

**Messung dielektrischer Eigenschaften  
Polarer Eiskerne**

**Measuring the Dielectric Properties  
of Polar Ice Cores**

---

**Frank Wilhelms**

Frank Wilhelms  
Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung  
Columbusstraße  
Postfach 120161  
D-27515 Bremerhaven  
email: [fwilhelm@awi-bremerhaven.de](mailto:fwilhelm@awi-bremerhaven.de)

Die vorliegende Arbeit ist die im Anhang gekürzte Fassung einer Doktorarbeit im Fach Geophysik, die 2000 dem Fachbereich Geowissenschaften der Universität Bremen vorgelegt wurde.

*“Am meisten hat mir die Antarktis gegeben,  
ich habe viel von ihr gelernt.”*

Ursula Weigel (\* 14. November 1961 – † 12. April 1998)

## *Für Ursula*



*In der Atka Bucht bei der deutschen Station Neumayer am 17. Dezember 1998, 23:45 GMT*



# Inhaltsverzeichnis

|   |            |
|---|------------|
| <b>Zusammenfassung</b>  | <b>iii</b> |
| <b>Abstract</b>   | <b>iv</b>  |
| <b>1 Einleitung und Stand der Forschung</b>                                     | <b>1</b>   |
| <b>2 Theorie des geschützten zylinderförmigen Kondensators</b>                  | <b>5</b>   |
| 2.1 Theoretische Berechnung der Leerkapazität . . . . .                         | 5          |
| 2.1.1 Koordinaten und elektrostatische Näherung . . . . .                       | 5          |
| 2.1.2 Potentialverteilung . . . . .   | 7          |
| 2.1.3 Leerkapazität . . . . .   | 10         |
| 2.1.4 Korrekturterm für einen endlich langen Zylinder . . . . .                 | 12         |
| 2.1.5 Gültigkeit der Behandlung in ebenen Polarkoordinaten . . . . .            | 14         |
| 2.2 Theorie für konzentrisch geschichtete Dielektrika . . . . .                 | 17         |
| 2.2.1 Koordinaten und Ansatz für die Dielektrizitätskonstanten . . . . .        | 18         |
| 2.2.2 Potentialverteilung . . . . .   | 20         |
| 2.2.3 Parametrisierung der Feldlinien . . . . .                                 | 23         |
| 2.2.4 Kapazität und effektive Dielektrizitätskonstante . . . . .                | 25         |
| 2.2.5 Restglied der Potenzreihen . . . . .                                      | 26         |
| 2.2.6 Modell zum Einfluß von Nachbarschichten . . . . .                         | 30         |
| 2.3 Theorie für einen Eiskern (eine Bohrlochsonde) mit Isolierschicht . . . . . | 35         |
| 2.3.1 Koeffizienten in gemeinsamer Nomenklatur für innen und außen . . . . .    | 36         |
| 2.3.2 Potenzreihen für Potential und Fluß . . . . .                             | 37         |
| 2.3.3 Potenzreihen für die Komponenten der Feldstärken . . . . .                | 37         |
| 2.3.4 Restglied der Potenzreihen . . . . .                                      | 39         |
| 2.3.5 Berechnete Beispielpotentialverteilungen . . . . .                        | 39         |
| 2.3.6 Gültigkeitsbereich der Theorie . . . . .                                  | 41         |
| <b>3 Meßanwendungen mit der Theorie für 2 Schichten</b>                         | <b>47</b>  |
| 3.1 Effektive Dielektrizitätskonstante und ihre numerische Umkehrung . . . . .  | 47         |
| 3.1.1 Dielektrizitätskonstante und Ableitungen als Potenzreihen . . . . .       | 48         |
| 3.1.2 Abbildungseigenschaften der Dielektrizitätskonstanten . . . . .           | 48         |
| 3.1.3 Numerische Umkehrung mit dem Newton-Verfahren . . . . .                   | 53         |
| 3.1.4 Ableitungen der Umkehrfunktion . . . . .                                  | 59         |
| 3.2 Dimensionierung und Fehlerrechnung einer Eiskernmeßapparatur . . . . .      | 60         |
| 3.2.1 Fehler und ihre Fortpflanzung bei komplexen Größen . . . . .              | 61         |
| 3.2.2 Elektrodenhalbschalen . . . . .   | 64         |
| 3.2.3 Meßelektrodenwinkel und Oberflächenströme . . . . .                       | 65         |
| 3.2.4 Elektrodendurchmesser . . . . .   | 69         |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.2.5    | Meßelektrodenlänge . . . . .  | 75         |
| 3.2.6    | Präzision von Theorie & Algorithmen, Einfluß der Packfolie . . . . .          | 76         |
| 3.2.7    | Eichung . . . . .   | 77         |
| <b>4</b> | <b>Meßdurchführung, Ergebnisse und Diskussion</b>                             | <b>86</b>  |
| 4.1      | Kombinierte Kernmeßbank für Meßkondensator und $\gamma$ -Densimeter . . . . . | 87         |
| 4.1.1    | Mechanische Ausführung und Meßdatenerfassung . . . . .                        | 87         |
| 4.1.2    | Meßkondensator . . . . .  | 91         |
| 4.1.3    | $\gamma$ -Densimeter . . . . .  | 93         |
| 4.1.4    | Meßanwendungen mit der früher beschriebenen DEP-Meßbank . . . . .             | 96         |
| 4.1.5    | Diskussion und Vergleich mit früheren Messungen . . . . .                     | 99         |
| 4.2      | Kernmaterial: Glaziologie & Testdatenbasis für neue Meßmethoden . . . . .     | 107        |
| 4.3      | Dielektrizitätszahl-/Dichtebeziehung nach dem Looyengamodell . . . . .        | 108        |
| 4.3.1    | Mischungsmodelle . . . . .  | 109        |
| 4.3.2    | Annahmen zum komplexen Looyengamodell . . . . .                               | 110        |
| 4.3.3    | Numerische Umkehrung mit dem Newton-Verfahren . . . . .                       | 114        |
| 4.3.4    | Elektrisches Densimeter . . . . .   | 118        |
| 4.3.5    | Leitfähigkeit der Eisphase & Vulkanschichtkandidaten . . . . .                | 125        |
| 4.3.6    | Diskussion in der glaziologischen Anwendung . . . . .                         | 127        |
| 4.4      | Messung bei niedrigen Frequenzen . . . . .                                    | 127        |
| 4.5      | Diskussion der Theorie in der Meßanwendung . . . . .                          | 130        |
| <b>5</b> | <b>Ausblick, Anwendungsmöglichkeiten, Spekulatives</b>                        | <b>132</b> |
|          | <b>Anhang</b>   | <b>135</b> |
| <b>A</b> | <b>Mathematische Hilfsmittel</b>  | <b>136</b> |
| A.1      | Hilfsmittel für Rechnungen mit den modifizierten Besselfunktionen . . . . .   | 136        |
| A.1.1    | Verhältnis der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art . . . . .           | 136        |
| A.1.2    | Verhältnis der modifizierten Besselfunktionen erster Art . . . . .            | 137        |
| A.2      | Zweidimensionale Potentialtheorie und harmonische Funktionen . . . . .        | 138        |
| <b>B</b> | <b>Quellcode verwendeter Programme</b>  | <b>141</b> |
| <b>C</b> | <b>Aufgetragene Daten bearbeiteter Eiskerne</b>                               | <b>142</b> |
|          | <b>Abbildungsverzeichnis</b>  | <b>143</b> |
|          | <b>Tabellenverzeichnis</b>  | <b>146</b> |
|          | <b>Symbolverzeichnis</b>  | <b>147</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>   | <b>155</b> |
|          | <b>Danksagung</b>   | <b>171</b> |

# Zusammenfassung

Die polaren Regionen spielen eine entscheidende Rolle im Zusammenhang mit globalen Klimaveränderungen. Spurenstoffe vulkanogenen Ursprungs bilden im Eisschild eingelagerte Horizonte erhöhter Leitfähigkeit. Bei der Analyse von Eiskernen werden dielektrische Messungen traditionell zum Auffinden dieser Horizonte verwendet, die dann zur Datierung herangezogen werden. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit apparativen Verbesserungen der in der Literatur beschriebenen DEP (*dielectric profiling*) Methode. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Durchführbarkeit von Messungen im niederfrequenten Bereich unterhalb der Debyeschen Relaxation mit hohen relativen Dielektrizitätskonstanten von Eis gelegt.

Die beschriebene Messung der komplexwertigen – die Leitfähigkeit wird mit dem Imaginärteil mitbehandelt – relativen Dielektrizitätskonstanten beruht auf der Kapazitätsbestimmung eines geschützten, der zylinderförmigen Eiskerngeometrie angepaßten Kondensators mit einer kommerziellen selbstabgleichenden Meßbrücke. Die komplexwertige Kapazität bestimmt durch Division mit der aus einer Eichung bestimmten Leerkapazität die effektive Dielektrizitätskonstante des im Meßkondensator zentrierten Eiskerns mit der ihn umgebenden aus Luft geformten Isolierschicht. Zur Bestimmung eines genauen Eichstandards wurde die Leerkapazität des realen Meßkondensators auf die Größenordnung von einem Promille genau berechnet.

Zur Berechnung der relativen Dielektrizitätskonstanten des Eises aus der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten der Anordnung aus Eiskern und Isolierschicht stellt die vorliegende Arbeit eine Theorie zur Verfügung, die den Fall endlich vieler konzentrisch um den Eiskern angeordneter Schichten beschreibt. Auch die nah verwandte Behandlung einer umgekehrten Anordnung im Bohrloch wird jeweils mitdiskutiert. Für den Fall einer einzigen Trennschicht zwischen dem Kern bzw. Bohrloch und den Elektroden sind aus der Potentialverteilung weitere Größen abgeleitet, und der Einfluß von die Messung störenden Effekten ist umfassend diskutiert.

Die vorgestellten Messungen erreichen bei einer Meßfrequenz von 250 kHz eine Genauigkeit von Real- und Imaginärteil von besser als zwei bis zu einem Prozent. Eine kombinierte Meßbank mit  $\gamma$ -Densimeter zur Durchführung von Messungen ist beschrieben und an umfangreichem Kernmaterial erfolgreich in der Meßanwendung getestet. Im Rahmen der mit den methodischen Verbesserungen erreichten Genauigkeit beschreibt ein erweitertes Looyengamodell mit angenommenem Realteil der Dielektrizitätskonstanten polaren Firn als Mischphase aus Luft und Eis. Ein auf der Anwendung des Looyengamodells basierendes elektrisches Densimeter wird ausführlich diskutiert. Die Dichte polaren Firns bestimmt man zu besser als vier bis zu zwei Prozent Relativgenauigkeit. Die Leitfähigkeit der Eisphase wird zu besser als vier bis dreieinhalb Prozent genau bestimmt. Die Bestimmung der Leitfähigkeit der

Eisphase demonstriert an einem Beispiel die Auffindung einer vorher nicht identifizierbaren Schicht mit erhöhter Leitfähigkeit in den oberen Kernmetern, für die nach einer unabhängigen Datierungsmethode vulkanogener Eintrag zu erwarten ist.

Die Möglichkeit niederfrequenter Messungen wird an einem Meßbeispiel demonstriert und mehrere vorher in der Literatur beschriebene besondere Eigenschaften von polaren Eises können verifiziert werden. Niederfrequente Messungen im Genauigkeitsbereich einiger Prozent Fehler sind am Eiskern mit der beschriebenen Methode durchführbar und lassen auf interessante Ergebnisse bei kontinuierlicher hochauflösender Messung von Eiskernen hoffen.

## Abstract

Polar regions play a key role in the understanding of global climate changes. Impurities from volcanic origin form layers of increased conductivity in the ice sheets. Traditionally, electrical measurements are employed to find these horizons in ice core analyses. The work presented here deals with the instrumental improvement of the DEP (dielectric profiling) method widely described in the literature. Special interest is devoted to the feasibility of low frequency measurements in terms of Debye's relaxation with its observed high permittivities.

