere — mit den Hauptebenen der Oberflächenspannung zusammenfallen. Die Übertragung der Zugspannung vom Rande auf den Gesamtkörper des Gletschers, seine flache Form und die verhältnismäßig hohe Geschwindigkeit des Eises hängen zusammen mit dem Fehlen der horizontalen Tangentialspannung. Die wesentliche Besonderheit der schwimmenden Gletscher besteht in ihrem nicht-isothermen Temperaturfeld: dem Vorhandensein eines großen vertikalen Temperaturgradienten.

Schwimmende Gletscher werden unterteilt in äußere Schelfgletscher — sie grenzen mit der einen Seite fest ans Ufer und dehnen sich frei auf der Wasseroberfläche aus — und innere Schelfgletscher — sie sind von verschiedenen Seiten durch Ufer umgeben, mit denen sie dynamisch in Wechselwirkung stehen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein dreidimensionales, thermodynamisches Modell für den äußeren Schelfgletscher aufgestellt.

Die Neigung der oberen und unteren Grenzflächen von äußeren Schelfgletschern ist in der Regel sehr gering. Deshalb kann man den Gletscher — mit Ausnahme der Randzone — mit ausreichender Genauigkeit als flächenparallele Platte ansehen und physikalische Unterschiede zwischen den horizontalen Richtungen vernachlässigen, außer in Fällen, wo Deformationen zur Bewegung des Eises relativ zur Randzone führen. So wird die Aufgabe eindimensional.

Wir legen die horizontale Achse $O\xi$ eines affinen Systems dimensionsloser Koordinaten den Meeresspiegel entlang vom inneren zum äußeren Rand des Gletschers in Richtung der Gletscherbewegung und eine Achse $O\zeta$ vertikal nach oben (Abb. 1). Die charakteri-

* Prof. Dr. M. S. Krass und Prof. Dr. P. A. Šumskij, Institut für Mechanik der Universität, 117234, Michurinskij pr. 1, Moskau (UdSSR).

Zu danken ist Herrn H. Klüter, Münster, für die freundliche Übernahme der Übersetzung und Herrn Prof. Dr. U. Radok, Melbourne, für die Durchsicht des deutschen Manuskripts.

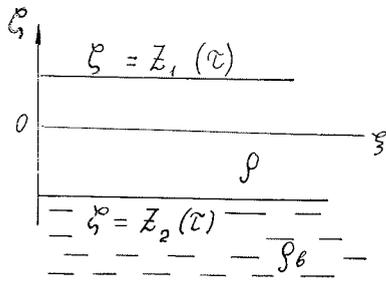


Abb. 1: Koordinatensystem im Eisschelf.
Fig. 1: Coordinate systems in the ice shelf.

stische lineare Horizontalabmessung L ist wesentlich größer als die mittlere Dicke H , so daß

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (1)$$

Der Gletscher ist oben und unten durch die folgenden Flächen begrenzt: $\xi = Z_1(\tau)$ und $\xi = Z_2(\tau)$ (τ -dimensionslose Zeit). Die Dichte des Eises wird mit ρ , die des Wassers mit ρ_B bezeichnet.

Auf Grund der verhältnismäßig geringen Dicke des Gletschers (1) ist die schwimmende Eisschicht lokal im Vertikalgleichgewicht:

$$Z_1(\tau) = -\frac{\rho_B - \rho}{\rho} \cdot Z_2(\tau) \quad (2)$$

1 Die Grundgleichungen — Die Aufgabenstellung

Vernachlässigt man den kleinen Einfluß der Trägheitsglieder, sieht das System für Gleichgewicht folgendermaßen aus:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} - \rho g_i = 0, \quad (1.1)$$

wobei p = Druck, σ_{jk} = Komponenten des Spannungsdeviators, \vec{g} = Schwerbeschleunigung. Als Randbedingungen der Aufgabe nehmen wir:

$$\xi = Z_1: \quad -\rho + \frac{\sigma_o}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} = 0, \quad \sigma_{\xi\tau} = \sigma_{\eta\tau} = 0, \quad T = T_1(\tau); \quad (1.2)$$

$$\xi = Z_2: \quad -\rho + \frac{\sigma_o}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} = -\frac{\rho_B}{\rho} Z_2, \quad \sigma_{\xi\tau} = \sigma_{\eta\tau} = 0, \quad T = T_2(\tau), \quad (1.3)$$

wobei T die auf den Druckschmelzpunkt bezogene Temperatur ist. Die Beziehungen (1.2) stellen die Bedingungen auf der freien, an die Luft grenzenden Oberfläche dar; die Beziehungen (1.3) sind die Bedingungen unter Wasser, sofern die Reibungskräfte der Wasserradhäsion vernachlässigt werden.

