

# Zeitreduktion geodätischer Beobachtungen auf fließendem Eis durch Interpolation von Strain-Parametern

Von Martin Köhler\*

**Zusammenfassung:** Geodätische Messungen (Richtungs- und Azimutbeobachtungen, Streckenmessungen) auf fließendem Eis beziehen sich auf ihren Beobachtungszeitpunkt; d. h. der beobachtete Wert gilt nur für diesen Zeitpunkt. Wird auf beweglichem Untergrund ein geodätisches Netz angelegt und beobachtet, so sind die Messungen vor einer gemeinsamen Ausgleichung auf einen Bezugszeitpunkt zu reduzieren. Es wird ein Verfahren zur Zeitkorrektur vorgestellt, das auf der Strainanalyse basiert. Strain-Parameter im gesamten Netz können durch Interpolation abgeleitet werden. Hiermit wird es möglich, alle Beobachtungselemente, auch wenn sie nur einfach gemessen wurden, zeitlich zu korrigieren. Der Vorteil gegenüber bekannten Verfahren besteht darin, daß nur Beobachtungen einer Messungsperiode zur Reduktion benötigt werden. Das Verfahren ist beschränkt auf den zweidimensionalen Fall und wird an einem kleinen Lagenetz im Bereich der Georg von Neumayer-Station in der Antarktis getestet.

**Summary:** Geodetic measurements (directions, azimuths, distances) on moving ice have a close relation to their observation dates. They only hold their values at this moment. If a geodetic network on moving ground is established and observed, the measurements should be reduced to a fixed date. A new „reduction to epoch“-procedure on the basis of strain-analysis is presented. Strain-parameters all over the network can be deduced by interpolation. In this way it will be possible to reduce all observations to the epoch, even if they are only measured once. The advantage in relation to the well-known procedures is that only observations of one epoch are used. The procedure is limited to the two-dimensional case and tested within a small network near the „Georg von Neumayer-Station“, Antarctica.

## 1. PROBLEMSTELLUNG

Die Anlage geodätischer Messungen auf beweglichem Untergrund erfordert anders als auf festem Boden die Beachtung der zeitlichen Komponente. Soll auf einer fließenden Eismasse — einem Gletscher, einem Inland- oder einem Schelfeis — ein Lagenetz beobachtet werden, so ist zu berücksichtigen, daß die Bewegung von Stand- und Zielpunkten schnell Einfluß auf die Messungsgrößen gewinnt. Maßgebende Faktoren hierbei sind die Größe der Fließ- bzw. Verformungsgeschwindigkeit des Eises, der Umfang des Netzes, die Länge der Meßperiode, die Meßgenauigkeit und die Genauigkeitsanforderungen an die Ergebnisse.

Ein Beispiel: In dem zu untersuchenden Gebiet sei mit einer Verformungsrate von + 15 ppm/Tag zu rechnen. Die Streckenmeßgenauigkeit betrage  $\pm 5$  mm. Innerhalb von nur 8 Stunden hat dann der systematische Fehler aus der Verzerrung bei einer 1 km langen Strecke die Größenordnung der Meßgenauigkeit. Soll diesem Umstand Rechnung getragen werden, so bestehen, wenn die Meßgenauigkeit erhalten bleiben soll, zwei Möglichkeiten. Die Figur wird so klein gewählt, daß sie in diesem Zeitraum ausgemessen werden kann, oder alle Beobachtungen müssen auf einen Bezugszeitpunkt reduziert werden.

Kleinere Figuren finden nur bei örtlichen Strain-Untersuchungen Anwendung. Im Allgemeinfall wird daher angestrebt werden müssen, die Messung so anzulegen, daß aus den Beobachtungen Zeitkorrekturen gerechnet werden können.

## 2. BISHERIGE ANSÄTZE ZUR ZEITKORREKTION

Ansätze zur Zeitkorrektur liegen schon seit langem vor, z. B. SWITHINBANK (1958), SECKEL (1974). Grundlegend ist die Arbeit von DORRER et al. (1971). Voraussetzung aller Verfahren ist, daß eine in

\* Dipl.-Ing. Martin Köhler, Institut für Vermessungskunde der Technischen Universität, Pockelsstraße 4, 3300 Braunschweig.

zwei Meßepochen beobachtete Figur vorliegt. SWITHINBANK (1958) behandelt den Allgemeinfall eines geodätischen Netzes und bestimmt zeitkorrigierte Beobachtungen durch Interpolation der einzelnen Messungselemente auf je einen Bezugszeitpunkt pro Meßepoche. Die anderen Autoren gehen vom Spezialfall des Polygonzuges aus und entwickeln Formeln sowohl für die Reduktion der Beobachtungen, als auch für die Reduktion der Punktlagen (DORRER et al. 1971) bzw. kombinieren beide Verfahren (SECKEL 1974).

In allen Verfahren muß jedes Meßelement in beiden Kampagnen vorliegen. Darin liegt ein großer Nachteil, besonders bei wiederholten Beobachtungen von Netzen. Denn es ist normal, daß z. B. wegen logistischer Schwierigkeiten oder aus Zeitgründen bei der Wiederholungsmessung einzelne Beobachtungen ersatzlos wegfallen. Oder es gehen Punkte verloren, und Ersatzpunkte müssen geschaffen werden. In diesen Fällen liegen die entsprechenden Elemente nur einfach beobachtet vor und können nicht direkt reduziert werden. Nachteilig kann sich auch auswirken, daß die Zeitkorrektur aus zeitlich weit auseinander liegenden Messungen abgeleitet wird. Die bei nur zwei Stützpunkten notwendige Annahme einer linearen Bewegung zwischen den Messungen führt zu fehlerhaften Korrekturen, wenn der tatsächliche Bewegungsablauf nicht linear ist.

Einen ganz anderen Weg versuchen WAGER et al. (1980). Sie verzichten auf eine Zeitkorrektur und führen alle Beobachtungen einer oder mehrerer Kampagnen einer Ausgleichung zu, wobei jeder Beobachtung der Messungszeitpunkt beigeschrieben wird. Als Unbekannte treten neben den Koordinatenzuschlägen, die nunmehr aber auf einen Zeitpunkt  $T_0$  bezogen werden, noch Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen der Punkte längs der Koordinatenachsen auf.

Damit Konfigurationsdefekte vermieden werden, müssen jedoch einige Voraussetzungen erfüllt sein (siehe hierzu z. B. HEER & LEONHARD 1981). Beim Ansatz von Geschwindigkeiten für einen Punkt muß dieser zu mindestens zwei, bei Beschleunigungen zu drei Zeitpunkten geometrisch gut bestimmt sein. Überbestimmungen für Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung sind dann jedoch noch nicht vorhanden.