The described measurement of the complex-valued relative permittivity – the conductivity is treated with the imaginary component – is based on the determination of a guarded capacitor's capacitance with a commercial auto-balancing bridge. The cylinder-shaped capacitor clings to the geometry of the ice core, which is centered in the middle of the capacitor. The remaining air gap between the ice core and the electrodes acts as a blocking layer. The effective permittivity of the ice core blocking layer set-up is the fraction of the measured capacitance and the free air capacitance, which is determined from calibration. A precise calibration standard is achieved by calculation of the accurate free-air capacitance of the real capacitor set-up in the accuracy range of one per mill.

The work presented here supplies a theory calculating the permittivity of ice from the ice core blocking layer set-up's effective permittivity by treating an ice core surrounded by a finite number of concentric layers. The closely related application to an inverse set-up in the bore hole is discussed in addition. The case of one single layer separating the core or bore hole from the electrodes is treated with the potential distribution properties and other properties derived additionally. The influence of measurement disturbances by different effects is discussed in detail.

The 250 kHz measurements presented in this work attain a precision of two per cent down to one percent for real and imaginary components, respectively. An analysis bench as a platform for a  $\gamma$ -densimeter and a measurement capacitor is described and tested successfully on a wide range of cores. In an application test of the densimeter, the accuracy achieved by the methodical improvement leads to the following result: A broadened version of Looyenga's model assuming a real permittivity component

of the ice phase describes polar firn as a mixture of air and ice in terms of its electrical properties. The density is determined with a precision of about four down to two percent. The conductivity of the ice phase is measured with an accuracy of about four to 3.5 per cent. An example demonstrates the discovery of an increased conductivity layer in the ice phase's properties not being identifiable in the firn data. Independent dating suggests volcanogenic input in the corresponding core depth.

The feasibility of low frequency measurements is demonstrated by an example of measurement application. Several unique properties of polar ice described in the literature can be verified as well. Low frequency measurement applications in the order of one-percent precision are feasible and promise interesting results in continuous high resolution application to ice cores.

# Kapitel 1

## Einleitung und Stand der Forschung

“Die polaren Regionen spielen eine entscheidende Rolle im Zusammenhang mit globalen Klimaveränderungen. Sie sind sensitive Anzeiger des Wandels und ihre Schnee- und Eiseigenschaften sind den Wandel gut zusammenfassende Größen” [Weller, 1999]. “Im Gegensatz zu anderen paläoklimatischen Medien ist Eis ein in der Atmosphäre selbst geformtes Sediment. Dahinweitergehend liefern die in Eiskernen verfügbaren hochaufgelösten Messungen wertvolle Informationen über den vergangenen Zustand der Atmosphäre, d.h. Temperatur, chemische Zusammensetzung, atmosphärische Zirkulation und Gaszusammensetzung” [Hammer et al., 1997]. Die erste elektrische im Zusammenhang mit der Eiskernanalyse beschriebene stratigraphische ECM (**E**lectrical **C**onductivity **M**asurement) Meßmethode [Hammer, 1980] zum Auffinden saisonaler Variabilität und von Horizonten mit Eintrag vulkanogenen Ursprungs [Neftel et al., 1985; Schwander et al., 1983] beruht auf der Messung des Gleichstromleitwerts. Davon ausgehend wurde die Wechselstrommethode DEP (**D**i**E**lectric **P**rofiling technique) als quantitative Methode [Moore et al., 1990, 1991, 1994] eingeführt und stellt heute eine Standardmethode bei der Eiskernanalyse [Wolff et al., 1997; Wolff, 2000], insbesondere auch bei der Datierung über bekannten Vulkanausbrüchen zuordenbaren Horizonten [Moore et al., 1991] dar. Im Vergleich zum mittels ECM bestimmten Säuregehalt [Hammer, 1980] liefert DEP zusätzlich Informationen über weitere Spezies wie z.B. Salze [Moore et al., 1992a, 1992b; Moore und Fujita, 1993]. Der Beitrag der vorliegenden Arbeit zu einer verbesserten Auffindbarkeit von Horizonten mit vulkanogenem Eintrag ist in Kapitel 4 diskutiert.

Die während dieser Arbeit aufgebaute kombinierte Meßbank mit Meßkondensator und  $\gamma$ -Densimeter ist als Fortentwicklung früher am Alfred-Wegener-Institut eingesetzter Kernmeßbänke zur zerstörungsfreien hochauflösenden Messung der physikalischen Eigenschaften von Eiskernen zu sehen. Bei der “GRIP-Meßbank” [Wolff et al., 1995; Kipfstuhl und Frenzel, 1994], die erstmals am Tiefbohrprojekt GRIP [GRIP Members, 1993] eingesetzt wurde, ruht der Eiskern in einem Trog und wird an den Meßfühlern vorbeigeführt. Zu Beginn konzentrierten sich die elektrischen Messungen auf eine Übertragung der Gleichstrommeßmethode ECM [Hammer, 1983; Taylor et al., 1993] auf eine Wechselstrommeßmethode mit kratzenden Elektroden [Kipfstuhl

und Minikin, 1994]. Später wurde die Wechselstromleitwertmessung mit kratzenden Elektroden auch von Sugiyama et al. [1995] als AC-ECM beschrieben. Ausgehend von den in der Radarliteratur diskutierten Mischungsmodellen [Bogorodskii et al., 1985; Shabtaie und Bentley, 1995] berechnete Wilhelms [1996] aus den dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns mit dem Looyengmischungsmodell [Looyenga, 1965; Glen und Paren, 1975] Dichtewerte, die bereits eine quantitative Übereinstimmung mit  $\gamma$ -Absorptionsdichtemessungen in der Größenordnung von 15 % Relativfehler zeigen [Wilhelms et al., 1998]. Diese Ergebnisse legen eine genaue Studie zwischen Dichte und dielektrischen Eigenschaften nahe. Die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Meßbank ist in Bezug auf diese Fragestellung optimiert. Der Verknüpfung von Dichte und dielektrischen Eigenschaften im polaren Firn über Mischungsmodelle wird in Abschnitt 4.3 behandelt und die um eine Größenordnung verbesserten Ergebnisse diskutiert.

Dielektrische Messungen werden unmittelbar nach der Kernbeschreibung durchgeführt und sind somit die erste über optische Stratigraphie und mittlere Dichtevariationen hinausgehende Information über den Eiskern. Berücksichtigt man Transportzeiten von mehreren Monaten bis das Probenmaterial im heimischen Labor verfügbar ist, so ist alleine der gewonnene Zeitvorsprung eine Motivation, möglichst viel Information aus den dielektrischen Messungen zu gewinnen. Betrachtet man polare Eiskerne als eine unerschöpfliche Quelle besonders reiner bis hin zu mit unterschiedlichen Spezies verschieden stark dotierten Eisproben, für die viele verschiedene Parameter gemessen werden, so kann polykristallines Eis im Zusammenhang mit der Spurenstoffkonzentration studiert werden. In der Literatur findet man zahlreiche Arbeiten über die Abhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften von Defektkonzentrationen, die wiederum von den Spurenstoffen im Eis abhängen [Gränicher et al., 1955, 1957; Camplin und Glen, 1973; Camplin et al., 1978]. Petrenko und Whitworth [1999] geben eine kompakte und übersichtliche Darstellung der heute allgemein zur Beschreibung der dielektrischen Eigenschaften von Eis akzeptierten Theorie von Jaccard [1959, 1965, 1966, 1967; Jaccard und Levi, 1961]. Die Theorie beschreibt eine Relaxation vom Debyeschen [1929] Typ, d.h. bei einer typischen Frequenz von einigen Kilohertz ändern sich die dielektrischen Eigenschaften von Eis grundlegend. Bezogen auf diese Relaxation im niederfrequenten Bereich findet man hohe Dielektrizitätskonstanten um die 100 und höhere und geringe Leitfähigkeiten im Bereich von  $10 \frac{nS}{m}$ . Im hochfrequenten Bereich ist die Dielektrizitätskonstante in der Größenordnung von 1 und die Leitfähigkeit in der Größenordnung von  $10 \frac{\mu S}{m}$ . DEP nach Moore et al. [1990] arbeitet im hochfrequenten Bereich mit für die Identifizierung von Bereichen mit möglichem Spurenstoffeintrag ausreichender Genauigkeit. Eine Verbesserung der Meßgenauigkeit – besonders auch für niederfrequente Messungen – muß bei der Berücksichtigung akzeptierter Meßprinzipien in Parallelplattenkondensatoranwendung für die zylinderförmige Geometrie der DEP Apparatur ansetzen.

Eis besitzt eine quasiflüssige Schicht an seinen Oberflächen [Petrenko und Whitworth, 1999]. Oberflächeneffekte an den Korngrenzen polykristallinen Eises wird man den dielektrischen Materialeigenschaften polykristallinen Eises zurechnen. Bei einer Messung der Volumeneigenschaften sind störende Effekte an der Probenoberfläche abzuschätzen. Die Oberflächenleitfähigkeit wird ausführlich in der Literatur diskutiert, [Maeno, 1973; Maeno und Nishimura, 1978; Caranti und Illingworth,

1983] und zur Vermeidung von Oberflächenströmen bildet der Einsatz von Schutzelektroden eine Standardmethode [Camp et al., 1967, 1969; Bullemer et al., 1969; Engelhardt et al., 1969; Ruepp und Käß, 1969; Cole und Wörz, 1969]. Wilhelms [1996] überdachte und modifizierte die Geometrie der Schutzelektroden bei der DEP Messung und diskutierte erstmals den Einfluß von Oberflächenströmen. Die in dieser Arbeit entwickelte Theorie zur Behandlung von Isolierschichten behandelt das Problem von Oberflächenströmen in Kapitel 3 exakt.

Ein weiteres Problem bei Messungen im Eis stellt die unzureichende Ladungsträgerumwandlung von Protonen im Eis in Elektronen im Meßkreis dar. An den teilweise isolierenden Elektroden treten nicht befriedigend behandelbare Raumladungspolarisationseffekte auf. Zur Schaffung klarer theoretisch behandelbarer Verhältnisse dieser Raumladungspolarisationseffekte [Macdonald, 1953, 1958, 1959, 1974] führte man neben weiteren umständlich zu verwirklichenden Elektroden vollständig isolierende Schichten in den Meßkondensator ein. Zahlreiche Messungen mit Algorithmen zur Ableitung der Eigenschaften von Eis aus den Anordnungen mit Isolierschicht sind beschrieben [Mounier und Sixou, 1969; Gross et al., 1978, 1979, 1980; Gross und Johnson, 1983; Gross und McGehee, 1988].

Die bisherige Anwendung von DEP behandelt Isolierschichten aus Luft höchstens mit der Theorie für Parallelplattenkondensatoren [Moore et al., 1990] und beschränkt sich bis auf vereinzelte Ausnahmen mit Darstellungen der Dielektrizitätskonstanten in anfänglichen methodischen Veröffentlichungen [Moore und Paren, 1987] auf die Diskussion von Leitfähigkeiten. Die Betrachtung der hochfrequenten Dielektrizitätskonstanten und ihre Interpretation als in führender Ordnung von der Dichte bestimmt ist das Ergebnis von Wilhelms [1996]. Die niederfrequente Dielektrizitätskonstante ist wesentlich von der Defektkonzentration im Eis bestimmt, aber einer Messung schwer zugänglich, da kleinste Luftspalte die Messung stark verfälschen können [Auty und Cole, 1952]. Ein Beitrag zur Lösung dieses Problems ist die in Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit behandelte Theorie der vollständigen Isolierschichten für die spezielle zylinderförmige Geometrie eines mittenzentrierten Eiskerns zwischen zwei halbschalenförmigen Elektroden bzw. umgekehrt mittenzentrierte Elektroden in einem Bohrloch. Isolierschichtluftspalte können damit theoretisch exakt behandelt werden. Näherungen und die Luftkapazität der verwendeten Anordnung zu Eichzwecken werden ausführlich diskutiert.