Die zweiten Bedingungen in (1.2) und (1.3) haben zur Folge, daß mit Genauigkeit bis auf Glieder höherer Ordnung keine horizontale Scherspannung in einem schwimmenden Gletscher auftritt; die horizontalen Spannungen sind dann äquivalent:

$$\sigma_{\xi\tau} = \sigma_{\eta\tau} = 0, \quad \sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\eta\eta}. \quad (1.4)$$

Infolgedessen ergeben sich unter Berücksichtigung der Horizontalität der Eisoberfläche aus dem Gleichungssystem (1.1) zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\rho + \frac{\sigma_o}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\rho + \frac{\sigma_o}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} \right) = 1. \quad (1.5)$$

Hierzu kommt noch die Inkompressibilitätsgleichung, die sich unter Berücksichtigung von (1.4) in der Form

$$2 \delta \epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\zeta\zeta} = 0, \quad (1.6)$$

schreibt, außerdem die Gleichung der Wärmeübertragung [1] unter Vernachlässigung der horizontalen Temperaturveränderung,

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{v_{\zeta}}{\delta} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \delta_c \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + N \epsilon_{ik} \sigma_{ik} \quad (1.7)$$

und die rheologischen Beziehungen (unter Verwendung eines Potenzgesetzes), die in dimensionaler Form

$$\tilde{\epsilon}_{ik} K \sigma^{n-1} \exp \left[-\chi \left(\frac{1}{T} - 1 \right) \right] \tilde{\sigma}_{ik} \quad (1.8)$$

zu schreiben sind. Dazu setzen wir noch die Ausdrücke für die Tensorkomponenten der Deformierungsrate

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi}; \quad \epsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial v_{\zeta}}{\partial \zeta}; \quad \epsilon_{ik} = 0 \quad i \neq k. \quad (1.9)$$

Da das Eis nicht zusammendrückbar ist, folgt aus der Gleichung (1.4)

$$\tilde{\sigma}_{\zeta\zeta} = -2 \tilde{\sigma}_{\xi\xi}. \quad (1.10)$$

Die kinetischen Bedingungen der Grenzverlagerungen haben die Form

$$\zeta = Z_1, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial \tau} = v_{\zeta} + \alpha_1, \quad (1.11)$$

$$\zeta = Z_2, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial \tau} = v_{\zeta} - \alpha_2, \quad (1.12)$$

wobei α_1 und α_2 die Zuwachsraten an der oberen und unteren Grenze sind. Die Gesamtheit der Gleichungen und Grenzbedingungen (1.5) — (1.12) stellt das vollständige Problem der Thermodynamik des schwimmenden Schelfgletschers dar.

2. Die Lösung der dynamischen Probleme

Die Integration der Gleichungen (1.5) unter Erfassung der ersten Grenzbedingungen (1.2) und (1.3) führt zu den Beziehungen

$$-p + \frac{\sigma_0}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} = f(\zeta), \quad -p + \frac{\sigma_0}{\rho g H} \sigma_{\zeta\zeta} = -(Z - \zeta).$$

Damit erhält man unter Verwendung von (1.10)

$$\sigma_{\zeta\zeta} = -\frac{2}{3} \frac{\rho g H}{\sigma_0} [(Z_1 - \zeta) + f(\zeta)], \quad \sigma_{\xi\xi} = -\frac{1}{2} \sigma_{\zeta\zeta}, \quad (2.1)$$

wobei f eine unbekannte Funktion des Arguments ζ ist.

Der Ausdruck für die Schubspannung ist unter Berücksichtigung von (1.10):

$$\sigma = \sqrt{3} \sigma_{\xi\xi}.$$

Betrachten wir jetzt die Bedingungen an der Kante, wo der Gletscher an das Wasser grenzt [1]

$$\xi = \overline{\xi}; \quad \sigma_{i\xi} = 0, \quad p - \frac{\sigma_0}{\rho g H} \sigma_{\xi\xi} = \begin{cases} 0, & T = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \zeta \leq Z_1, \\ T_2, & Z_2 \leq \zeta \leq 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.3)$$

wobei T_1 und T_2 die Temperaturen der Luft und des Wassers sind. Aus der zweiten Gleichung (1.4) erhält man unter Berücksichtigung von (1.10)

$$\xi = \begin{cases} \overline{\xi} & ; \sigma_{\xi\xi} = \frac{\rho g H}{\sigma_0} \begin{cases} Z_1 - \zeta, & 0 \leq \zeta \leq Z_1, \\ Z_1 - (1 - \frac{\rho}{\rho_B})\zeta, & Z_2 \leq \zeta \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.4)$$

Folglich entsteht am Gletscherrand eine horizontale Dehnungsspannung, die ihr Maximum

$$\frac{\rho g H}{3\sigma_0} (1 - \frac{\rho}{\rho_B}) Z \quad \sqrt{Z} = Z_1 - Z_2$$

an der Wasserlinie ($\zeta = 0$) erreicht und linear gegen O sowohl am oberen als auch am unteren Rand der Kante geht. Deshalb entsteht am Rand das Moment

$$\frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} \sigma_{\xi\xi}(\zeta) \zeta d\zeta,$$

das ausgeglichen wird durch die zusammengesetzte Spannung der Gletscherrandzone. In einiger Entfernung vom Rand ist die Spannung jedoch in einer Eisschicht so bestimmt, daß eine gleichmäßige Horizontalausbreitungsgeschwindigkeit der Eisplatte im Vertikalschnitt [2] gewährleistet ist:

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2\delta} \epsilon_3, \quad \epsilon_1 = \epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}, \quad (2.5)$$

Diese Geschwindigkeit ist in der ganzen Platte konstant und verändert sich nur während einer Veränderung der $Z = Z_1 - Z_2$. Die durchschnittliche Größe der Ausdehnungsspannung im Vertikalschnitt ergibt sich aus der Formel

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi} = -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{\zeta\zeta} = \frac{\rho g H}{6\sigma_0} (1 - \frac{\rho}{\rho_B}) Z \quad (2.6)$$

Aus den Bedingungen (1.11) und (1.12) folgt, daß unter der Bedingung (2) eines vertikalen Gleichgewichtes die vertikale Geschwindigkeit die folgende Abhängigkeit von der Vertikalkoordinate und den Zuwachsraten hat:

$$v_\zeta = \epsilon_3 \zeta + \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} \alpha_2 - \frac{\rho}{\rho_B} \alpha_1. \quad (2.7)$$

Aus der rheologischen Beziehung (1.8) erhalten wir

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{2\delta} \epsilon_3 = \epsilon_{\xi\xi} = \frac{\sigma_0^n H K}{v_0} 3^{n/2} \sigma_{\xi\xi}^n e^{-x\theta},$$

wobei $\theta = 1 - T$, $0 \leq \theta < 1$. Da ϵ_1 und ϵ_3 nicht von der ζ Koordinate abhängen, ist

$$\sigma_{\xi\xi} = C e^{x\theta}$$

Die Konstante C läßt sich leicht bestimmen, wenn man den Ausdruck für die durchschnittliche Vertikalspannung kennt (2.6). So gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= -\frac{1}{2} \sigma_{\zeta\zeta} = \frac{\rho g H}{6\sigma_0} (1 - \frac{\rho}{\rho_B}) Z^2 \left(\int_{Z_2}^{Z_1} e^{\frac{x}{n}\theta} d\zeta \right)^{-1} e^{\frac{x}{n}\theta} \\ \epsilon_1 &= -\frac{1}{2\delta} \epsilon_3 = \frac{(\rho g H)^n K H}{3^{3n/2} 2^n v_0} (1 - \frac{\rho}{\rho_B})^n Z^{2n} \left(\int_{Z_2}^{Z_1} e^{\frac{x}{n}\theta} d\zeta \right)^{-n}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Die Temperaturverhältnisse des Gletschers

Substitution in der Wärmeübertragungsgleichung (1.7) der Beziehungen (2.7), (2.8) und (2.9) führt für den stationären Fall zur Integro-Differentialgleichung

$$(-f_1 I^{-n} \zeta + \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2 - \frac{\rho}{\rho_B} a_1) \frac{d\theta}{d\zeta} = \delta_c \frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - f_2 I^{-(n+1)} e^{\frac{x}{n}\theta}, \quad (3.1)$$

wobei

$$I = \int_{Z_2}^{Z_1} e^{\frac{x}{n}\theta} d\zeta, \quad \delta_c = \frac{K}{\rho c v_o H},$$

$$f_1 = 2 \cdot 3^{(n-1)/2} \frac{KH}{\delta v_o} \left(\frac{\rho g H}{6}\right)^n \left(1 - \frac{\rho}{\rho_B}\right)^n Z^{2n} \quad (3.2)$$

$$f_2 = 2^{-(n+1)} 3^{-(n+1)/2} \frac{JHK}{\rho \delta c v_o T_o} (\rho g H)^{n+1} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_B}\right)^{n+1} Z^{2(n+1)}$$

Die Gleichung (3.1) beschreibt ein quasistationäres Temperaturfeld $T(\zeta, \tau) = 1 - \theta(\zeta, \tau)$ im Gletscher (insofern die dimensionslose Zeit τ parametrisch in die Gleichung eingeht).

Die Temperaturgrenzbedingungen folgen aus (1.2) und (1.3)

$$\zeta = Z_1(\tau), \quad \theta = 1 - T_1(\tau) = \theta_1(\tau); \quad (3.3)$$

$$\zeta = Z_2(\tau), \quad \theta = 1 - T_2(\tau) = \theta_2(\tau); \quad (3.4)$$

Die Lösungsmethode der Randwertaufgabe (3.1), (3.3), (3.4) beruht darauf, daß die Größe δ_c für Schelfgletscher sehr gering ist:

$$\delta_c \ll 1, \quad f_1 = O(1)$$

Infolgedessen gehört diese Aufgabe zur Klasse der singulären Grenzaufgaben, deren Lösungsmethoden gut genug erforscht sind [3]. Wir werden eine Lösung der Gleichung (3.1) getrennt für die Haupteisgebiete suchen, wobei von einer Entwicklung der Lösung in eine Reihe nach dem kleinen Parameter δ_c ausgegangen wird

$$\theta = \theta_0 + \delta_c \theta_1 + \delta_c^2 \theta_2 + \dots \quad (3.5)$$

mit der Grenzbedingung (3.3) und für die Grenzschicht mit der Grenzbedingung (3.4). Wo die Grenzschicht an das äußerste Gebiet anschließt, müssen die Lösungen in Übereinstimmung gebracht werden. Wir führe nun den Lösungsprozeß vor.