Alle Punkte, die nicht zu verschiedenen Zeitpunkten angemessen wurden, werden nach WAGER et al. (1980) als statisch angesehen. Für sie werden in der Ausgleichung also nur die Koordinatenunbekannten bezogen auf  $T_0$  angesetzt. Sofern es sich nicht um echte Festpunkte handelt, besteht dann jedoch die weitere Bedingung, daß alle diese einmaligen Beobachtungen zum gleichen Zeitpunkt ausgeführt wurden. Ist dies nicht der Fall, so treten als Folge unerwünschte Spannungen und Verbiegungen in der Netzgeometrie auf.

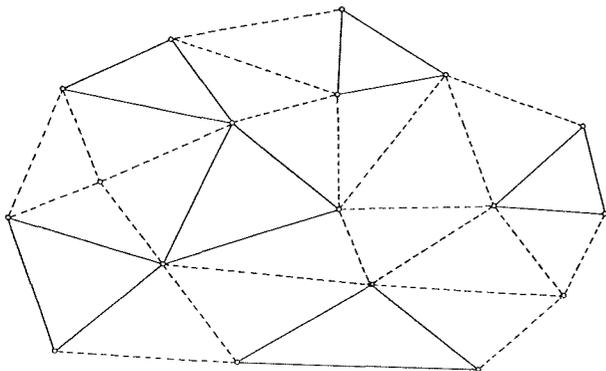
### 3. ENTWICKLUNG EINES NEUEN ZEITREDUKTIONSMODELLS

Ein neues Verfahren zur Zeitkorrektur soll folgenden Anforderungen genügen:

- Nur Messungen aus einer Kampagne werden zur Korrektur herangezogen, damit eine Abweichung von der als linear angenommenen Bewegung bzw. Verformung nur vernachlässigbar kleine Auswirkungen hat.
- Einfach bestimmte Messungselemente müssen reduziert werden können.
- Das Modell soll für beliebige Netzkonfigurationen einsetzbar sein.

Das nachstehend entwickelte Verfahren basiert auf der Strain-Analyse. Bei dieser wird im ebenen Fall die Verzerrung in Punkten einer Fläche durch die Verformungsgeschwindigkeiten entlang der Hauptachsen der Verformung angegeben. Daraus lassen sich Verformungsraten in beliebigen Richtungen ableiten. Minimalfigur zur Berechnung ohne Überbestimmung ist das Dreieck.

Das Verfahren läuft dann in drei Schritten ab:



--- einfach beobachtete Strecken  
 — doppelt beobachtete Strecken

**Abb. 1a:** Stützpunktdreiecke in einem geodätischen Lagenetz.

**Fig. 1a:** Data point triangles in a geodetic network.

a) Bestimmung von Strain-Parametern in einzelnen ausgewählten Dreiecken:

Soll ein trigonometrisches Netz (Abb. 1a) ausgemessen werden, bieten sich hierfür Dreiecke am Rand und in der Mitte der Figur an. Die Seiten dieser Dreiecke werden zweimal mit ausreichendem Zeitabstand, am besten — jedoch nicht notwendigerweise — zu Beginn und am Ende der Kampagne gemessen. Für die Schwerpunkte der Dreiecke (Stützpunkte) lassen sich dann daraus zeitlich normierte Strain-Parameter berechnen.

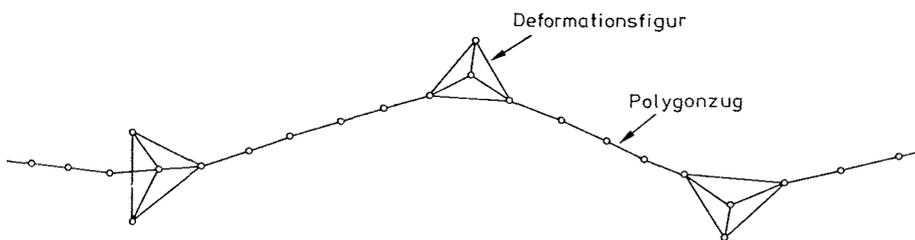
Sofern dem keine logistischen Schwierigkeiten entgegenstehen, ist dies in ähnlicher Form auch für Polygonzüge möglich (Abb. 1b). An allen markanten Knickpunkten oder an augenscheinlichen Unstetigkeitsstellen bzw. Maximalwerten im Verformungsverhalten des Eises (z. B. Spaltenschwärme) werden Dreiecke oder kleine Deformationsfiguren (z. B. Dreieck mit Zentralpunkt) angelegt, die dann auch zweimal pro Kampagne zu beobachten sind.

b) Bestimmung von Interpolationsfunktionen für die Strain-Parameter:

Mit den in den Stützpunkten bekannten Parametern können mit Hilfe der Ausgleichsrechnung Interpolationsfunktionen gefunden werden. Je nach Anzahl der Stützpunkte besteht dabei die Wahl zwischen linearen, quadratischen oder kubischen Ansätzen. Als Kriterium für den besten Ansatz gilt der minimale Gewichtseinheitsfehler der Ausgleichung.

c) Berechnung der Zeitkorrekturen:

Mit Hilfe der Interpolationsfunktionen ist es möglich, in allen Punkten des Netzgebietes Strain-Parameter anzugeben. Der Richtung des jeweiligen Meßelementes entsprechend lassen sich aus den Verformungsgeschwindigkeiten entlang der Hauptachsen die wirksamen Verzerrungsraten ableiten. Damit ergeben sich bei Berücksichtigung der Zeitdifferenzen zwischen Meßdaten und Bezugsdatum die Zeitkorrekturen.



**Abb. 1b:** Stützpunktdreiecke in einem Polygonzug.

**Fig. 1b:** Data point triangles in a geodetic traverse.

### 3.1. Strainanalyse durch Affintransformation

Die Berechnung der Hauptachsen der Eisverformung und der Verformungsgeschwindigkeiten entlang dieser Achsen durch die Affintransformation bringt gegenüber dem in der glaziologischen Literatur üblichen Ansatz (z. B. ZUMBERGE 1964) einige Vorteile mit sich (KÖHLER 1981):

- Unabhängigkeit von einer bestimmten Netzform,
- Berücksichtigung von Strecken- und Richtungsmessungen,
- bei Überbestimmung stehen Restklaffungen als Beurteilungskriterium für die Modellanpassung zur Verfügung.

Eingangsgrößen für die Transformation sind die Punktkoordinaten beider Messungszeitpunkte einer Beobachtungskampagne. Hierzu ist es vollkommen ausreichend, Näherungskoordinaten im gesamten Netz mit den nicht zeitkorrigierten Beobachtungselementen zu berechnen, wobei die Koordinaten der Stützpunktdreiecke nur durch die entsprechenden Streckenmessungen bestimmt seien.