Die abgeleitete Theorie ist nichtlinear, so daß anders als beim Plattenkondensator Isolierschichten nicht mehr unmittelbar herausgerechnet werden können. Kapitel 3 behandelt die praktische Umsetzung der Theorie in die Anwendung mittels numerischer Methoden. Die schon erwähnte Meßbank nach Kapitel 4 ist ein erster Ansatz zur praktischen Durchführung von Messungen mit der zur Anwendung der Theorie im niederfrequenten Bereich benötigten mechanischen Präzision. Die prinzipielle Möglichkeit von niederfrequenten Messungen am Eiskern kann gezeigt werden. Zur kontinuierlichen hochaufgelösten Messung am Eiskern ist zukünftig noch eine automatisierte Kernpositionierung einzubauen, was aber mit mechanischen Standardlösungen zu bewerkstelligen ist.

Die mit verbesserter Meßgenauigkeit zu erwartenden neuen Erkenntnisse über das betrachtete Objekt – hier polares Eis – sind Erwartungen zu Beginn und Motivation während einer methodischen Arbeit. Der bereits mit dem Looyengamodell erklärte

Einfluß der Verdichtung auf die dielektrischen Eigenschaften polaren Firns wurde hier in der Einleitung erwähnt. Mit verbesserter Meßgenauigkeit zu erwartende neue Ergebnisse diskutiert man nach verrichteter Arbeit im Ausblick in Kapitel 5.

# Kapitel 2

## Theorie des geschützten zylinderförmigen Kondensators

In Wilhelms [1996, Kap. 2.3.4] wurde eine theoretische Behandlung der DEP-Apparatur vorgenommen, die Potentialverteilung im Innenraum und die Leerkapazität berechnet. Die Berechnung wurde allerdings in ebenen Polarkoordinaten durchgeführt und die Abweichung vom realen, endlich langen Kondensator nicht weiter diskutiert. Insbesondere zur Definition von Eichstandards ist die in Abschnitt 2.1 vorgenommene Berechnung der Leekapazität eines endlich langen Kondensators relevant. Die Theorie des in Abschnitt 2.3 behandelten geschützten Kondensators mit 2 Schichten ergibt sich als Spezialfall der zuvor in Abschnitt 2.2 behandelten konzentrischen Schichtung mehrerer Lagen.

### 2.1 Theoretische Berechnung der Leerkapazität des zylinderförmigen geschützten Kondensators

Die in Abschnitt 2.1.5 angegebenen Fehler durch Behandlung eines realen Meßkondensators bzw. einer Bohrlochsonde in der Näherung ebener Polarkoordinaten quantifiziert man durch vergleichende Betrachtung eines realen endlich langen Zylinders mit Randspalten und eines unendlich langen Zylinders. Zur Durchführung der theoretischen Abhandlung werden zunächst in Abschnitt 2.1.1 geeignete Koordinatenfestlegungen getroffen, die mit Bestimmung der Potentialverteilung in Abschnitt 2.1.2 und 2.1.3 eine Potenzreihenentwicklung für die Leerkapazität ermöglichen.

#### 2.1.1 Koordinaten und elektrostatische Näherung

Der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  werde im Mittelpunkt des Zylinders vom Radius  $a$  gewählt. Die  $z$ -Achse liege entlang der Achse des aus den

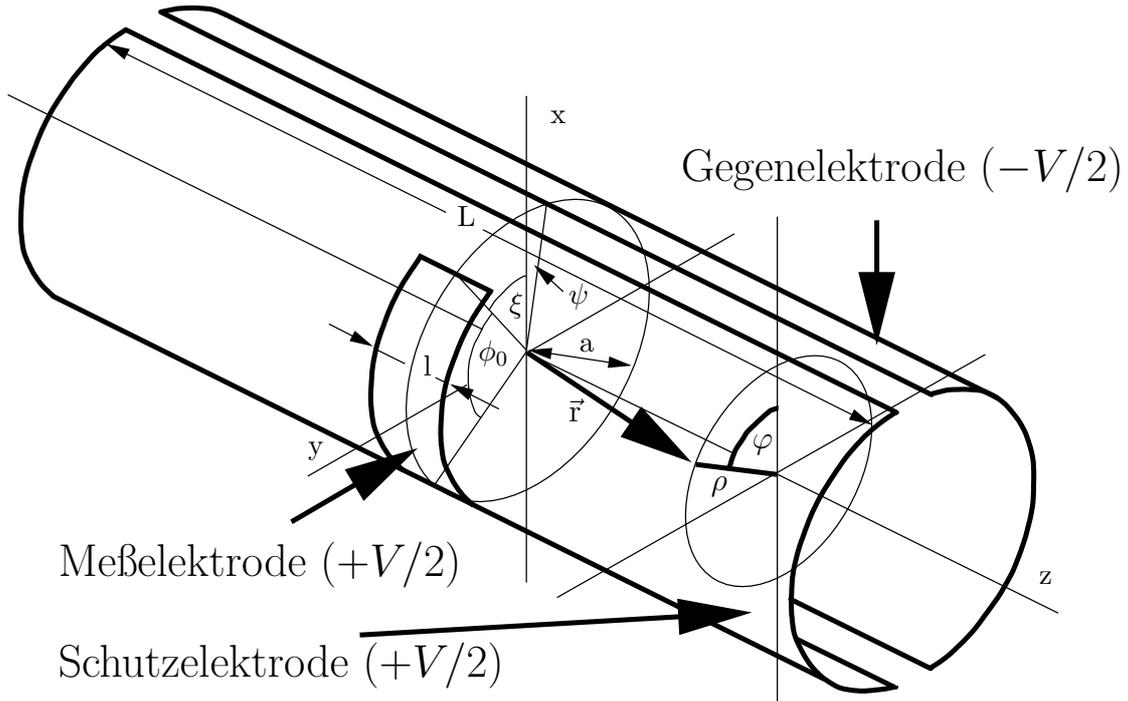


Abbildung 2.1: Koordinatensystem für die Berechnung der Leerkapazität  
 Zwei Halbschalen mit Radius  $a$  bilden einen geschützten Plattenkondensator mit einer Potentialdifferenz  $V$ . Die Schutz- bzw. Gegenelektrode habe die Länge  $L$  symmetrisch um den Ursprung des in der Mitte der Meßelektrode mit der Länge  $l$  gewählten Koordinatensystems. Die Elektrodenhalbschalen sind seitlich durch einen Winkel  $2\psi$  überstreichenden Spalt symmetrisch um die Ebene zwischen den Halbschalen begrenzt, für den das Potential  $0$  angenommen wird. Die Meßelektrode ist mittenzentriert in die Schutzelektrode eingebettet und überstreicht einen Winkelbereich  $\phi_0$  symmetrisch zur  $y$ -Achse des Koordinatensystems. Die Berechnung erfolgt in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  in denen sich jeder beliebige Ortsvektor  $\vec{r}$  darstellen läßt. Den Winkelbereich der Meßelektrode parametrisiert man dann symmetrisch um die  $y$ -Achse für Winkel  $\varphi \in [\xi, \pi - \xi]$ .

beiden Halbschalen geformten Zylinders. Die beiden anderen Achsen sind dann in einer Ebene in der Mitte der Meßelektrode und senkrecht zur  $z$ -Achse. Dabei sei die  $x$ -Achse in der Symmetrieebene zwischen den beiden Halbschalen und die  $y$ -Achse senkrecht dazu. Abbildung 2.1 illustriert das gewählte Koordinatensystem und zeigt außerdem die im folgenden weiter gewählten Definitionen.

Das gestellte Problem ist zylindersymmetrisch, deshalb wählt man anstelle der kartesischen Koordinaten Zylinderkoordinaten. Ein beliebiger Ortsvektor  $\vec{r}$  wird dann in den Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  entsprechend Jackson [1982, Abb. 3.8] dargestellt. Mit der Wahl des Potentials  $+V/2$  für Meß- und Schutzelektrode bzw.  $-V/2$  für die Gegenelektrode ist  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  mit  $0$  entlang der positiven Richtung der  $x$ -Achse eine natürliche Wahl. Die Meßelektrode habe die Länge  $l$ , so daß ihre  $z$ -Koordinate zwischen  $-l/2$  und  $+l/2$  läuft. Sie überspanne ferner einen Winkel  $\phi_0$  symmetrisch um die  $y$ -Achse. Für die Berechnung parametrisiert man die Elektrode mit der Winkelkoordinate, d.h. sie läuft zwischen  $\xi \equiv \pi/2 - \phi_0/2$  und  $\pi - \xi = \pi/2 + \phi_0/2$ . Die

Schutz- und die Gegenelektrode haben z-Koordinaten zwischen  $-L/2$  und  $L/2$ . Ein den Winkel  $2\psi$  überstreichender Spalt auf Potential 0 am Rande kann ebenfalls berücksichtigt werden, d.h. die Schutzelektrode hat Winkelkoordinaten von  $\psi$  bis  $\pi - \psi$  und die Gegenelektrode von  $-\pi + \psi$  bis  $-\psi$ .

Für den Fall einer großen Wellenlänge  $\lambda$  im Vergleich zu den Ausdehnungen der Apparatur reduziert sich nach Jackson [1982, Kap. 2.11] eine allgemeine elektrodynamische Fragestellung auf ein elektrostatisches Problem. Anschaulich variiert das Feld dann nur vernachlässigbar über die Ausdehnung der Apparatur. Für Frequenzen  $f < 100$  MHz schätzt man die Wellenlänge in Luft mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  zu  $\lambda = c/f \gtrsim 3$  m ab, was groß gegen einen Apparaturdurchmesser  $\approx 0.15$  m bzw. eine Meßelektrodenbreite von maximal  $\approx 0.1$  m ist. Alle folgenden Rechnungen werden deshalb in elektrostatischer Näherung vorgenommen.

## 2.1.2 Potentialverteilung

In Wilhelms [1996, Kap. 2.3.2] wurden die Gleichungen für elektrostatische Probleme bereits bereitgestellt. Da alle makroskopischen Ladungen im Innenraum des Zylinders verschwinden, wird das zu lösende Problem vollständig durch die Poisson-Gleichung im Vakuum

$$\Delta \Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

und die oben angegebenen Randbedingungen

$$\Phi(a, \varphi, z) = \begin{cases} -\frac{V}{2} & \text{für } -\pi + \psi < \varphi < -\psi, \quad -L/2 < z < L/2 \\ +\frac{V}{2} & \text{für } \psi < \varphi < \pi - \psi, \quad -L/2 < z < L/2 \\ 0 & \text{fast überall sonst}^1 \end{cases} \quad (2.2)$$

beschrieben.