Vor allem muß bemerkt werden, daß die Temperaturverteilung mit der Tiefe wesentlich von den Stromlinien abhängt; mit anderen Worten: die Lösung der Aufgaben (3.1), (3.3), (3.4) hängt von den Beziehungen zwischen den Größen ab, die in den Ausdruck (2.7) für die Geschwindigkeit eingehen. Es sind 2 Varianten der vertikalen Geschwindigkeitsveränderung mit der Tiefe möglich:

$$v_\zeta < 0, \quad Z_2 \leq \zeta \leq Z_1 \quad (3.6)$$

$$v_\zeta \geq 0, \quad Z_2 \leq \zeta \leq \zeta_*; \quad v_\zeta < 0, \quad \zeta_* \leq \zeta \leq Z_1 \quad (3.7)$$

A) Fall (3.6) bedeutet, daß die untere Gletscherfläche im Schmelzen begriffen ist ($a_2 < 0$, $\varepsilon_3 Z_2 < \rho a_1 / \rho_B$). Der Einsatz von (3.5) in Gleichung (3.1) nach Zusammenstellung

ähnlicher Glieder mit den gleichen Potenzen von δ_c ergibt eine Folge von Differenzialgleichungen

$$U \frac{d\theta_0}{d\zeta} = f_2 I^{-(n+1)} e^{\frac{x}{n}} \theta_0,$$

$$-U \frac{d\theta_i}{d\zeta} = \frac{d^2 \theta_{i-1}}{d\zeta^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

wobei

$$U = f_1 I^{-n} \zeta + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2;$$

aus der Bedingung (3.6) folgt, daß $U > 0$. Die Grenzbedingungen für das System (3.8) sind

$$\zeta = Z_1; \quad \theta_0 = \theta_1(\tau), \quad \theta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Für die Nullannäherung nimmt die Lösung daher die Form

$$\theta_0 = \frac{n}{x} \ln \left[e^{-\frac{x}{n} \theta_1} - \frac{x}{n} \ln \frac{f_1 I^{-n} \zeta + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2}{f_1 I^{-n} Z_1 + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2} \right]^{-1} \quad (3.10)$$

an. Da $\zeta \leq Z_1$ ist, ist es klar, daß bei Abnahme von ζ , die Größe θ_0 wächst, d. h. die Temperatur steigt von der oberen zur unteren Grenzfläche.

Die Gesamtheit der Lösungen der Differenzialgleichungen (3.8), die zusammen die Entwicklung (3.5) ergeben, genügt nicht der Grenzbedingung (3.4). Daher muß in der Nähe der Grenze $\zeta = Z_2$ unbedingt eine Grenzschicht mit großem Temperaturgradienten entstehen, an deren Unterseite die Temperatur der Bedingung (3.4) genügt.

Um „steuernde Glieder“, d. h. Ausdrücke mit Ableitungen zu erhalten, führen wir die Grenzschicht auf folgende Weise ein:

$$x_* = \frac{\zeta - Z_2}{\delta_c}. \quad (3.11)$$

Betrachten wir die innere Reihenentwicklung:

$$\theta = g_0(x_*) + \delta_c g_1(x_*) + \delta_c^2 g_2(x_*) \dots \quad (3.12)$$

Durch (3.11) sind folgende Beziehungen gerechtfertigt:

$$\zeta = x_* \delta_c + Z_2; \quad \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\delta_c} \frac{d}{dx_*}; \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} = \frac{1}{\delta_c^2} \frac{d^2}{dx_*^2}.$$

Einsetzen der Gleichung (3.12) in (3.1) mit Berücksichtigung der Differenzierbarkeit führt nach der Einführung ähnlicher Glieder zu einer Folge von Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
-U_* \frac{dg_0}{dx_*} &= \frac{d^2g_0}{dx_*^2}, \\
-U_* \frac{dg_1}{dx_*} - f_1 I^{-n} x_* \frac{dg_0}{dx_*} &= \frac{d^2g_1}{dx_*^2} - f_2 e^{\frac{x}{n}} g_0, \\
U_* \frac{dg_i}{dx_*} + \frac{d^2g_i}{dx_*^2} &= f_1 I^{-n} x_* \frac{dg_{i-1}}{dx_*}, \quad i = 2, 3, \dots
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

wobei
$$U_* = f_1 I^{-n} Z_2 + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2 > 0.$$

Die Grenzbedingungen für diese Folge von Gleichungen ist unmittelbar aus den Bedingungen (3.4) unter Berücksichtigung von (3.11) herzuleiten:

$$x_* = 0; \quad g_0 = \theta_2(\tau) = 1 - T_2(\tau), \quad g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3.14}$$