Die lineare Affinität zwischen den Koordinaten  $x_i, y_i$  der ersten und  $x'_i, y'_i$  der zweiten Messung wird durch die Transformationsfunktionen

$$x'_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i \quad (1)$$

$$y'_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i$$

hergestellt. Die Hauptverformungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  ergeben sich aus den in der Affintransformation berechneten extremen Maßstabsverzerrungen  $m_1$  und  $m_2$  zu

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= m_1 - 1 \\ \epsilon_2 &= m_2 - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Nach WOLFRUM (1978) lassen sich diese Maßstabs- oder Streckenverzerrungen darstellen durch

$$m_{1,2} = \frac{\bar{r} + \bar{t}}{2} \pm \sqrt{(\bar{r} - \bar{t})^2 + 4\bar{s}^2} \quad (3)$$

mit ihren Richtungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2\bar{s}}{\bar{r} - \bar{t}} \\ \varphi_2 &= \varphi_1 \pm 100 \text{ gon}. \end{aligned} \quad (4)$$

Hierin bedeuten  $\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$  die Koeffizienten der perspektiven Affinität mit

$$\begin{aligned} \bar{r} &= a_1 \cos \delta - b_1 \sin \delta \\ \bar{s} &= a_1 \sin \delta + b_1 \cos \delta = a_2 \cos \delta - b_2 \sin \delta \\ \bar{t} &= a_2 \sin \delta + b_2 \cos \delta \end{aligned} \quad (5)$$

und dem Drehwinkel

$$\delta = \arctan \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2}. \quad (6)$$

Die Abbildung eines Kreises durch die Affintransformation ist eine Ellipse. Durch  $m_1, m_2$  und  $\varphi_1$  wird also die Verzerrungsellipse des Einheitskreises beschrieben (Tissot'sche Indikatritz). Sie stellt ein integrales Mittel für die Dreiecksfläche dar, wird aber auf den Schwerpunkt bezogen, durch den man das Dreieck abstrahieren kann.

Da sich sowohl die Maßstabsverzerrungen als auch die später benötigten (Kap. 3.3) Richtungsverzerrungen durch die Koeffizienten  $\bar{r}$ ,  $\bar{s}$ ,  $\bar{t}$  darstellen lassen, sollen diese als die den Strain beschreibenden Größen im folgenden benutzt werden.

Die so berechneten Strain-Parameter gelten für den Zeitraum  $\Delta T_i$  zwischen Null- und Wiederholungsmessung im betreffenden Stützpunktdreieck  $i$ . Da die  $\Delta T_i$  im allgemeinen von Dreieck zu Dreieck unterschiedlich sind, müssen alle Parameter auf eine einheitliche Zeitdifferenz normiert werden. Mit einer Zeitbasis von einem Tag erhält man die normierten Parameter:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\bar{r}_i - 1}{\Delta T_i} + 1 \\ s_i &= \frac{\bar{s}_i}{\Delta T_i} \quad \Delta T_i [\text{Tage}] \quad (7) \\ t_i &= \frac{\bar{t}_i - 1}{\Delta T_i} + 1 \end{aligned}$$

Da bei der Affintransformation von Dreiecken keine Überbestimmungen vorhanden sind, ist es für die Fehlerberechnung notwendig, den Gewichtseinheitsfehler für die Koordinatenklaffungen aus der Streckenmeßgenauigkeit abzuschätzen. Alternativen hierfür bestehen in einem konstanten Ansatz für alle Stützpunktdreiecke bzw. in variablem Ansatz in Abhängigkeit von der Konfiguration und der Größe der Dreiecke.

Neben den Parametern selbst stehen nach der Affintransformation ihre Kofaktoren zur Verfügung. Aus der Kofaktorenmatrix

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} Q_{r_i r_i} & Q_{r_i s_i} & Q_{r_i t_i} \\ Q_{s_i r_i} & Q_{s_i s_i} & Q_{s_i t_i} \\ Q_{t_i r_i} & Q_{t_i s_i} & Q_{t_i t_i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

lassen sich mit dem Gewichtseinheitsfehler  $m_o$  die Fehler der Strainparameter durch

$$m_{r_i} = \pm m_o \sqrt{Q_{r_i r_i}} \quad m_{s_i} = \pm m_o \sqrt{Q_{s_i s_i}} \quad m_{t_i} = \pm m_o \sqrt{Q_{t_i t_i}} \quad (9)$$

abschätzen.

### 3.2 Interpolation der Strain-Parameter

In den ausgewählten Stützpunkten ist somit die Verformung des Eises bekannt. Im Hinblick auf die Zeitkorrekturen besteht jedoch die Notwendigkeit, in jedem Punkt des Netzgebietes die Verformung angeben zu können. Die Funktionen zur Beschreibung der Ortsabhängigkeit der Strain-Parameter werden als Potenzreihen angesetzt.

$$\begin{aligned} r_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i y_i + a_4 x_i^2 + a_5 y_i^2 + a_6 x_i^2 y_i + a_7 x_i y_i^2 + a_8 x_i^3 + a_9 y_i^3 \\ s_i &= b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i y_i + \dots \quad \dots + b_9 y_i^3 \quad (10) \\ t_i &= c_0 + c_1 x_i + c_2 y_i + c_3 x_i y_i + \dots \quad \dots + c_9 y_i^3 \end{aligned}$$



Als Lösung erhält man (WOLF 1975) die Interpolationsparameter aus

$$x = (A^T Q_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T Q_{ll}^{-1} l \quad (14)$$

und ihre Kofaktorenmatrix mit

$$Q_{xx} = (A^T Q_{ll}^{-1} A)^{-1}. \quad (15)$$

Mit den Verbesserungen

$$v = Ax - l \quad (16)$$

errechnet sich der Gewichtseinheitsfehler aus

$$m_o^2 = \frac{v^T Q_{ll}^{-1} v}{3n-u}. \quad (17)$$

Daraus lassen sich die mittleren Fehler der Unbekannten

$$m_{x_i} = \pm m_o \sqrt{Q_{x_i x_i}} \quad (18)$$

und die mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen  $(1+v)$

$$m_{(1+v)_i} = \pm m_o \sqrt{Q_{(1+v)_i (1+v)_i}} \quad (19)$$

ableiten.

Da von vornherein keine Hinweise über die Art der gesuchten Interpolationsfunktion existieren, muß durch Variation des Potenzansatzes diejenige gefunden werden, die den beobachteten Strain-Parametern am besten genügt. Nach WOLF (1955) erweist sich die Funktion als „beste“ unter den betrachteten, für die sich in der Ausgleichung ein minimaler Gewichtseinheitsfehler ergibt.