Natürlich variiert die Potentialverteilung in der Elektrodenumgebung nicht gemäß dem hier vorgegebenen Rechteckverhalten. Da das elektrische Potential der jeweiligen Halbschale von der Oberfläche der Schale zum Unendlichen hin auf Null abfällt bzw. ansteigt und die durch die jeweiligen Halbschalen induzierten Potentialverteilungen linear superponieren, ist das Potential im gesamten Raum durch die Potentialwerte der beiden Halbschalen beschränkt. Zwei Fälle schätzen also die reale Potentialverteilung in der Elektrodenumgebung ab: Das Potential springt bei den Winkeln  $\varphi = \pm\pi$  und die Halbschalen sind unendlich ausgedehnt, oder das Potential springt bei  $\varphi = \pm\psi$  bzw.  $\varphi = \pm(\pi - \psi)$  und den Elektrodenenden bei  $z = \pm L/2$  auf  $\Phi = 0$ . Der hier betrachtete Fall mit Potentialsprung auf Null in der Umgebung ist

---

<sup>1</sup>“fast überall” ist hier im Sinne der Integrationstheorie zu verstehen, d.h. bis auf eine Menge vom Maß Null. Diese Einschränkung beinhaltet die Punkte auf den Rändern, die bei einer Entwicklung in eine Fourierreihe den Wert des Integrals nicht ändern und deshalb unwesentlich sind. Damit stimmt dann auch die später angegebene Entwicklung der Potentialverteilung auf dem Rand in eine Fourierreihe (2.11) mit der hier angegebenen überein, da die Werte auf dem Rand mit anderem Funktionswert nur eine Menge vom Maß Null bilden.

der Allgemeine, wobei alle anderen Fälle sich direkt als Grenzfälle ergeben und so eine obere und untere Abschätzung des berechneten Wertes erlauben.

Gleichung (2.1) löst man nach Jackson [1982, Kap. 3.7] allgemein mit folgendem Separationsansatz:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) Q(\varphi) Z(z) . \quad (2.3)$$

Die Separation führt nach Trennung der Variablen auf die drei folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 , \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0 , \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left( k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 . \quad (2.6)$$

Das gefundene Differentialgleichungssystem entspricht dem in Jackson [1982, Gl. (3.98)] angegebenen. Im folgenden sind jeweils die drei homogenen Differentialgleichungen zu lösen.

### 2.1.2.1 Lösung des Zylinderachsenanteils ( $Z$ )

Die Abhängigkeit der Potentialfunktion  $\Phi$  von der  $z$ -Koordinate ist nach der Separation vollständig in der Gleichung (2.4) für die separierte  $Z(z)$  Funktion enthalten. Gleichung (2.4) hat die Lösungen  $\sin kz$  und  $\cos kz$  [Jackson, 1982, Kap. 3.7]. Die möglichen  $k$  bestimmt man nun aus den Randbedingungen des Problems. Die Potentialverteilung auf dem Rand (2.2) ist gerade bezüglich der  $z$ -Koordinate, d.h. die ungeraden  $\sin kz$  sind keine Lösungen. Ferner soll das Potential auf dem Rand bei  $z = \pm L/2$  verschwinden. Da das Verschwinden bei  $z = -L/2$  für eine gerade Funktion mit dem Verschwinden bei  $z = L/2$  bereits erfüllt ist, ergibt sich für die  $\cos kz$  die Bedingung  $\cos(kL/2) = 0$ . Der Cosinus verschwindet bei  $(2n+1)\pi/2$  für ganzes  $n \in \mathbb{Z}$ , das o.B.d.A. als natürlich  $n \in \mathbb{N}_0$  angenommen werden kann, da sich die positiven und negativen Lösungen nicht unterscheiden. Damit ergeben sich aus der Bedingung  $kL/2 = (2n+1)\pi/2$  die möglichen  $k = (2n+1)\pi/L$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die möglichen Lösungen sind also:

$$\cos(2n+1) \frac{\pi z}{L} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0 . \quad (2.7)$$

Die beiden Lösungen für  $k = 0$ ,  $Z(z) = 1$  und  $Z(z) = z$  schließt man mit ihrem Nichtverschwinden für  $z = \pm L/2$  ebenfalls aus. Für die nachfolgende Diskussion wird noch die Fourierentwicklung der 1 benötigt werden. Nach Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn. 4.4.1.2 Gl. 42] folgt:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1) \frac{\pi z}{L}}{2n+1} \quad \text{für} \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} . \quad (2.8)$$

Für  $z = \pm L/2$  ist diese Summe nach dem Kriterium von Dirichlet-Jordan [Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 4.4.2.1], das für die Unstetigkeitsstelle eines Fourierintegrals als Funktionswert den Mittelwert des oberen und unteren Grenzwertes angibt, tatsächlich 0, denn dort springt die Summe nach  $-1$ .

### 2.1.2.2 Lösung des Winkelanteils ( $Q$ )

Analog zur Lösung des  $Z$ -Anteils sind die Lösungen der Gleichung für den  $Q$ -Anteil (2.5) ebenfalls  $\sin \nu\varphi$  und  $\cos \nu\varphi$ . Da das Potential auf dem Rand (2.2) ungerade in  $\varphi$  ist, kommen in diesem Fall nur die ungeraden  $\sin \nu\varphi$  als Lösung in Frage. Zunächst folgt aus der Bedingung einer in  $\varphi = \pi$  verschwindenden Lösung, aus dem Verschwinden des Sinus bei ganzen Vielfachen von  $\pi$ , daß  $\nu \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl sein muß. Da sich die Lösungen für positives und negatives  $\nu$  nur um ein Vorzeichen unterscheiden kann o.B.d.A.  $\nu \in \mathbb{N}_0$  als natürlich angenommen werden. Mit der geraden Symmetrie des Potentials auf dem Rand (2.2) bzgl. der  $y$ -Achse sortiert man die Lösungen mit geradem  $\nu$  wie unten folgend aus. Die gerade Symmetrie bzgl. der  $y$ -Achse fordert  $Q(\pi - \varphi) = Q(\varphi)$ . Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt aber andererseits  $\sin(\nu\pi - \nu\varphi) = \sin \nu\pi \cos \nu\varphi - \cos \nu\pi \sin \nu\varphi = (-1)^{\nu+1} \sin \nu\varphi$ , d.h. die Bedingung an  $Q$  läßt sich nur für ungerade  $\nu$  erfüllen. Damit sind die Lösungsfunktionen des Problems gerade:

$$\sin(2m+1)\varphi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.9)$$

Die Lösungen für  $\nu = 0$ ,  $Q(\varphi) = 1$  und  $Q(\varphi) = \varphi$  sortiert man ebenfalls aus, da sie gerade bzw. nicht bei  $\pm\pi$  verschwinden. Für die weitere Diskussion wird die Fourierreihe der 1 nach diesen Funktionen die Diskussion vereinfachen. Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn. 4.4.1.2 Gl. 37] geben an:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} \quad \text{für} \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (2.10)$$

Nutzt man weiter, daß für negative Elemente die Relation (2.10) negativ wird und für  $\varphi = 0$  bzw.  $\varphi = \pi$  nach dem Kriterium von Dirichlet-Jordan [Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 4.4.2.1] verschwindet, so verifiziert man durch eine Fallunterscheidung und anschließende Anwendung eines Additionstheorems:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi \cos(2m+1)\psi}{2m+1} = \\ = & \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\sin(2m+1)(\varphi-\psi)}{2m+1} + \frac{\sin(2m+1)(\varphi+\psi)}{2m+1} \right) = \\ = & \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi < \varphi < -\pi + \psi \\ -1 & \text{für} \quad -\pi + \psi < \varphi < -\psi \\ 0 & \text{für} \quad -\psi < \varphi < \psi \\ 1 & \text{für} \quad \psi < \varphi < \pi - \psi \\ 0 & \text{für} \quad \pi - \psi < \varphi \leq \pi \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad \varphi = \psi \text{ oder } \pi - \psi \\ -\frac{1}{2} & \text{für} \quad \varphi = -\psi \text{ oder } -\pi + \psi \end{cases} \quad (2.11) \end{aligned}$$

### 2.1.2.3 Lösung des Radialanteils ( $R$ )

Die Gleichung für den  $R$ -Anteil (2.6) wird durch die modifizierten Bessel-Funktionen gelöst [Jackson, 1982, Kap. 3.7]. Nach Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn.

3.3.1.3.4] kombinieren für ganzzahliges  $\nu$  die sogenannten modifizierten Besselschen Funktionen erster ( $I_\nu(k\rho)$ ) und zweiter ( $K_\nu(k\rho)$ ) Gattung linear zu einer allgemeinen Lösung. In Abschnitt 2.1.2.2 wurde bereits diskutiert, daß  $\nu$  ganzzahlig zu fordern ist. Die  $I_\nu$  sind für  $\rho \rightarrow 0$  beschränkt und für  $\rho \rightarrow \infty$  unbeschränkt, während die  $K_\nu$  für  $\rho \rightarrow \infty$  beschränkt und für  $\rho \rightarrow 0$  unbeschränkt sind [Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 3.3.1.3.4]. Damit sind die  $I_\nu$  Lösungen im Innenraum des Zylinders und die  $K_\nu$  Lösungen im Außenraum des Zylinders. Verwendet man die in Abschnitt 2.1.2.1 gefundene Relation für  $k = (2n+1)\pi/L$  und normiert die Lösungsfunktionen auf der Mantelfläche des Zylinders auf 1, so sind die Lösungsfunktionen mit den in den Abschnitten 2.1.2.1 und 2.1.2.2 gefundenen Werten für  $\nu$  und  $k$ :

$$\frac{I_{2m+1}\left((2n+1)\frac{\pi\rho}{L}\right)}{I_{2m+1}\left((2n+1)\frac{\pi a}{L}\right)} \quad \text{für} \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (2.12)$$

im Innern des Zylinders und

$$\frac{K_{2m+1}\left((2n+1)\frac{\pi\rho}{L}\right)}{K_{2m+1}\left((2n+1)\frac{\pi a}{L}\right)} \quad \text{für} \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (2.13)$$

außerhalb des Zylinders.

#### 2.1.2.4 Potenzreihe für die Potentialverteilung

Allgemein ist die Potentialfunktion  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  nun als Linearkombination der oben hergeleiteten Lösungsfunktionen anzusetzen. Für die Lösungsfunktionen existieren Orthogonalitätsrelationen, so daß die Integration des Ansatzes über das Randgebiet (2.2) die Koeffizienten der Reihenentwicklung liefert. Diese Entwicklung wurde durchgeführt, ist aber sehr aufwendig und unübersichtlich. Auf dasselbe Ergebnis führt die unten durchgeführte anschaulichere Herleitung. In den vorangegangenen Abschnitten wurden bereits die normierten Fourierreihen für die Entwicklung auf dem Rand (2.8) und (2.11) unter Berücksichtigung aller nichtverschwindender Funktionen hergeleitet. Ferner wurden die auf dem Rand auf 1 normierten Lösungsfunktionen für den Radialanteil  $R$  (2.12) und (2.13) angegeben. Multipliziert man das Produkt der beiden Reihen und des Radialanteils mit dem Potential der Meßelektrode  $+V/2$ , wobei über den Radialanteil zu summieren ist, so erhält man die allgemeine Lösung des Problems für  $\Phi_<$  im Innern und  $\Phi_>$  außerhalb des Zylinders:

$$\begin{aligned} \Phi_{\{\leq\}}(\rho, \varphi, z) &= \frac{8V}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2m+1)\varphi \cos(2m+1)\psi}{2m+1} \times \\ &\times \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi z}{L} \left\{ \begin{array}{l} I_{2m+1} \\ K_{2m+1} \end{array} \right\} \left( (2n+1)\frac{\pi\rho}{L} \right)}{2n+1 \left\{ \begin{array}{l} I_{2m+1} \\ K_{2m+1} \end{array} \right\} \left( (2n+1)\frac{\pi a}{L} \right)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Leerkapazität

In Wilhelms [1996, Abschn. 2.3.4.1] wurde zur Berechnung der Oberflächenladungsdichte  $\hat{\sigma}$  aus der Potentialverteilung  $\Phi_i$  im Innern des betrachteten Gebietes mit

einer relativen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  bzw.  $\Phi_a$  außerhalb des betrachteten Gebietes aus der Ableitung in Richtung der Flächennormalenrichtung  $\vec{n}$  hergeleitet. Für die hier vorgenommene Berechnung werden Metallelektroden angenommen, so daß die Ableitung des Potentials im Außenraum  $\frac{\partial \Phi_a}{\partial \vec{n}}$  verschwindet, da das Innere von Metallen feldfrei ist. Die Relation für die Oberflächenladungsdichte ist dann:

$$\hat{\sigma} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \vec{n}} . \quad (2.15)$$