Für die Nullannäherung ergibt sich die Lösung als

$$g_0 = C_1 e^{-U_* x_*} + C_2.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus der Grenzbedingung bei $X_* = 0$, ebenso wie die Bedingung des „Anpassens“ der Entwicklungen (3.5 und 3.12); dieses Anpassen läßt sich in seiner einfacheren Form gliedweise über die innere Grenze ausführen. Die Übergangstellen für die Nullglieder der Entwicklungen haben die Form:

$$g_0(\infty) = \theta_0(Z_2). \tag{3.15}$$

Die Bedingungen (3.14) und (3.15) ergeben die endgültige Lösungsform der Aufgaben (3.1) — (3.4) in erster Annäherung als

a) im Gebiet der Grenzschicht der Größenordnung δ_c

$$g_0 = [\theta_2(\tau) - \theta_0(Z_2, \tau)] e^{-U_* x_*} + \theta_0(Z_2, \tau); \tag{3.16}$$

b) im Hauptteil des Gletschers ergibt sich die Lösung aus der Beziehung (3.10). Die Lösung (3.10), (3.16) ist genau bis auf Glied der Größenordnung δ_c und mehr. Man kann diese Berechnung genauer aus den entsprechenden Gleichungssystemen (3.8), (3.15) machen. Die den Gleichungen (3.10), (3.16) entsprechende Temperaturkurve ist in Abb. 2 gezeigt.

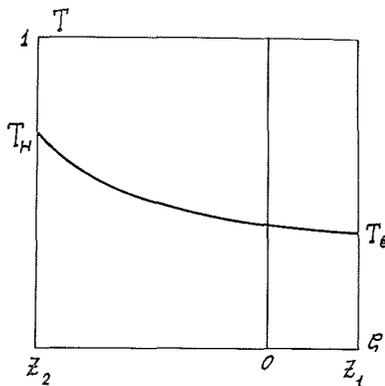


Abb. 2: Die Temperaturverteilung im Eisschelf mit der Tiefe unter der Annahme von Schmelzen an der Unterseite.

Fig. 2: Temperature distribution in an ice shelf assuming bottom melting.

B) Fall (3.7) bedeutet, daß auf der Gletscherunterseite Eis anfriert

$$(a_2 > 0, \rho a_1 / \rho_B < \epsilon_3 Z_2).$$

Innerhalb der Eisschicht existiert eine Linie, bei deren Überschreitung die Vertikalgeschwindigkeit ihr Vorzeichen ändert. Daraus ergeben sich 2 Reihenentwicklungsgebiete (3.5); im oberen $\zeta_* \leq \zeta \leq Z_1$ hat die Lösung θ_0 die Form (3.10), im unteren entsprechend

$$\theta_0 = \frac{n}{x} \ln \left[e^{-\frac{x}{n} \theta_2} + \frac{x}{n} \frac{f_2}{f_1 I} \ln \frac{f_1 I^{-n} \zeta + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2}{f_1 I^{-n} Z_2 + \frac{\rho}{\rho_B} a_1 - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2} \right]^{-1}, \quad (3.17)$$

$$Z_2 \leq \zeta \leq \zeta_*.$$

Von der Unterseite bis ζ_* steigt also die Temperatur, von ζ_* nach Z_1 sinkt sie. Das Anpassen der Zweige (3.10) und (3.17) wird erreicht mit Hilfe der Grenzschicht

$$\tilde{x} = \frac{\zeta - \zeta_*}{\delta_c^{1/2}}. \quad (3.18)$$

Da innerhalb der Grenzschicht die Funktion U die Entwicklung

$$U = (\zeta - \zeta_*) U_1 + (\zeta - \zeta_*)^2 U_2 + \dots, \quad U_1 > 0,$$

hat, führt eine Entwicklung der Art (3.12) in (3.1) unter Berücksichtigung von (3.18)

und der Differenzialbeziehungen $\frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{\delta_c^{1/2}} \frac{d}{d\tilde{x}}, \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} = \frac{1}{\delta_c} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2}$, sowie von (2.7) zum Gleichungssystem

$$\frac{d^2 h_0}{d\tilde{x}^2} - \tilde{x} \epsilon_3 \frac{dh_0}{d\tilde{x}} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 h_i}{d\tilde{x}^2} - \tilde{x} \epsilon_3 \frac{dh_i}{d\tilde{x}} = \begin{cases} f_2 I^{-(n+1)} e^{\frac{x}{n}} h_0, & i=1 \\ 0, & i>1 \end{cases}$$

Für die Nullannäherung hat die Lösung die Form

$$h_0(\delta_c, \tilde{x}) = B_1 \operatorname{erf} \left(I^{-\frac{n}{2}} f^{1/2} \tilde{x} \right) + B_2. \quad (3.20)$$