### 3.3 Berechnung der Zeitkorrekturen

Mit den Interpolationsfunktionen (10) wird es möglich, für jeden Punkt im Netzgebiet Verzerrungsparameter anzugeben. Daraus lassen sich nach (3) und (4) die Verzerrungsellipsen berechnen. Maßstabsfaktoren  $m_i$  für die Streckenreduktion in beliebiger Richtung können aus der Ellipsengeometrie abgeleitet werden:

$$m_i = \pm \sqrt{m_1^2 \cos^2(\varphi_i - \varphi_m) + m_2^2 \sin^2(\varphi_i - \varphi_m)}. \quad (20)$$

Darin bedeuten:  $m_{1,2}$ : Beträge der extremen Verzerrungen

$\varphi_m$  : Richtungswinkel der maximalen Verzerrung  $m_1$

$\varphi_i$  : Richtungswinkel der Strecke  $S_i$ .

Richtungsverzerrungen  $\delta\varphi_i$  für Richtungen mit den Richtungswinkeln  $\varphi_i$  errechnen sich nach WOLFRUM (1978) aus

$$\delta\varphi_i = \frac{1}{2} (-(r_i - t_i) \sin 2\varphi_i + 2s_i \cos 2\varphi_i) \cdot \varrho \text{ [gon]} \quad (21)$$

mit  $\varrho = 200/\pi$ . In (20) und (21) beziehen sich  $m_i$  und  $\delta\varphi_i$  auf die Zeitbasis 1 Tag. Zu berücksichtigen ist deshalb noch die Zeitdifferenz

$$\Delta T_i = T_i - T_o \quad (22)$$

zwischen Messung ( $T_i$ ) und Bezugszeitpunkt ( $T_o$ ), auf den alle Beobachtungen reduziert werden sollen.

Im allgemeinen Fall ändern sich die Verformungsverhältnisse längs einer Strecke  $S_i$  bzw. eines Richtungswinkels  $\varphi_i$  nicht linear. Um die Zeitreduktionen  $\Delta S_i$  bzw.  $\Delta \varphi_i$  zu erhalten, ist deshalb  $m_i$  bzw.  $\delta \varphi_i$  zwischen Stand- und Zielpunkt zu integrieren.

$$\Delta S_i = \Delta T_i \int_0^{S_i} (m_i(S') - 1) dS' \quad (23)$$

$$\Delta \varphi_i = \frac{\Delta T_i}{S_i} \int_0^{S_i} \delta \varphi(S') dS'.$$

Für die numerische Berechnung ist die Strecke in  $n$  gleich lange Teilstücke zu unterteilen, und es ergeben sich:

$$\Delta S_i = \Delta T_i \cdot \frac{S_i}{n} \sum_{j=1}^n (m_{ij} - 1) \quad (24)$$

$$\Delta \varphi_i = \frac{\Delta T_i}{n} \sum_{j=1}^n \delta \varphi_{ij}.$$

Die zeitreduzierten Beobachtungen erhält man dann aus

$$\begin{aligned} (S_i) &= S_i + \Delta S_i \\ (R_i) &= R_i + \Delta \varphi_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Der Grad der Unterteilung einer Strecke ist abhängig von der Krümmung der Interpolationsflächen längs der Strecke und von ihrer Länge. Es seien  $m_i'$  und  $\delta \varphi_i'$  die Verzerrungswerte, berechnet für den Mittelpunkt einer Strecke. Berechnet man für die Endpunkte der Strecke entsprechende Werte und interpoliert daraus linear die Angaben für den Mittelpunkt, so ergeben sich  $m_i''$  und  $\delta \varphi_i''$ . Die Differenzen sind ein Kriterium für die Krümmung. Sollen die für den Mittelpunkt gerechneten Werte  $m_i'$  bzw.  $\delta \varphi_i'$  für die Reduktion der Gesamtstrecke bzw. Richtung benutzt werden, so dürfen die Differenzen bestimmte Grenzwerte nicht überschreiten, z. B.

$$\begin{aligned} dm_i &= m_i' - m_i'' \leq 1 \cdot 10^{-6} \\ d\delta \varphi_i &= \delta \varphi_i' - \delta \varphi_i'' \leq 0.01 \text{ mgon.} \end{aligned} \quad (26)$$

Sind die Differenzen jedoch größer, so ist die Strecke zu halbieren und ein entsprechender Test für die Teilstrecken vorzunehmen. Die schrittweise Unterteilung der Strecke wird abgebrochen, wenn in allen Teilstrecken die Kriterien (26) erfüllt sind.

Hat die Ausgleichung ergeben, daß sich die Verformungsverhältnisse am besten durch einen linearen Ansatz beschreiben lassen, werden die Differenzen  $dm_i$  bzw.  $d\delta \varphi_i$  zu Null. Die Strecken- bzw. Richtungsverzerrung wird also vollkommen durch ihre Mittelpunktwerte dargestellt. In den Gleichungen (24) tritt dann nur ein Summand auf.

Ausgangspunkt für die Fehlerberechnung ist die mit (15) aufgestellte Kofaktorenmatrix  $Q_{xx}$  der Interpolationsparameter  $a_i, b_i, c_i$  und der Gewichtseinheitsfehler  $m_0$  (17).

Die Matrix  $Q_{xx}$  ist voll besetzt, symmetrisch und hat die Ordnung  $u \cdot u$

$$\begin{aligned} \text{mit } u &= 9 \text{ für lineare Interpolation} \\ &= 18 \text{ für quadratische Interpolation} \\ &= 30 \text{ für kubische Interpolation} \end{aligned}$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{a_0 a_0} & Q_{a_0 a_1} & Q_{a_0 a_2} & \cdots & Q_{a_0 b_0} & Q_{a_0 b_1} & \cdots & Q_{a_0 c_0} & Q_{a_0 c_1} & \cdots \\ \vdots & Q_{a_1 a_1} & Q_{a_1 a_2} & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & Q_{a_2 a_2} & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & Q_{b_0 b_0} & Q_{b_0 b_1} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & Q_{b_1 b_1} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & Q_{c_0 c_0} & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & Q_{c_1 c_1} & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (27)$$

Schrittweise Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes führt zu den Fehlern der zeitkorrigierten Beobachtungen. In Matrixschreibweise lautet es (WOLF 1975)

$$Q_{F_i F_i} = F_i Q_{F_{i-1} F_{i-1}} F_i^T \quad (28)$$

Im ersten Schritt lassen sich so aus  $Q_{xx}$  die Kofaktoren für die Verzerrungsparameter  $r$ ,  $s$ ,  $t$  in den interpolierten Punkten ableiten. In den weiteren Stufen wird mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung auf  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\varphi_1$  und  $\delta\varphi$ , danach auf  $m_i$  und die korrigierte Richtung ( $R_i$ ) und zum Schluß auf die korrigierten Strecken ( $S_i$ ) übergegangen. Als Ergebnis steht die Varianz-Kovarianzmatrix  $Q_{\Gamma\Gamma}$  der ( $S_i$ ) und ( $R_i$ ) zur Verfügung, die Eingang in eine Netzausgleichung mit korrelierten Beobachtungen finden kann. Zu berücksichtigen sind dabei jedoch noch die a-priori-Fehler der Beobachtungen.