$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$  bezeichnet die Dielektrizitätskonstante des Vakuums. Für die Betrachtung hier ist die betrachtete Zylinderoberfläche senkrecht auf dem Radiusvektor, es ist also partiell nach  $\rho$  zu differenzieren, für den Bereich innerhalb des Zylinders in positiver Richtung, für den Bereich außerhalb des Zylinders in negativer Richtung. Die Ladung  $Q$  auf der Meßelektrode ergibt sich dann als Integral der Flächenladungsdichte über die Grenzen der Meßelektrode:

$$Q_{\{\lessgtr\}} = \{\pm\} \int_{\xi}^{\pi-\xi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho'} \Phi_{\{\lessgtr\}}(\rho', \varphi', z') \Big|_{\rho'=a} dz' a d\varphi' . \quad (2.16)$$

### 2.1.3.1 Ableitungen der modifizierten Besselfunktionen

Zur Berechnung der Ladung auf der Meßelektrode ist die Ableitung bezüglich der Radialkoordinate zu bilden. Die modifizierten Besselfunktionen sind von der Radialkoordinate  $\rho$  abhängig. Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn. 3.3.1.3.4] geben Relationen für die Ableitungen der modifizierten Besselfunktionen an, die nach geeigneter Umformung auf die hier benötigten Relationen führen:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} I_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi \rho}{L}\right) \Big|_{\rho=a}}{I_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)} = \frac{2m+1}{a} + \frac{(2n+1) \pi}{L} \frac{I_{2m+2}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)}{I_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)} , \quad (2.17)$$

$$-\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} K_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi \rho}{L}\right) \Big|_{\rho=a}}{K_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)} = \frac{2m+1}{a} + \frac{(2n+1) \pi}{L} \frac{K_{2m}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)}{K_{2m+1}\left((2n+1) \frac{\pi a}{L}\right)} . \quad (2.18)$$

### 2.1.3.2 Potenzreihenentwicklung für die Leerkapazität

Setzt man die Potentialentwicklung (2.14) in die Formel für die Ladung auf der Meßelektrode (2.16) ein, wertet mit Hilfe der Relationen für die Ableitungen (2.17) bzw. (2.18) die Differentiation aus und führt die Integrationen durch, so erhält man nach Division durch die Potentialdifferenz  $V$  und herausziehen von  $\varepsilon$  eine Reihenentwicklung für die Leerkapazität  $C_0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon C_{0\{\lessgtr\}} &= \frac{Q_{\{\lessgtr\}}}{V} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{32 a L}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2m+1)\xi \cos(2m+1)\psi}{(2m+1)^2} \times \\ &\times \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \frac{\pi}{L}}{(2n+1)^2} \left( \frac{2m+1}{a} + \frac{(2n+1)\pi}{L} \frac{\left\{ \frac{I_{2m+2}}{K_{2m}} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)}{\left\{ \frac{I_{2m+1}}{K_{2m+1}} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die erste Doppelsumme ohne modifizierte Besselfunktionen wird ausgewertet, indem man das Produkt der Cosinus nach  $2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 2.5.2.1.3] in eine Summe umwandelt. Die nach Kürzen verbleibende Doppelsumme läßt sich in das Produkt zweier Fourierreihen der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \cot \frac{x}{2}$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \frac{\pi x}{4}$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 4.4.1.2 Gln. 36 bzw. 45] aufspalten. Einsetzen und Zusammenfassen ergibt:

$$C_{0\{\leq\}} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \ln \left( \cot \frac{\xi - \psi}{2} \cot \frac{\xi + \psi}{2} \right)}_{C_0^\infty} + \underbrace{\frac{32 a \varepsilon_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{(2n+1) \pi}{2L}}{(2n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1) \xi \cos(2m+1) \psi}{(2m+1)^2} \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} I_{2m+2} \\ K_{2m} \end{smallmatrix} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)}{\left\{ \begin{smallmatrix} I_{2m+1} \\ K_{2m+1} \end{smallmatrix} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)}}_{C_0^L\{\leq\}}. \quad (2.20)$$

Der erste Term der Gleichung ist die in Wilhelms [1996, Gl. (2.44)] bereits für einen unendlich langen Zylinder berechnete Leerkapazität. In der Grenze  $L \rightarrow \infty$  verschwindet die Doppelsumme  $C_0^L$  wegen des verschwindenden Sinus tatsächlich. Die gewonnene Relation ist also die Kapazität eines unendlich langen Zylinders  $C_0^\infty$  mit dem Korrekturterm  $C_0^L$  für einen endlich langen Zylinder.

#### 2.1.4 Auswertung des Korrekturterms $C_0^L$ für einen endlich langen Zylinder

Die hier angestellten Rechnungen sollen einen Eichstandard liefern, der mit einer Fehlerabschätzung zu rechtfertigen ist. Der führende Term für einen unendlich langen Zylinder  $C_0^\infty$  läßt sich aus im System elektronischer Rechner implementierten Funktionen direkt berechnen. Der Korrekturterm für einen endlich langen Zylinder  $C_0^L$  wird mit dem eigens dafür entwickelten Programm `aircap` berechnet. Die Sicherstellung der numerischen Genauigkeit des in Anhang B aufgelisteten Quellcodes `aircap.c` wird im folgenden kurz diskutiert. Die Reihe für  $C_0^L$  läßt sich nicht mit einer absolut konvergenten Reihe majorisieren, da die Doppelsumme in der Summation über  $n$  nur mit  $\frac{1}{2n+1}$  abfällt. Eine einfache Grenzwertbetrachtung und Zerlegung in zwei Anteile, die unabhängig voneinander majorisiert werden, ist damit nicht möglich. Die exakte Betrachtung dieser Doppelreihe erfordert, Heuser [1990a, Kapitel 44] folgend, die Betrachtung eines sogenannten Cauchynetzes, das eine begriffliche Verallgemeinerung des Cauchyriteriums für Reihen [Heuser, 1990a, Satz 33.1] auf mehrdimensionale Summationsbereiche ist. Der Summationsbereich  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  der Doppelfolge ist nicht mehr angeordnet, kann aber mit der Erklärung einer Relation  $\prec$ :  $(a, b) \prec (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$  und  $b \leq d$  gerichtet werden. Die reellwertige Funktion  $C_0^L$  auf der gerichteten Menge  $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \prec)$  nennt man ein Netz. Ein Netz  $(f_z)$  nennt man nun ein Cauchynetz, wenn es zu jeder beliebigen Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  eine Stelle  $z_0$  gibt, so daß für alle  $z_0 \prec z_1, z_2$  stets  $|f_{z_1} - f_{z_2}| < \epsilon$  bleibt. Nach Heuser [1990a, Satz 44.6] konvergieren Netze genau dann, wenn sie Cauchynetze sind. Es gilt also hier ein  $z_0 = (N, M)$  so zu finden, daß jede beliebige Restsumme außerhalb des von  $N$  und  $M$  begrenzten Gebiets kleiner als die Fehlerschranke  $\epsilon$  bleibt.

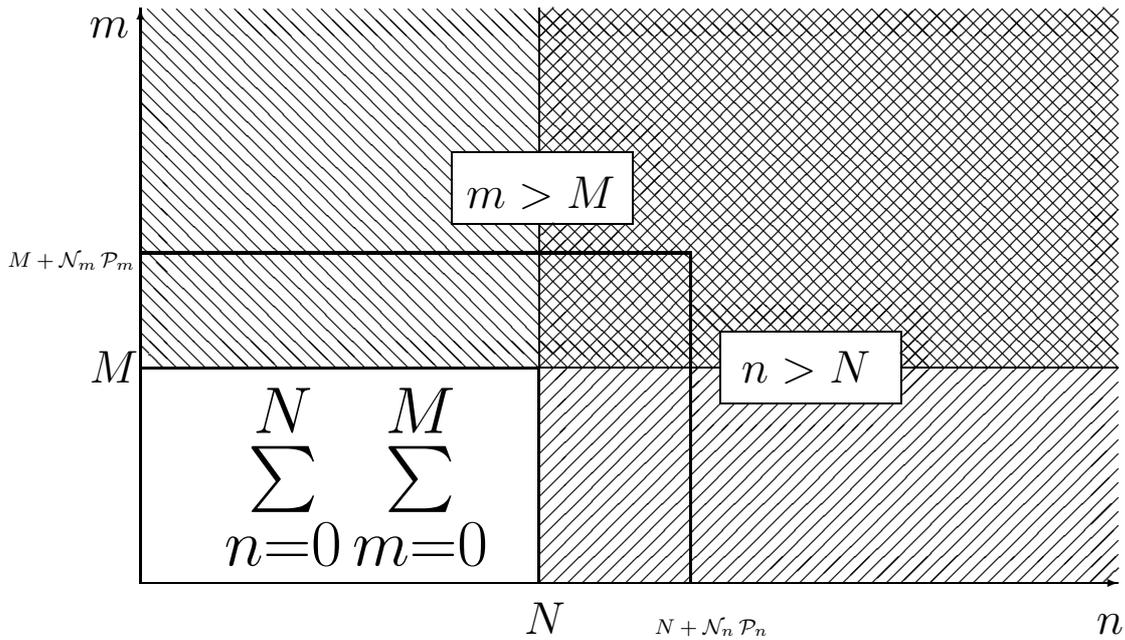


Abbildung 2.2: Fehlerabschätzung für die Auswertung der Doppelsumme

Der Bereich mit  $m \leq M$  und  $n \leq N$  wird bei der Berechnung der Doppelsumme berücksichtigt. Die schraffierten Bereiche für  $m > M$  und  $n > N$  werden dementsprechend nicht berücksichtigt. Nach Vorgabe einer geeigneten Fehlerschranke  $\epsilon$  sind dann  $N$  und  $M$  so zu wählen, daß der Gesamtfehler kleiner als  $\epsilon$  ist. Bei der Auswertung wird das Supremum und Infimum der Summe aller Terme über den schraffierten durch  $N + \mathcal{N}_n \mathcal{P}_n$  und  $M + \mathcal{N}_m \mathcal{P}_m$  begrenzten Bereich zur Überprüfung des Cauchy-Kriteriums über eine Anzahl  $x$  von Perioden gebildet.

Die Cauchybedingung ist die bei numerischen Berechnungen häufig angewandte Abbruchbedingung. Bei einer Reihe mit oszillierenden Gliedern wird man über mehrere Periodenlängen das Intervall der Reihenfunktionswerte bestimmen und, falls seine Schwankungsbreite unter der Fehlergrenze bleibt, die Berechnung beenden.

Im zweidimensionalen Fall betrachtet man die Schwankung über ein Gebiet in beiden Summationsrichtungen. Bricht man die Summation entsprechend Abbildung 2.2 nach  $N$  Summationen in  $n$  Richtung bzw.  $M$  Summationen in  $m$  Richtung ab, so zieht man das in Abbildung 2.2 eingezeichnete Gebiet über mehrere Periodenlängen  $\mathcal{N}_n, \mathcal{N}_m$  zur Abschätzung des Fehlers  $\epsilon$  heran, für den das Supremum über den Betrag der summierten Glieder im Gebiet ein Maß ist.