Die Konstanten B_1 und B_2 werden durch die Anpassungsbedingungen der Zweige (3.10) und (3.17) an der inneren Grenze entlang bestimmt [3]. Die Tiefenkurve der Temperatur ist in Abb. 3 dargestellt. Nachdem die Temperaturfunktion bestimmt ist, kann die

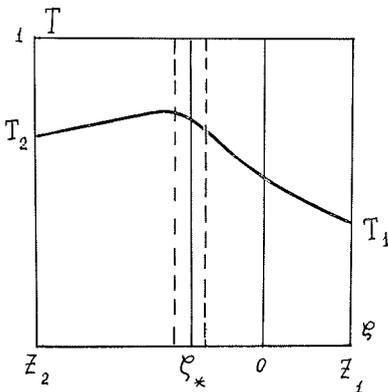


Abb. 3: Die Temperaturverteilung im Eisschelf bei Annahme von Anfrieren an der Unterseite.
Fig. 3: Temperature distribution in an ice shelf assuming bottom freezing.

Größe I aus der transzendenten Gleichung ableiten, die man durch Einsatz der Beziehungen (3.10) oder (3.17) in die erste der Gleichungen (3.2) erhält

$$I = \int_{Z_2}^{Z_1} e^{\frac{\zeta}{H}} \theta \, d\zeta. \quad (3.21)$$

4. Die Bedingungen der thermodynamischen Stabilität des Gletschers

Aus Vergleichen der vorgelegten Resultate (Abb. 2 und 3) mit den vorhandenen Daten folgt, daß die Temperaturverteilung der Mehrzahl der äußeren Schelfeisgletscher mit dem Fall A des vorangehenden Abschnitts übereinstimmt. Das bedeutet, daß die vertikale Fließgeschwindigkeit des Eises entsprechend der Beziehung (3.6) Eisteilchen von der Oberfläche durch die ganze Dicke zur Unterseite überführt. Die dabei befreite Wärme der inneren Reibung überträgt sich mit dieser Advektionsgeschwindigkeit von den oberen zu den unteren Schichten. Da der Koeffizient der dissipativen Wärmeabsonderung durch innere Reibung äußerst klein ist (bei $K = 0.15 \text{ cm}^2 \text{ Jahr}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $v_0 = 10^3 \text{ cm} / \text{Jahr}$, $\sigma_0 = (0.5-1) \text{ kg/cm}^2$, $q/q_0 = 0.92$, $J = 42.7 \text{ kg cm/kal}$, $H = \frac{2}{3} 10^4 \text{ cm}$ [4], erhält man $f_2 \sim 10^{-4}$), ist der Temperaturgradient in dem Haupteiskörper ebenfalls unbedeutend. Er wächst wesentlich in der Bodenschicht²⁾. Ein solches Gletscherverhalten kann als stabil angesprochen werden, da es keine Gletscherschwankungen mit erhöhter Temperatur hervorruft.

Konkreter läßt sich der Transportweg der inneren Reibungswärme an den Stromlinien bestimmen; dafür haben wir entsprechend (2.5), (2.7) folgendes Verhältnis:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = - \frac{\epsilon_3 \zeta - \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2 - \frac{\rho}{\rho_B} a_1}{\frac{1}{2\delta} \epsilon_3 \xi - v_\xi(0)}. \quad (4.1)$$

Daraus erhält man die Gleichung der Stromlinien:

$$\zeta = \frac{A}{\left[\frac{1}{2\delta} \xi - \frac{1}{\epsilon_3} v_\xi(0) \right] 2\delta} - \frac{1}{\epsilon_3} \left(\frac{\rho_B - \rho}{\rho_B} a_2 - \frac{\rho}{\rho_B} a_1 \right), \quad (4.2)$$

wobei A eine Konstante ist und ϵ_3 aus (2.9) bestimmt wird. Ein Bild der Stromlinien — unter Berücksichtigung von (3.6) — zeigt Abb. 4.

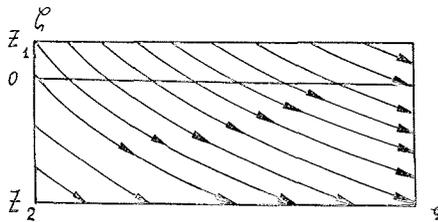


Abb. 4: Stromlinien im Eisschelf nach Fall A (3.6).
Fig. 4: Streamlines in an ice shelf according to case A (3.6).

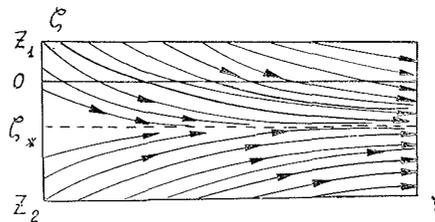


Abb. 5: Stromlinien im Eisschelf nach Fall B (3.7).
Fig. 5: Streamlines in an ice shelf according to case B (3.7).

¹⁾ Wie in (3.13) vernachlässigen wir bei der Nullannäherung den Effekt der Wärmeleitung in der Grenzschicht selbst.