Die Fehler der zeitreduzierten Strecken und Richtungen (ohne den Anteil der Meßgenauigkeit) erhält man aus

$$\begin{aligned} m_{(S_i)} &= \pm m_o \sqrt{Q_{(S_i)(S_i)}} \\ m_{(R_i)} &= \pm m_o \sqrt{Q_{(R_i)(R_i)}} \end{aligned} \quad (29)$$

wobei die  $Q_{(S_i)(S_i)}$  und  $Q_{(R_i)(R_i)}$  Elemente der Hauptdiagonalen von  $Q_{\Gamma\Gamma}$  sind. Im wesentlichen sind die Fehler dabei abhängig von der Zeitdifferenz  $\Delta T_i$ , dem Richtungswinkel der Strecke bzw. Richtung und bei Streckenbeobachtungen von der Länge der Strecke selbst.

#### 4. BEISPIEL

Während der Filchner-Schelfeis-Expedition 1980/81 wurden u. a. auf dem Ekström Schelfeis zur Untersuchung des lokalen Verformungsverhaltens im Bereich der Georg von Neumayer-Station geodätische Messungen durchgeführt (KÖHLER 1981). Die Verzerrungsangaben beruhen auf der Auswertung kleinerer, an einem Tag bestimmbarer Deformationsfiguren (Pentagon und Dreieck mit Zentralpunkt). Die Figuren sind durch eine Traverse miteinander verbunden, die darüber hinaus noch bis zur Eiskante verlängert wurde (Abb. 2). Die gesamte Meßzeit betrug ca. einen Monat, war aber durch häufige Schlechtwetterperioden von bis zu 9 Tagen Dauer, an denen keine Messungen durchgeführt werden konnten, unter-

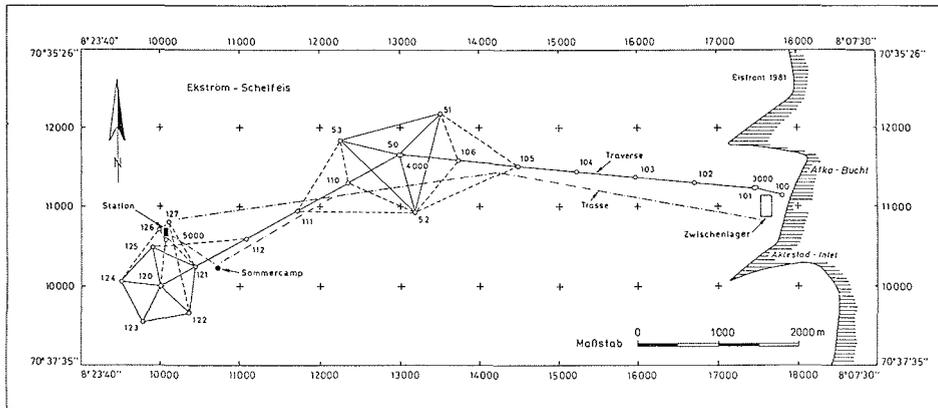


Abb. 2: Trassenverlauf und geodätische Traverse von der Eiskante bis zur Georg von Neumayer-Station mit Deformationsfiguren.

Fig. 2: Transport route and geodetic traverse from ice front to Neumayer Station with deformation figures.

brochen. Für eine Gesamtausgleichung der Figur müssen deshalb Zeitkorrekturen berücksichtigt werden. Da viele Messungselemente nur an einem Tag beobachtet werden konnten, ist eine direkte Zeitkorrektur durch Interpolation der einzelnen Messungselemente nach SWITHINBANK nicht möglich.

Aus dem gesamten Messungsmaterial wurden deshalb Stützpunktdreiecke nach folgenden Kriterien herausgesucht:

- die gemessenen Dreiecksseiten liegen für zwei Termine vor,
- die Zeitdifferenz ist dabei  $\geq 3$  Tage (max. 22 Tage),
- Dreiecke mit ungünstiger Form werden wegen der dabei ungünstigen Fehlerfortpflanzung nicht berücksichtigt.

Damit ergaben sich insgesamt 19 Stützpunkte.

Alternativ hierzu wurden Stützpunkte noch auf eine andere Weise ermittelt: Punktgruppen, die an zwei Terminen überbestimmt beobachtet vorlagen, wurden jeweils für die entsprechenden Daten einer Ausgleichung unterzogen. Die Zeitdifferenzen betragen wieder 3 bis 22 Tage. Die Punktzahl in den Figuren schwankt zwischen 4 und 6. Aus den ausgeglichenen Punkten wurden Dreiecke mit günstiger Form gebildet, deren Schwerpunkte dann die Stützpunkte darstellen. Auf diese Weise ergaben sich 20 Stützpunkte.

Wird auf die Beobachtungen zurückgegriffen (Alternative 1), wirken sich Meßfehler direkt auf die Strain-Parameter aus und bewirken eine größere Steuung der Parameter von Stützpunkt zu Stützpunkt. Eine Ausgleichung (Alternative 2) bewirkt durch die Überbestimmung, daß die daraus abgeleiteten Strain-Parameter weniger von den einzelnen Meßfehlern abhängig sind. Sie stellt somit ein Filter dar und erhöht die Signifikanz der Strain-Parameter innerhalb der einzelnen Teilfiguren.

Ansatz	Alternative 1 [ $1 \cdot 10^{-6}$ ]	Über- best.	Alternative 2 [ $1 \cdot 10^{-6}$ ]	Über- best.
linear	$\pm 0.50$	48	$\pm 0.42$	51
quadratisch	$\pm 0.49$	39	$\pm 0.44$	42
kubisch	$\pm 0.49$	27	$\pm 0.46$	30

Tab. 1: Mittlerer Gewichtseinheitsfehler  $m_0$  für die Interpolationsfunktionen von Strain-Parametern.

Tab. 1: Mean square error of unit weight for the interpolation functions of strain parameters.