Alles weitere beschränkt sich also nun auf die Bestimmung der Periodenlängen und die Wahl geeigneter Summationsgrenzen  $N$  und  $M$ . Zur Bestimmung der längsten Perioden faßt man in der Doppelreihe für  $C_0^L$  in Gleichung (2.20) durch Entwicklung von  $(-1)^n = \sin \frac{(2n+1)}{2} \pi$  und Umformung der Produkte der Winkelfunktionen entsprechend Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn. 2.5.2.1.3.] geeignet zusammen:

$$C_0^L_{\{\leq\}} = \frac{8 a \varepsilon \varepsilon_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)}{2} \pi \left(1 - \frac{1}{L}\right)\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)}{2} \pi \left(1 + \frac{1}{L}\right)\right)}{(2n+1)} \times \quad (2.21)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)(\xi - \psi)) + \cos((2m+1)(\xi + \psi))}{(2m+1)^2} \frac{\left\{ \frac{I_{2m+2}}{K_{2m+2}} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)}{\left\{ \frac{I_{2m+1}}{K_{2m+1}} \right\} \left( (2n+1) \frac{\pi a}{L} \right)}.$$

Die längste Periode in der Summe über  $n$  ergibt sich aus der Bedingung  $\mathcal{P}_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \stackrel{!}{=} 2\pi$ , während die in der Summe über  $m$  sich aus  $\mathcal{P}_m (\xi - \psi) \stackrel{!}{=} 2\pi$  ergibt. Berücksichtigt man nun, daß die Winkelfunktionen jeweils eine halbe Periode ein positives bzw. ein negatives Vorzeichen beitragen, so sind die maximal aufsummierten Abweichungen gerade das Produkt des maximalen Koeffizienten eines Terms mit der jeweils halben Periodenlänge  $\frac{\mathcal{P}_n}{2} \frac{\mathcal{P}_m}{2}$ .

In Anhang A.1 wird gezeigt, daß die Verhältnisse der modifizierten Besselfunktionen (A.1) bzw. (A.3) in Gleichung (2.21) kleiner als 1 bleiben, also wird der Maximalwert eines Terms nach Zerlegung der Summationsebene in die beiden Halbebenen entsprechend Abbildung 2.2 gerade durch die Faktoren  $\frac{1}{2N+1}$  bzw.  $\frac{1}{(2M+1)^2}$  und den Vorfaktor  $\frac{32 a \varepsilon \varepsilon_0}{\pi^2}$  bestimmt. Aufteilung des Fehlers auf die jeweiligen Halbebenen liefert damit die Bedingungen für Summationsobergrenzen:

$$\frac{32 a \varepsilon \varepsilon_0}{\pi^2} \frac{\mathcal{P}_n}{2} \frac{\mathcal{P}_m}{2} \frac{1}{2N+1} \stackrel{!}{\leq} \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.22)$$

$$\frac{32 a \varepsilon \varepsilon_0}{\pi^2} \frac{\mathcal{P}_n}{2} \frac{\mathcal{P}_m}{2} \frac{1}{(2M+1)^2} \stackrel{!}{\leq} \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.23)$$

Die berechnete Leerkapazität ist entsprechend der bei der Wahl der Randbedingungen für die Potentialverteilung (2.2) angestellten Betrachtungen der Mittelwert des Wertes für einen unendlich langen Zylinder ohne Luftspalt  $C_0^\infty|_{\psi=0}$  und des hier berechneten realen Zylinders mit Potentialsprung auf Null an seinen Enden und im Luftspalt  $C_0^\infty + C_0^L$ . Der Fehler ist entsprechend die halbe Intervallbreite zwischen diesen beiden Werten.

### 2.1.5 Gültigkeit der Behandlung in ebenen Polarkoordinaten

Die eben abgeleitete Theorie ermöglicht nun eine DEP-Apparatur oder Bohrlochsonde so zu dimensionieren, daß sie sich wie eine unendlich lang ausgedehnte Anordnung ohne Luftspalte verhält und deshalb theoretische Betrachtungen in ebenen Polarkoordinaten vorgenommen werden können. Das in Anhang B bereitgestellte Programm `aircap.c` kann zur Behandlung spezieller Dimensionierungsprobleme im Einzelfall verwendet werden. Hier sollen nur einige grundsätzliche Interpretationen der berechneten Kapazität dargelegt werden.

### 2.1.5.1 Abhängigkeit der Leerkapazität von der Länge der Schutz- elektrode

Die Abbildung 2.3 zeigt die Ergebnisse für einen realen DEP-Kondensator (Abb. 2.3a) und eine reale Bohrlochsonde (Abb. 2.3b), ohne Luftspalte. Das grau unterlegte Intervall gibt die Grenzen für die Leerkapazität zwischen der Lösung für den unendlich langen Zylinder  $C_0^\infty$  und dem endlich langen mit Potential auf Null an den Grenzen des Zylinders  $C_0^L$  an. Dementsprechend ist für den Wert der Leerkapazität  $C_0^\infty + C_0^L/2$  mit einem Fehlerintervall von  $C_0^L/2$  angegeben.

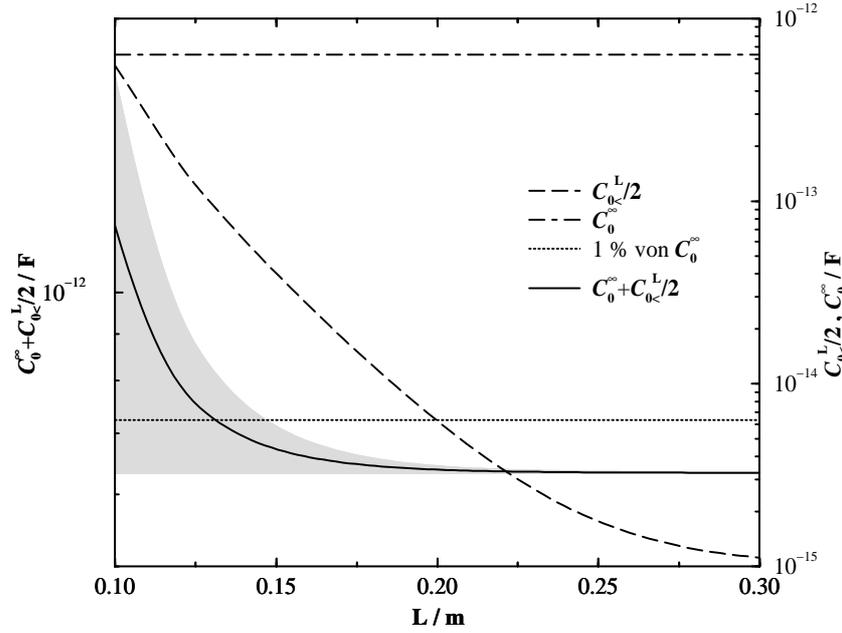
Für die Dimensionierung einer Apparatur wählt man eine Länge, für die  $C_0^L/2$  unter die angestrebte Genauigkeit fällt. Der Vergleich der Abbildungen 2.3a und 2.3b zeigt, daß der Korrekturterm für den Innenraum wesentlich schneller abfällt, als für den Außenraum. Während für die gewählten Abmessungen der zusätzliche Beitrag des Korrekturterms im Innenraum schon bei 20 cm Schutzelektrodenlänge auf 1 % abgefallen ist, muß im Außenraum die Schutzelektrode mehr als sechsmal so lang sein, um den zusätzlichen Beitrag des Korrekturterms auf unter 1 % zu drücken.

Eine anschauliche Interpretation der Ergebnisse entwickelt man ausgehend von der Proportionalität von Feldliniendichte und influenzierter Ladung. Je länger der Zylinder ist, desto mehr wird das Feld in der Mitte im Meßelektrodenbereich zusammengedrückt und Feldkomponenten in Richtung der Zylinderachse werden kleiner. Damit ist aber anschaulich klar, daß die Leerkapazität eines endlich langen Zylinders größer ist als die eines unendlich langen, da für den zusätzlich vom Feld durchgrifenen Raum mehr Ladungen auf der Oberfläche als Feldlinienquellen untergebracht werden können. Da der Innenraum effektiver umschlossen wird als ein nach unendlich ausgedehnter Außenraum, wird das Feld im Innenraum stärker zusammengedrückt als im Außenraum.

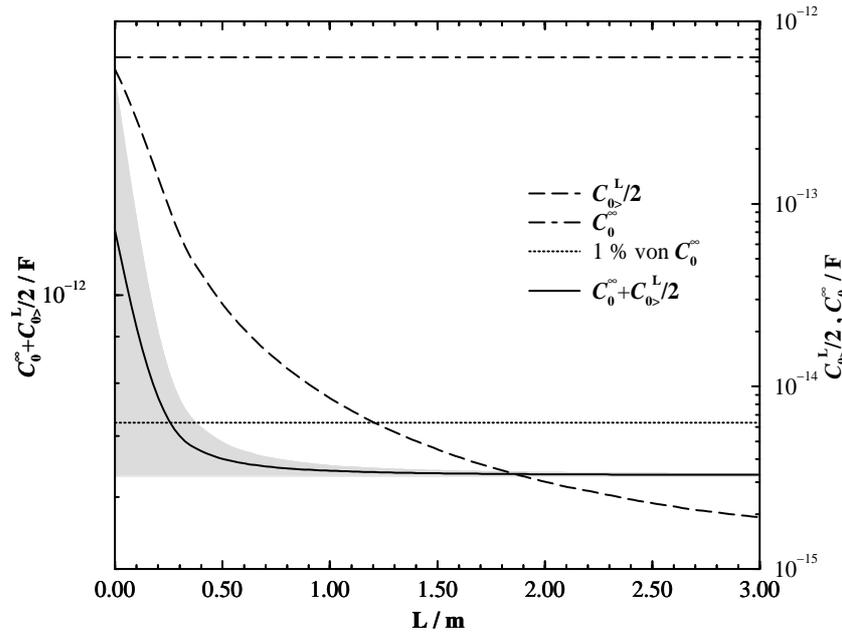
Diese gute Annäherung der Leerkapazität für einen endlich langen DEP-Kondensator an einen unendlich langen bereits bei 30 cm Schutzelektrodenlänge verifiziert theoretisch die bisher von Wilhelms [1996] und Wilhelms et al. [1998] gemachten Annahmen der Behandelbarkeit des DEP-Kondensators in ebenen Polarkoordinaten für einen 70 cm langen Kondensator. Eine Bohrlochsonde muß länger dimensioniert werden. Eine wenige Meter lange Bohrlochsonde ist aber noch gut zu handhaben und insofern stellen die hier von der Theorie geforderten Dimensionen keine Einschränkung an die technische Machbarkeit dar. Die konservative Wahl von 70 cm Schutzelektrodenlänge des DEP-Kondensators könnte bei zukünftigen Dimensionierungen von Apparaturen sogar auf 30 cm reduziert werden, da dann die Unsicherheit mit der Länge gleich groß mit der Unsicherheit der aus technischen Gründen verbleibenden Luftspalte bleibt.

### 2.1.5.2 Abhängigkeit der Leerkapazität von Luftspalten am Rand

Abbildung 2.4 zeigt die Abhängigkeit der Leerkapazität von den Luftspalten zwischen den Elektroden. Beim Zerschneiden der Aluminiumrohre für einen DEP-Kondensator schneidet das Kreissägeblatt einen 5 mm breiten Spalt frei, der für ein



2.3a: DEP-Kondensator (Innenraum)



2.3b: Bohrlochsonde (Außenraum)

Abbildung 2.3: Variation der Leerkapazität eines realen DEP-Kondensators (a.) und einer Bohrlochsonde (b.) mit der Schutzelektrodenlänge

Der Beitrag eines unendlich langen Kondensators  $C_0^\infty$  und die zusätzliche Leerkapazität  $C_0^L/2$  bei endlicher Länge entsprechend Gleichung (2.20), sowie ihre Summe  $C_0^\infty + C_0^L/2$  mit grau unterlegtem Fehlerintervall sind für einen Kondensator mit variabler Schutzelektrodenlänge  $L$  aufgetragen. Die Meßelektrode ist 100 mm lang und überdeckt einen bei  $\xi = \frac{\pi}{5}$  von der Mittelebene beginnenden Bereich. Der Kondensator hat keinen Luftspalt zwischen den Elektroden, d.h.  $\psi = 0$ . Die diskutierte 1 % Schranke ist eingetragen.