²⁾ In strengem Sinne folgt, daß sich von den Gletschergrenzen relativ dünne Eisschichten absondern, wo grundlegende jahreszeitliche Temperaturschwankungen vorkommen und Phasenübergänge stattfinden.

In den Gletscherteilen, in denen es einen horizontalen Temperaturgradienten gibt, können laterale Temperaturfluktuationen durch advektive Wärmeübertragung auftreten. Der Fall B des vorigen Kapitels, welcher der Beziehung (3.7) entspricht, bedeutet einen instabilen Zustand des Schelfgletschers. In der Tat überträgt sich die abgesonderte Wärme zu der inneren Fläche $\zeta = \zeta_*$, auf der die vertikale Geschwindigkeit 0 ist (die entsprechenden Stromlinien zeigt Abb. 5). So ist die Fläche $\zeta = \zeta_*$ des Vorzeichenwechsels von v_ζ eine Fläche, auf der sich die in der gesamten Eisdicke abgesonderte Wärme ansammelt. Obwohl der Koeffizient der inneren Reibungswärmeerzeugung, wie schon oben bemerkt, überaus gering ist, so kann sich jedoch der summierte Effekt der Wärme„auswahl“ im Laufe eines größeren Zeitraumes und in der ganzen Eisdicke als bedeutsam für die relativ enge Zone in der Umgebung von $\zeta = \zeta_*$ erweisen. Infolgedessen liegt bei den in diesem Abschnitt aufgezeigten Parameterbedeutungen die Wärmeerzeugung eines cm^3 Eises im Mittel in der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-2} cal/Jahr. In der engen Wärmeansammlungszone mit einer Dicke von nur einigen Dezimetern aus einer Eisschicht von beispielsweise 100 m Dicke werden 0,1 bis 1 cal/Jahr je cm^3 abgesondert. Bei einer spezifischen Wärme des Eises von $0,4 \text{ cal/cm}^3$ reicht diese Wärme dazu aus, in einigen Jahren die Temperatur in der Wärmeansammlungszone bis zum Schmelzpunkt zu erhöhen und damit den Phasenübergang Wasser — Eis einzuleiten. Die Rolle der Wärmeabführung durch Leitung aus der Ansammlungszone ist vergleichsweise gering: Bei einem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten $k \sim 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{Jahr} \cdot \text{sec}}$, einer spezifischen Wärme von $\bar{c} \sim 0,45 \text{ cal/g}$ und einer Dichte von $\rho = 0,9\text{—}0,92 \text{ g/cm}^3$ beträgt der effektive Radius der Wärmeleitung für ein Jahr

$$r_{\text{cond}} = \sqrt{\frac{k}{\rho c} t} \sim 1 \text{ bis } 2 \text{ m} \quad (4.3)$$

Aber die Wärmeadvektion ist gegen die Wärmeleitung gerichtet und versiegelt die Wärme innerhalb der Grenzen der Ansammlungszone; der Effekt der Wärmeleitung verschwindet fast völlig, weil der Radius des advektiven Wärmetransports

$$r_{\text{conv}} = vt \quad (4.4)$$

ist und bei $v \sim (1 \text{ bis } 2) \text{ m/Jahr}$, $r_{\text{cond}} \sim r_{\text{conv}}$ ungefähr gleich groß sind.

Die Dicke der Ansammlungszone bestimmt sich aus der Äquivalanz der Wärmetransporte durch Leitung und Advektion und ist, wie schon erwähnt, einige Dezimeter breit.

Die Temperaturbedingungen von Schelfgletschern wurden auch von ZOTIKOV [5] behandelt. Jedoch wurde dort nur die Temperaturverteilung nach der Tiefe analysiert, ohne Betrachtung der Eisdynamik — die vertikale Geschwindigkeit in der Wärmeübertragungsgleichung wurde parametrisch vorgeschrieben — und ohne Berechnung der Wärmeentwicklung.

In derselben Arbeit [5] wurde ein ziemlich unerwarteter Schluß über die Möglichkeit einer der Oberfläche entgegengesetzten Eisbewegung gezogen, das sog. S-förmige Temperaturfeld. Das widerspricht, wie oben gezeigt, der physikalischen Realität der Wärmeansammlung. Der Grund für die fehlerhafte Folgerung in [5] liegt vor allem in der Vernachlässigung der inneren Wärmeerzeugung, die bei der Analyse eines quasistationären Feldes nicht gestattet ist. Infolgedessen fehlt auf dem Diagramm mit der S-förmigen Temperaturkurve das unerläßliche Maximum in der Umgebung des Punktes, welcher der neutralen Fläche entspricht. Tatsächlich erhält man als Temperaturgradienten bei Vorhandensein von inneren Wärmequellen q , die gleichmäßig über die Gletscherdicke verteilt sind, nach Formel (80) der Arbeit [5], unter Berücksichtigung des Ausdrucks für die Massenübertragung im Fall B

$$W(\bar{z}) = -w_B \left[(n+1)\bar{z} - n \right], \quad \bar{z} = \frac{z}{H},$$