Index	a	$m_a$ [1 · 10 <sup>-6</sup> ]	b	$m_b$ [1 · 10 <sup>-6</sup> ]	c	$m_c$ [1 · 10 <sup>-6</sup> ]
0	0.999 997 <sub>2</sub>	±0.2	0.000 009 <sub>1</sub>	±0.1	1.000 006 <sub>2</sub>	±0.2
1	-1.0 · 10 <sup>-6</sup>	±0.6	+2.1 · 10 <sup>-6</sup>	±0.4	+0.5 · 10 <sup>-6</sup>	±0.6
2	+0.2 · 10 <sup>-6</sup>	±0.1	-0.8 · 10 <sup>-6</sup>	±0.1	-1.8 · 10 <sup>-6</sup>	±0.1

Tab. 2: Interpolationsparameter und ihre mittleren Fehler

Tab. 2: Interpolation parameters and their mean square errors

Für beide Alternativen wurden in den Stützpunkten die Strain-Parameter durch Affintransformationen nach 3.1 und Interpolationsfunktionen nach 3.2 mit unterschiedlichem Ansatz berechnet. Zur Verbesserung der numerischen Stabilität wurden hierbei die Stützpunktkoordinaten noch derart transformiert, daß die neue y-Achse in der Hauptausdehnung des Untersuchungsgebietes zu liegen kam.

Es wird deutlich, daß die aus Alternative 2 gewonnenen Stützpunkte durchweg zu kleineren Gewichtseinhitsfehlern führen. Die Differenzen zwischen den verschiedenen Ansätzen sind nicht signifikant. Seinen Minimalbetrag hat  $m_o$  im linearen Ansatz (Alternative 2). Die Interpolationspolynome für diesen Fall, der der Zeitkorrektur zugrunde gelegt werden soll, haben folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} r_i &= a_o + a_1 \bar{x}_i + a_2 \bar{y}_i & \bar{x}_i, \bar{y}_i: & \text{Koordinaten, bezogen auf den Schwerpunkt aller} \\ s_i &= b_o + b_1 \bar{x}_i + b_2 \bar{y}_i & & \text{Stützpunkte im transformierten Koordinatensystem} \\ t_i &= c_o + c_1 \bar{x}_i + c_2 \bar{y}_i \end{aligned}$$

Bei der Zeitkorrektur aller Beobachtungen nach 3.3. ist zuerst ein Bezugszeitpunkt festzulegen. Da die Zeitdifferenz  $\Delta T_i$  zwischen Beobachtungs- und Bezugszeitpunkt wesentlich den Fehler der Zeitkorrektur bestimmt, bietet sich die Mitte des Beobachtungszeitraumes an. Dadurch wird gewährleistet, daß die  $\Delta T_i$  nicht zu groß werden. Im speziellen Fall ist jedoch noch ein anderer Faktor zu berücksichtigen. Im Bereich des Polygonzugabschnittes zwischen dem Punkt 106 und der Eiskante sind keine Stützpunktdreiecke zur Strainberechnung gemessen. Verzerrungsparameter und also auch Zeitkorrekturen müssen für diesen Teil durch Extrapolation gewonnen werden. Damit der Fehler hierdurch so klein wie möglich gehalten wird, sollte der Bezugszeitpunkt mit dem Messungsdatum dieses Abschnittes zusammenfallen.

Der Gesamtmessungszeitraum liegt zwischen dem 30. 01. und 27. 02. 81. Der östliche Teil des Polygonzuges wurde am 13. und 14. 02. gemessen. Die Festlegung des Bezugszeitpunktes auf den 14. 02., 6.00 Uhr, wird beiden Forderungen gerecht. Wegen der hohen Verzerrungen von maximal 15 ppm/Tag (KÖHLER 1981) ist die Berücksichtigung auch der Uhrzeit angebracht.

Unter diesen Bedingungen liegen die mit (29) berechneten mittleren Fehler der Zeitkorrekturen bei durchschnittlich  $\pm 0.04$  mgon für die Richtungskorrekturen und  $\pm 1$  mm für die Streckenkorrekturen.

Zur Prüfung der Zeitkorrekturen wurden in einem ersten Schritt die Genauigkeitswerte von reduzierten und unreduzierten Beobachtungen miteinander verglichen. Für nicht reduzierte Strecken lassen sich Fehler aus Doppelmessungen vom gleichen Tage mit

$$m_s = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \quad n = \text{Anzahl der Doppelmessungen}$$

angeben. Alle mehrfach beobachteten und reduzierten Strecken können zur Berechnung eines mittleren Streckenfehlers aus

$$m_{s_{\text{red}}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{N-v}}$$

Gerät	n	$m_s$ [mm]	$m_{s_{red}}$ [mm]	N	$\nu$
TC-1	65	$\pm 3.6$	$\pm 3.4$	163	50
RM-II	30	$\pm 5.3$	$\pm 4.6$	96	40

Tab. 3: Mittlere Fehler unreduzierter und zeitreduzierter Strecken.

Tab. 3: Mean square errors of distances unreduced and reduced to time.

mit:  $\nu$  = Anzahl der geometrisch verschiedenen Strecken  
 $N$  = Anzahl aller Beobachtungen

herangezogen werden. Die Fehlerwerte für die benutzten Entfernungsmessgeräte sind in Tab. 3 zusammengestellt.

Fehler unreduzierter Richtungen können aus Stationsausgleichungen abgeschätzt werden. Bei 32 Stationen ergab sich ein durchschnittlicher mittlerer Richtungsfehler von  $m_R = \pm 0.3$  mgon. Berücksichtigt man noch Zentrieranteile von 1 — 2 mm, so errechnet sich für eine durchschnittliche Zielweite ein Fehler von  $m_R = \pm 0.4$  mgon.

Mit den identischen Richtungen aller doppelt beobachteten reduzierten Richtungssätze lassen sich Abrisse aufstellen, aus denen ein Richtungsfehler mit

$$m_R = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2(n-u)}} \quad \begin{array}{l} d_i = \text{Differenzen der orientierten Richtungen} \\ n = \text{Anzahl der Richtungen} \\ u = \text{Anzahl der Abrisse} \end{array}$$

zu  $\pm 0.44$  mgon abgeschätzt werden konnte.

Signifikante Differenzen lassen sich zwischen den derart gewonnenen Fehlerangaben für reduzierte und unreduzierte Beobachtungen also nicht feststellen. Dies ist eine erste Bestätigung für die Güte des Zeitreduktionsmodells.

In einem weiteren Schritt werden die Auswirkungen der Zeitreduktionen auf die Deformationsfiguren untersucht. Für beide Figuren liegen in zwei Zeitpunkten Streckenmessungen vor. Im Pentagon wurden beide Messungen auf den Termin der Nullmessung (04. 02., 19.00 Uhr), im Dreieck auf den der Wiederholungsmessung (15. 02., 19.00 Uhr) reduziert. Einen Vergleich der Gewichtseinheitsfehler aus den Ausgleichungen mit reduzierten bzw. unreduzierten Daten liefert Tab. 4 ( $m_0$  — a priori =  $\pm 1.00$  cm).