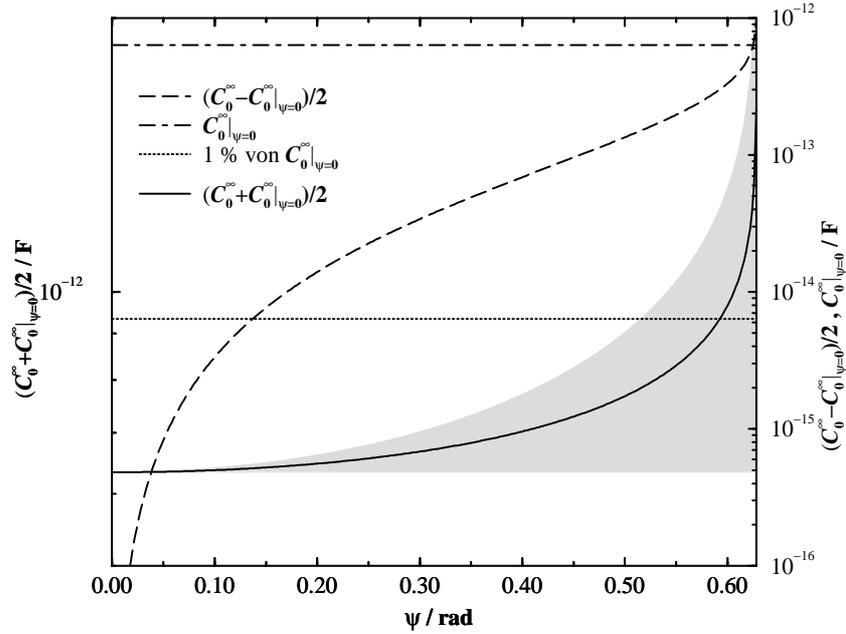


Abbildung 2.4: Variation der Leerkapazität eines Kondensators mit der Luftspaltbreite

Der Beitrag des Luftspaltes zur Leerkapazität eines unendlich langen Kondensators  $(C_0^\infty - C_0^\infty|_{\psi=0})/2$  im Vergleich zur Leerkapazität des Kondensators ohne Luftspalt  $C_0^\infty|_{\psi=0}$  sowie die Leerkapazität eines Kondensators mit Luftspalt  $(C_0^\infty + C_0^\infty|_{\psi=0})/2$  in ihren grau unterlegten Fehlergrenzen zwischen  $C_0^\infty|_{\psi=0}$  und  $C_0^\infty$  sind gegen den vom Luftspalt überstrichenen Winkel  $\psi$  im Intervall  $[0, \frac{\pi}{5}]$  mit der Funktion  $C_0^\infty$  entsprechend Gleichung (2.20) aufgetragen. Die Meßelektrode ist 100 mm lang und überdeckt einen bei  $\xi = \frac{\pi}{5}$  von der Mittelebene beginnenden Bereich. Die diskutierte 1 % Schranke ist eingetragen.

Rohr von 100 mm Durchmesser einen Luftspalt mit einem Winkel von  $\psi = 0.05$  rad bedingt.

Auch hier ist der Einfluß des Luftspaltes bei den oben zitierten bestehenden Apparaturen weit unter 1 % und in der gleichen Größenordnung wie der Einfluß der endlichen Länge des Rohres.

## 2.2 Theoretische Behandlung des geschützten zylinderförmigen Kondensators mit konzentrisch geschichtetem Dielektrikum

Nachdem im Abschnitt 2.1 der endlich lange, geschützte zylinderförmige Kondensator diskutiert und in Abschnitt 2.1.5 gezeigt wurde, daß die Behandlung eines unendlich langen Zylinders in Polarkoordinaten in Abhängigkeit von der Schutzelektrodenlänge eine beliebig genaue Näherung ist, die mit technisch sinnvollen Abmessungen problemlos erreicht werden kann, soll das Problem konzentrisch geschichteter Dielektrika in ebenen Polarkoordinaten behandelt werden. Berücksichtigt man die

Variation der Dielektrizitätskonstanten des Mediums in Richtung der Zylinderachse, so variiert die Potentialverteilung für ein jeweils in der Ebene senkrecht zur Zylinderachse homogenes Medium nicht. Eine Variation der Dielektrizitätskonstanten entlang der Zylinderachse trägt, wie in Wilhelms [1996, Abschn. 2.3.5] im Zusammenhang mit Kernrandeffekten diskutiert, erst bei der Berechnung der Kapazität bei. Die Potentialverteilung ist jeweils gleich und bei Anwesenheit eines Dielektrikums wird um den Faktor der relativen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  mehr Ladung auf der Meßelektrode influenziert. Dies wird, wie in Wilhelms [1996, Abschn. 2.3.5] dargestellt, auch experimentell beobachtet.

Für ein konzentrisch um die Zylinderachse geschichtetes Medium variiert die Potentialverteilung entlang der Zylinderachse mit variierenden Dielektrizitätskonstanten, da die Dielektrizitätskonstanten wie im folgenden in Abschnitt 2.2.2 diskutiert in die Berechnung der Potentialverteilung eingehen. Daran anschließend soll deshalb in Abschnitt 2.2.6 eine Abschätzung für den maximalen Einfluß der benachbarten Schicht auf die Kapazitätsmessung in einem konzentrisch geschichteten Medium gegeben werden. Eine allgemeine Theorie ist sehr kompliziert, aber das Modell eines Plattenkondensators ist für kleine Spalte eine gute Näherung mit geringen Abweichungen. Die Annäherung mit dem Modell eines Plattenkondensators benötigt die Potentiale auf den Begrenzungsflächen, die zunächst berechnet werden. Die Gültigkeit der verwendeten Theorie ist deshalb für jede Apparaturdimensionierung separat abzuschätzen. Für zwei Schichten wird das Modell eines Plattenkondensators (Abschnitt 2.2.6) nach Ableitung der für seinen Antrieb benötigten Relationen für Potentialverteilung und Feldlinienparametrisierung (Abschnitt 2.3) in Abschnitt 2.3.6 angewandt. Im folgenden beginnt die Diskussion der Theorie mit der Festlegung der Polarkoordinaten und der Eigenschaften der Dielektrika.

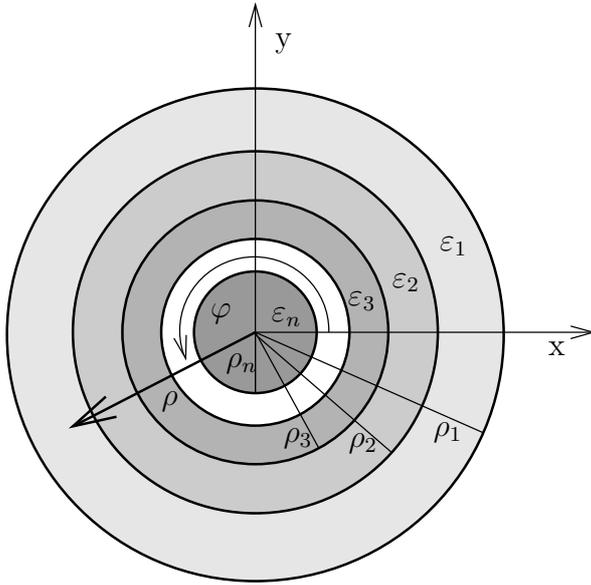
## 2.2.1 Koordinaten und Ansatz für die Dielektrizitätskonstanten

Die Koordinatenbezeichnungen aus Abschnitt 2.1.1 werden beibehalten, nur daß die Abhängigkeit in  $z$ -Richtung wegfällt. Zusätzlich führt man entsprechend Abbildung 2.5 im Innern des Kondensators von der Elektrodenoberfläche ausgehend gezählte Schichten mit den relativen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  ein.

Die Schicht  $\varepsilon_i$  befinde sich jeweils zwischen den Radien  $\rho_i$  und  $\rho_{i+1}$  konzentrisch um den Elektrodenmittelpunkt. Die Elektrodenoberfläche wird in dieser allgemeinen Nomenklatur mit  $\rho_1$ , entsprechend der äußeren Begrenzung der ersten dielektrischen Schicht, bezeichnet. Analog sei das Problem für den Außenbereich der Elektroden bezeichnet. Beginnend auf der Elektrodenoberfläche numeriert man die konzentrischen Schichten verschiedener Dielektrizitätskonstanten durch, wobei die  $n$ -te Schicht sich bis ins Unendliche erstreckt.

Die Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i$  sind hier allgemein entsprechend Ibach und Lüth [1995, Abschn. 11.1] als komplexe Funktionen anzusetzen, mit denen Materialien mit ohmschen Ladungsträgern beschrieben werden können. Weiter wurde hier die Dielektrizitätskonstante als Skalar angenommen. Die Dielektrizitätskonstante repräsentiert

Abbildung 2.5: Koordinaten und Bezeichnungen für die Berechnungen im konzentrisch geschichteten Dielektrikum



Analog zu Abbildung 2.1 sind kartesische Koordinaten  $(x, y)$  und Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi)$  definiert. Der Elektrodeninnenraum sei mit einem konzentrisch um den Ursprung des Koordinatensystems geschichteten Dielektrikum gefüllt. Die Schichten verschiedener relativer Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  beginnen jeweils von der Elektrodenoberfläche mit Radius  $\rho_1$  beginnend bei den Radien  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ . Für den Außenraum ist die Definition hier nicht gezeigt, aber ganz analog mit dem Index 1 auf der Elektrodenoberfläche beginnend und die n-te Schicht nach  $\rho = \infty$  ausgelehnt.

somit einen gewichteten Mittelwert der Anteile in Richtung und senkrecht zur c-Achse des hexagonalen Eiskristalls. Da die Messung zusätzlich an polykristallinem Eis vorgenommen wird, ist der gemessene Wert ein von der Ausrichtung der Achsen abhängiger Mittelwert.

Anders als in Ibach und Lüth [1995, Relation (11.10)] wurde der Imaginärteil mit negativem Vorzeichen entsprechend der technischen Literatur im Zusammenhang mit Eis [Gross et al., 1980; Bogorodskii et al., 1985, Relation (1.1)] gewählt, wobei  $\varepsilon_i(\omega)$  die (reelle) relative Dielektrizitätskonstante,  $\sigma_i$  die (reelle) Leitfähigkeit,  $\omega$  die Kreisfrequenz des anregenden Wechselfeldes und  $\varepsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet:

$$\varepsilon_i \equiv \varepsilon'_i - i \varepsilon''_i \equiv \tilde{\varepsilon}_i(\omega) = \varepsilon_i(\omega) - i \frac{\sigma_i}{\omega \varepsilon_0} . \quad (2.24)$$

Für Betrachtungen mit Unterscheidung von Real- und Imaginärteil sei, wie auch in der Radarliteratur üblich, mit  $\varepsilon'_i \geq 1$  der Real- und  $\varepsilon''_i \geq 0$  der Betrag des negativen Imaginärteils bezeichnet. Insbesondere sind bei dieser Wahl alle Größen positiv, so daß

$$\left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right| = \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_j|}{|\varepsilon_i + \varepsilon_j|} = \frac{\sqrt{(\varepsilon'_i - \varepsilon'_j)^2 + (\varepsilon''_i - \varepsilon''_j)^2}}{\sqrt{(\varepsilon'_i + \varepsilon'_j)^2 + (\varepsilon''_i + \varepsilon''_j)^2}} < 1 . \quad (2.25)$$

Diesen Ansatz gewinnt man formal theoretisch durch Einsetzen eines ohmschen Ansatzes für die Stromdichte  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  für ein Material mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  unter dem Einfluß eines Wechselfeldes<sup>2</sup>  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$  in die Maxwell-Ampèresche Gleichung

<sup>2</sup>Ibach und Lüth [1995] wählen hier die Phasenabhängigkeit mit negativem Vorzeichen ( $e^{-i\omega t}$ ). In Abschnitt 11.2 stellen sie aber fest, daß beide Darstellungen üblich sind.

für die Magnetfeldstärke  $\vec{H}$  ( $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$  bezeichnet die elektrische Flußdichte):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \sigma \vec{E} + i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = i\omega \varepsilon_0 \left( \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \vec{E}. \quad (2.26)$$

Für die Anwendung der zu entwickelnden Theorie ist wichtig, daß sie mit den technischen Definitionen übereinstimmt. Die für die Eiskernmessungen verwendete Meßbrücke vermißt den Kondensator entsprechend einer Parallelschaltung eines Widerstandes mit Leitwert  $G$  und einer Kapazität, d.h. der Scheinleitwert (Admittanz) berechnet sich nach Wilhelms [1996, Abschn. 2.2.4.2] zu:

$$Y = G + i\omega C = i\omega (\varepsilon' - i\varepsilon'') C_0 = i\omega \left( \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) C_0. \quad (2.27)$$

Die hier gewählte Konvention ist also konsistent mit der Umrechnung der Meßgrößen in Materialkonstanten.