(w_B und w_H sind die absoluten Größen der Geschwindigkeit auf der Gletscherober- und -unterseite, $n = w_H / w_B$), den Ausdruck

$$\begin{aligned} \phi(\bar{z}) &= \frac{\sqrt{\kappa} \exp \left[\frac{pb}{2} (n+1) \left(\bar{z} - \frac{n}{n+1} \right)^2 \right]}{2 \sqrt{\frac{pb}{2} (n+1)}} \frac{dT}{d\bar{z}} = \\ &= \frac{T_1 - T_2 - \frac{2\bar{q}}{pb(n+1)} \left[E \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right) + E \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right]}{\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\kappa} \bar{q}}{pb(n+1)} I \left[\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \sqrt{n+1} \left(\bar{z} - \frac{n}{n+1} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei
$$pb = \frac{w_B H \rho c}{\lambda}, \quad \bar{q} = \frac{qH^2}{\lambda}, \quad I(y) = \int_0^y e^{z^2} dz, \quad E(y) = \int_0^y e^{-z^2} I(z) dz.$$

Mit den vorher angegebenen Werten der hier eingehenden Parameter erhalten wir $pb = 5 + 25$, $q = 2,5 + 20$, so daß $q/pb \equiv (0,5 + 1,2)^0$ ist. Da bei $z < 1$ die Funktion $I(z)$ außerordentlich schnell ansteigt, erhalten wir hier für Gletscher von hinreichender Dicke (mehrere Hektometer) bedeutende Werte von pb ; aber dann wird das Vorzeichen der Ableitung $dT/d\bar{z}$ durch den letzten Summanden in (4.5) bestimmt. Bei $n \approx 1$ (die vertikale Geschwindigkeit geht auf 9 etwa im mittleren Teil der Eisschicht) ergibt sich auf den Gletschergrenzflächen:

$$a) \quad \bar{z} = 0, I \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right) \gg 1, \text{ d.h. } \frac{dT}{d\bar{z}} > 0,$$

$$b) \quad \bar{z} = 1, I \left(\sqrt{\frac{pb}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \gg 1, \text{ d.h. } \frac{dT}{d\bar{z}} < 0.$$

Folglich ähnelt die Tiefenverteilungskurve der Temperatur der in Abb. 3 dargestellten. Auf ihr fällt das Maximum etwa in die Umgebung der Ebene $z = n / (n + 1)$, des Vorzeichenwechsels der vertikalen Eisgeschwindigkeit.

Bei einer langen Lebenszeit (Dauer der Eiswanderung durch den Gletscher) muß Schmelzen des Eises in der Wärmeansammlungszone auftreten. Da das Wasser nicht abfließen kann, müßte in dieser Zone eine Wasserschicht entstehen; das ist aber unvereinbar mit der Stabilität eines Gletschers, der z. B. Biegungsspannungen durch lange Wellen ausgesetzt ist. Daraus folgt, daß der Gletscheroberfläche entgegengesetzte Eisbewegungen in nahezu flachen Platten mit parallelen Seiten unmöglich sind. Das Anfrieren des Eises am unteren Rand des Schelfgletschers ist immer mit einer bedeutsamen Änderung der Eisdicke und der Grenzbedingungen in Längsrichtung verbunden, die dann den Zustand des Gletschers wesentlich verändern.

Folgerungen

Das oben Gesagte läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Kein Modell eines Schelfgletschers ist mit Isothermie vereinbar. Der Temperaturgradient spielt eine wesentliche Rolle in der Dynamik.
2. Das Schelfgletschermodell muß unbedingt den Massenhaushalt auf den Gletschergrenzflächen in Betracht ziehen.
3. Das Verhältnis zwischen den grundlegenden Kennzahlen des Gletschers — Zuwachsrates auf der oberen und unteren Grenzfläche sowie Eisdicke — muß eine verhältnismäßig gleichmäßige Richtung der Advektionsgeschwindigkeiten von oben nach unten bedingen. Dann wird das thermodynamische Regime des Gletschers stabil sein.

Literatur

- [1] Grigorjan, S. S., Krass, M. S. und Šumskij, P. A.: Matematičeskie modeli osnovnych tipov lednikov. [Mathematische Modelle der Gletschergrundtypen.] Tr. Instituta mehaniki MGU, Bd. 47, 1976.
- [2] Weertman, J.: Deformation of floating ice shelves. J. of Glaciology, vol. 3, no. 21, 1957.
- [3] Cole, J. D.: Perturbation Methods in Applied Mathematics. California Institute of Technology. Blaisdell Publishing Co. Waltham, Mass., Toronto, London, 1968.
- [4] Šumskij, P. A.: Dinamičeskaja gljaciologija. 1, Itogi nauki, Gidrologija suši. Gljaciologija. [Dynamische Glaziologie. 1. Hydrologie der Trockenheit, Glaziologie.] M., 1969.
- [5] Zotikov, J. A.: O temperaturach v tošče lednikov Antarktidy. [Temperaturen im Innern der Gletscher der Antarktiden.] „Antarktika“, izd.-vo AN SSSR, 1963.