Der Gewichtseinheitsfehler wird in allen zeitreduzierten Ausgleichungen kleiner als in den entsprechenden Ausgleichungen mit unreduzierten Beobachtungen. Bemerkenswert ist dies besonders in den nur für Stundendifferenzen korrigierten Beobachtungen vom 04. 02. und 15. 02. Statistisch gesehen sind jedoch die Differenzen der Gewichtseinheitsfehler nicht signifikant. Es zeigt sich daraus, daß die Genauigkeit der Beobachtungen nach der Zeitreduktion erhalten bleibt. Waren bei Deformationsanalysen mit unreduzierten Netzen in beiden Figuren noch erhebliche Verschiebungen erkennbar (KÖHLER 1981), so können

	Pentagon		Dreieck	
	04.02. [cm]	26.02. [cm]	12.02. [cm]	15.02. [cm]
unreduziert	$\pm 0.90$	$\pm 0.78$	$\pm 0.76$	$\pm 0.83$
zeitreduziert	$\pm 0.88$	$\pm 0.75$	$\pm 0.72$	$\pm 0.81$

Tab. 4: Gewichtseinheitsfehler der Streckenausgleichungen mit und ohne Zeitreduktion.

Tab. 4: Mean square error of unit weight resulting of the adjustments of distances unreduced and reduced to time.

Figur	Punkte	Beobachtungen			Gesamt [0.1mgon] bzw. [cm]	$m_0$		$m_p^*)$ [mm]
		Richtungen Sätze	Richt. Richt.	Strecken		Richtungen [0.1 mgon]	Strecken [cm]	
erweitertes Pentagon	11	10	65	98	$\pm 1.17$	$\pm 1.56$	$\pm 0.91$	$\pm 2$
erweitertes Dreieck	7	4	21	24	$\pm 0.79$	$\pm 0.71$	$\pm 0.85$	$\pm 2$
Traverse	18	18	84	66	$\pm 0.79$	$\pm 0.83$	$\pm 0.74$	$\pm 5$
Gesamtnetz	27	32	184	184	$\pm 1.11$	$\pm 1.35$	$\pm 0.88$	$\pm 7$

\*) durchschnittlicher innerer Punktlagefehler

Tab. 5: Ausgleichungen mit zeitreduzierten Beobachtungen.

Tab. 5: Adjustments of time reduced observations.

bei Netzvergleichen nach der Zeitreduktion jeweils beide Netze einer Figur mit hoher Wahrscheinlichkeit als identisch nachgewiesen werden.

Im letzten Schritt werden nun die zeitkorrigierten Beobachtungen in Teilausgleichungen für die einzelnen Figuren und einer Gesamtausgleichung zusammengefaßt. Die Ergebnisse zeigt Tab. 5.

Auffällig ist zunächst der hohe Gewichtseinheitsfehler für die Richtungen im Pentagon. Die Richtungsätze mit den höchsten Verbesserungen datieren vom 30. und 31. 01.; die Stützpunktdreiecke für die Zeitkorrektur sind aus Messungen vom 04. 02. bis 26. 02. gebildet. Als Ursache könnte also ein nichtlineares Verzerrungsverhalten vor diesem Zeitraum vermutet werden. Dies wird jedoch durch den sehr linearen Verlauf der Streckenänderungen im Pentagon über den gesamten Zeitraum widerlegt (Abb. 3). Zur Verdeutlichung der Reduktionsgüte sind dort auch die zeitkorrigierten Strecken eingetragen. Die Ursache liegt wahrscheinlich in der Ungenauigkeit der Richtungen aus diesen Tagen. Die Fehler aus den Stationsausgleichungen (unreduziert) und aus den Abrissen (reduziert) liegen jeweils deutlich über den oben angegebenen Durchschnittswerten. Die Umstellungsschwierigkeiten der Beobachter auf die extremen Beobachtungsverhältnisse mag hier eine Rolle gespielt haben.

In den Ausgleichungen des Dreiecks und der Traverse bestätigen sich in etwa die Gewichtseinheitsfehler der Teilausgleichungen (Tab. 4). Der mit  $\pm 5$  mm gegenüber  $\pm 2$  mm für Pentagon und Dreieck deutlich höhere durchschnittliche innere Punktlagefehler der Traversenausgleichung resultiert aus der gegenüber Netzen ungünstigeren Punktbestimmung. Dies macht sich natürlich auch in der Gesamtausgleichung bemerkbar (Abb. 4). Da sich auch hier das höhere  $m_0$  für die Richtungen auswirkt, steigt der Punktlagefehler auf  $\pm 7$  mm. Extreme Punktlagefehler von  $\pm 13$  mm bzw.  $\pm 11$  mm erhalten die ohne Überbestimmung vom Traversenende 101 aus angeschlossenen Punkte 100 und 3000 in der Nähe der Eiskante. Punkt 100 war nur für den Höhenanschluß an die Meeresoberfläche angelegt worden. Die auf Punkt 3000 vorgesehenen Dopplermessungen zur Geschwindigkeitsbestimmung mußten wegen eines Gerätedefektes ausfallen. Beide Punkte haben daher für zukünftige Messungen keine Bedeutung. Ohne diese Randpunkte sinkt dann der durchschnittliche innere Punktlagefehler auf  $\pm 6$  mm, ein Ergebnis, das die Güte des Verfahrens zur Zeitreduktion eindrucksvoll bestätigt.

## 5. AUSBLICK

Das vorgestellte Zeitreduktionsmodell wurde in einem Netz, bestehend aus einer 8 km-Traverse und zwei Deformationsfiguren, auf seine Eignung getestet. Ähnliche Figuren könnten bei Bewegungsmessungen auf Gletschern Verwendung finden. In solchen lokalen Figuren sind die notwendigen Wiederholungsmessungen ohne logistische Schwierigkeiten leicht durchführbar. Das ist sicherlich nicht immer, insbesondere

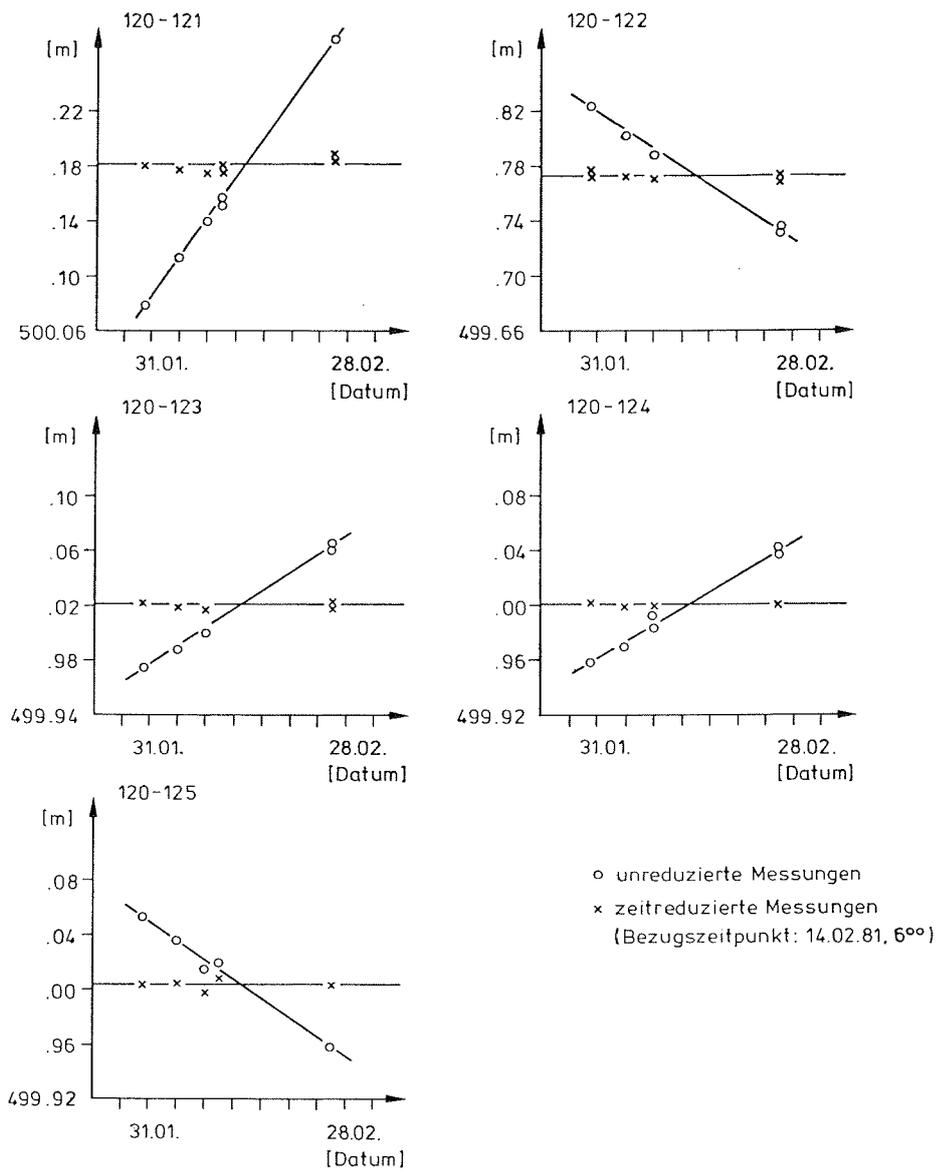


Abb. 3: Strecken im Pentagon, mit und ohne Zeitreduktion.

Fig. 3: Distances in the pentagon, reduced and unreduced to time.

bei der Beobachtung längerer Traversen, möglich. Die Eignung des Modells für flächenmäßig weiter ausgedehnte Netze muß auch davon abhängig gemacht werden, inwieweit großräumiges Strainverhalten von lokalen Schwankungen getrennt werden kann. Hier ist für die Zukunft eine Verfeinerung des Verfahrens notwendig.

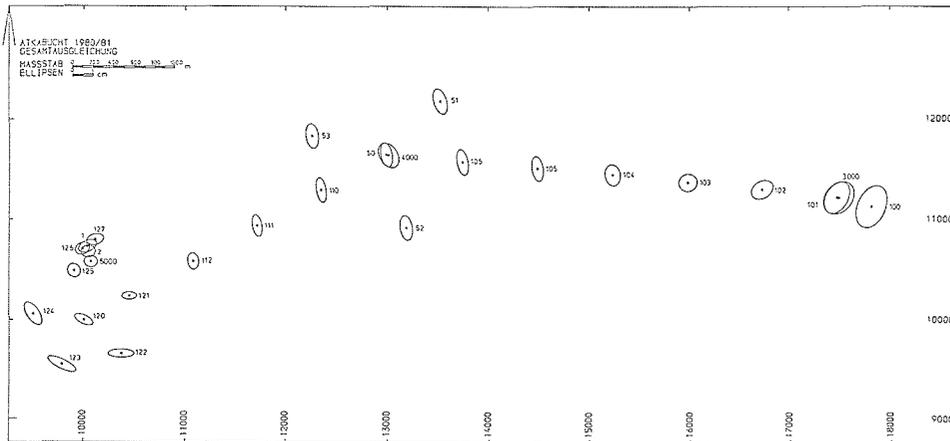


Abb. 4: Fehlerellipsen aus der Gesamtausgleichung.

Fig. 4: Error ellipses out of the complete adjustment.

#### Literatur

- Dorner, E., Hofmann, W., Nottarp, K. & W. Seufert (1971): Geodätische Geschwindigkeitsbestimmungen auf dem Ross-Schelfeis in der Antarktis — Ein Beitrag zur Messung und Berechnung eines Polygonzuges auf beweglichem Untergrund. — Deutsche Geod. Komm. Reihe B (181), München.
- Heer, R. & Th. Leonhard (1981): A method for detecting vertical soil movements from scattered levelling nets. — IGA-Symposium on geodetic networks and computations, München.
- Köhler, M. (1981): Das Verformungsverhalten des Ekström-Schelfeises in der Nähe der deutschen Antarktis-Forschungsstation „Georg von Neumayer“. — Polarforschung 51 (2): 113—127
- Seckel, H. (1974): Zur geodätischen Erfassung von Inlandeisbewegungen. — Unveröff. Diss., Karlsruhe.
- Swithinbank, C. (1958): The movement of the ice-shelf at Maudheim. — Norwegian-British-Swedish Antarctic Exped. 1949—52, Scientific Results, Glaciology I (III C), Oslo.
- Wager, A. C., Doake, C. S. M., Paren, J. G. & J. L. W. Walton (1980): Survey reduction for glacier movement studies. — Survey Rev. XXV: 251—263.
- Wolf, H. (1955): Über die Minimums-Eigenschaft des mittleren Fehlers, ein Beitrag zur Bestimmung empirischer Funktionen. — Monum (Kraft-Festschrift), 575—584, Bamberg.
- Wolf, H. (1975): Ausgleichsrechnung — Formeln zur praktischen Anwendung. — Bonn.
- Wolfrum, O. (1978): Die Verzerrungseigenschaften der affinen Transformation. — Allg. Vermessungsnachr. 85: 367—374.
- Zumberge, J. H. (1964): Horizontal strain and absolute movement of the Ross Ice Shelf between Ross Island and Roosevelt Island, Antarctica, 1958—1963. — Antarctic snow and ice studies, Antarctic Res. Ser. 2: 65—81, Am. Geophys. Union, Washington, D. C.