Berücksichtigt man weiter, daß Feldlinien in Metalloberflächen nach Definition senkrecht eintreten, so kann mit dem Grenzübergang  $\lim_{\varepsilon_i \rightarrow \infty}$  auch eine Metalloberfläche mitbehandelt werden. Dies ist nur sinnvoll für die letzte Schicht  $\varepsilon_n$ , da das Innere von Metallen feldfrei ist [Jackson, 1982, Abschn. 1.6]. Den Grenzübergang zu unendlich hoher relativer Dielektrizitätskonstante rechnet man mit dem in Kohlrausch [1968a] angegebenen Kehrwert der Leitfähigkeit von Aluminium  $\sigma_{Al}$ , dem spezifischen Widerstand von Aluminium  $\hat{\rho}_{Al} = 0.025 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$  direkt nach. Für eine Kreisfrequenz von  $\omega = 2\pi \times 250 \text{ kHz}$  berechnet sich der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon''_{Al} = -\text{Im} \varepsilon_{Al} = \frac{\sigma_{Al}}{\omega \varepsilon_0} = \frac{1}{\hat{\rho}_{Al} \omega \varepsilon_0} \approx 2.9 \times 10^{12} \gg 1$ , der Dielektrizitätskonstanten von Luft.

## 2.2.2 Potentialverteilung

Das Problem wird durch die in Wilhelms [1996, Gl. (2.13)] angegebene Poisson-Gleichung ohne makroskopische Ladungen im Elektrodeninnenraum mathematisch beschrieben. Die induzierten Ladungen an der Grenzfläche der Dielektrika sind in der Potentialfunktion implizit enthalten und werden bei der Lösung durch entsprechende Randbedingungen sichergestellt. Unter der Berücksichtigung der Annahme einer verschwindenden Variation der Potentialfunktion, mit  $\Phi^i$  im Radialintervall  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$  bezeichnet, in Richtung der Zylinderachse (z-Achse) reduziert sich die Poissongleichung in Zylinderkoordinaten (2.1) auf die Poissongleichung in Polarkoordinaten:

$$\Delta \Phi^i(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Phi^i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \rho \in [\rho_i, \rho_{i+1}], \varphi \in (-\pi, \pi]. \quad (2.28)$$

Die Gleichung ist jeweils für die Potentialfunktion im  $i$ -ten Bereich  $\Phi^i(\rho, \varphi)$ , d.h. zwischen  $\rho_i$  und  $\rho_{i+1}$  zu lösen. Die Lösungen müssen folgende Randbedingungen erfüllen, die die Lösung eindeutig festlegen: die Potentialverteilung an der Elektrodenoberfläche ist durch die Potentialverteilung auf den Elektroden festgelegt:

$$\Phi^1(\rho_1, \varphi) = \begin{cases} -\frac{V}{2} & \text{für } -\pi + \psi < \varphi < -\psi \\ +\frac{V}{2} & \text{für } \psi < \varphi < \pi - \psi \\ 0 & \text{fast überall sonst} \end{cases}. \quad (2.29)$$

Weiter sind nach Jackson [1982, Abschn. 4.3] die Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Flußdichte  $\vec{D}$  und der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  an den Grenzflächen der Dielektrika sicherzustellen. Mit den Relationen für die Berechnung der Flußdichte  $\vec{D}^i = \varepsilon_i \vec{E}^i$  und der Feldstärke  $\vec{E}^i = -\text{grad } \Phi^i$  aus der Potentialfunktion  $\Phi^i$  im jeweiligen Gebiet ergeben sich in Polarkoordinaten die Bedingungen an den Grenzflächen bei den Radien  $\rho_{i+1}$  für beliebige Winkel  $\varphi$ , für Indizes  $i = 1, \dots, n-1$ :

$$D_\rho^i(\rho_{i+1}, \varphi) = -\varepsilon_i \left. \frac{\partial \Phi^i(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_{i+1}} \stackrel{!}{=} -\varepsilon_{i+1} \left. \frac{\partial \Phi^{i+1}(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_{i+1}} = D_\rho^{i+1}(\rho_{i+1}, \varphi), \quad (2.30)$$

$$E_\varphi^i(\rho_{i+1}, \varphi) = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \Phi^i(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\rho=\rho_{i+1}} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \Phi^{i+1}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\rho=\rho_{i+1}} = E_\varphi^{i+1}(\rho_{i+1}, \varphi). \quad (2.31)$$

Die Beschränktheit der Potentialfunktion  $\Phi^n$  im Gebiet um  $\rho = 0$  für Betrachtungen im Innern bzw. um  $\rho \rightarrow \infty$  für den Außenraum legen die Lösung eindeutig fest, da sie endlich bleiben muß.

Die Lösung der Gleichungen erfolgt analog zu Abschnitt 2.1.2 mit dem Separationsansatz:

$$\Phi^i(\rho, \varphi) = R^i(\rho) Q^i(\varphi). \quad (2.32)$$

Diese Separation führt nach Trennung der Variablen auf die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 Q^i}{d\varphi^2} + \nu^2 Q^i = 0, \quad (2.33)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR^i}{d\rho} - \nu^2 R^i = 0. \quad (2.34)$$

### 2.2.2.1 Lösung des Winkelanteils ( $Q$ )

Die Differentialgleichung für den Winkelanteil (2.33) ist identisch mit Gleichung (2.5). In Abschnitt 2.1.2.2 wurden für die Lösung von  $Q$  die in Gleichung (2.9) angegebenen Lösungsfunktionen

$$\sin(2m+1)\varphi \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (2.35)$$

gefunden, da nur für ungerade  $\nu$  die Lösungen den Randbedingungen genügen. Diese können übernommen werden, da auch die Randbedingungen an die Potentialverteilung in Abhängigkeit von der Winkelkoordinate  $\nu$  (2.2) bzw. (2.29) identisch sind. Die  $\sin \nu\varphi$  und  $\cos \nu\varphi$  sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung für den Winkelanteil (2.33) und müssen außerdem die Grenzbedingungen (2.30) und (2.31) für beliebige  $\varphi$  erfüllen. Die Bedingung auf dem Rand legt die möglichen Lösungsfunktionen fest, so daß der allgemeine Ansatz für die Lösungen in allen Gebieten nur die hier gefundenen  $\sin \nu\varphi$  für ungerade  $\nu$  berücksichtigen muß, weil die restlichen Lösungsfunktionen nicht zur Lösung beitragen.

Damit ist die für die auf 1 normierte Potentialverteilung auf dem Rand in (2.11) angegebene Relation  $\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi \cos(2m+1)\psi}{2m+1}$  ebenfalls direkt übertragbar.

### 2.2.2.2 Lösung des Radialteils ( $R$ )

Die Differentialgleichung für den Radialteil (2.34) unterscheidet sich von der in Gleichung (2.6) angegebenen. Die Lösungen der Differentialgleichung (2.34) rät man zu  $\rho^{\pm\nu}$  und verifiziert sie durch Einsetzen. Setzt man für  $\nu$  die in Abschnitt 2.2.2.1 mit den Randbedingungen konsistenten Werte ein und normiert die Funktionen auf der Elektrodenoberfläche mit Radius  $\rho_1$  auf 1, so sind die Lösungsfunktionen für den Radialanteil:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\pm(2m+1)} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (2.36)$$

Die beiden Lösungen  $R(\rho) = 1$  und  $R(\rho) = \ln \frac{\rho}{\rho_1}$  für  $\nu = 0$  tragen nicht bei, da  $\nu = 0$  nicht der Randbedingung der Potentialvorgabe auf der Elektrodenoberfläche gehorcht. Dies ist anschaulich klar, da das Potential symmetrisch um die Ursprungsebene bei  $y = 0$  gewählt wurde, so daß keine Konstante zu addieren ist. Auch befinden sich im betrachteten Gebiet keine makroskopischen Ladungen, die einen Beitrag mit  $\ln \rho$  liefern würden.

### 2.2.2.3 Rekursive Lösung für die Gebiete innerhalb der jeweiligen Dielektrika

Die allgemeine Lösung ist nun die Linearkombination der Lösungsfunktionen, die die Randbedingungen erfüllen. Die Entwicklung des Potentials auf der Oberfläche (2.11) wurde bereits eingesetzt, um unnötig unübersichtliche Faktoren in den folgenden Betrachtungen zu vermeiden:

$$\Phi^i(\rho, \varphi) = \frac{V}{2} \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m^i \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{2m+1} + b_m^i \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{2m+1} \right) \frac{\cos(2m+1)\psi \sin(2m+1)\varphi}{2m+1}. \quad (2.37)$$

Mit der Bestimmung der  $a_m^i$  und  $b_m^i$  beginnt man in der  $n$ -ten Schicht. Wegen der Beschränktheit der Lösungen bei  $\rho = 0$  für Betrachtungen im Elektrodeninnenraum sind in diesem Falle die  $b_m^n \stackrel{!}{=} 0$  zu fordern. Für den Elektrodenaußenraum sind wegen der Beschränktheit der Lösung bei  $\rho \rightarrow \infty$  die  $a_m^n \stackrel{!}{=} 0$  zu fordern.

Einsetzen des Ansatzes (2.37) in die Bedingungen an den Grenzflächen der Dielektrika (2.30) und (2.31) liefert nach Kürzen:

$$\varepsilon_i \left( a_m^i \frac{\rho_{i+1}^{2m}}{\rho_1^{2m+1}} - b_m^i \frac{\rho_1^{2m+1}}{\rho_{i+1}^{2m+2}} \right) \stackrel{!}{=} \varepsilon_{i+1} \left( a_m^{i+1} \frac{\rho_{i+1}^{2m}}{\rho_1^{2m+1}} - b_m^{i+1} \frac{\rho_1^{2m+1}}{\rho_{i+1}^{2m+2}} \right), \quad (2.38)$$

$$a_m^i \frac{\rho_{i+1}^{2m+1}}{\rho_1^{2m+1}} + b_m^i \frac{\rho_1^{2m+1}}{\rho_{i+1}^{2m+1}} \stackrel{!}{=} a_m^{i+1} \frac{\rho_{i+1}^{2m+1}}{\rho_1^{2m+1}} + b_m^{i+1} \frac{\rho_1^{2m+1}}{\rho_{i+1}^{2m+1}}. \quad (2.39)$$

Diese Relationen formt man durch sammeln der Radienabhängigkeiten und Addition bzw. Subtraktion der beiden Bedingungen (2.38) und (2.39) in Rekursionsformeln nach dem Index  $i$  um:

$$a_m^i = \frac{1}{2} \left( \left(1 + \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right) a_m^{i+1} + \left(1 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_{i+1}}\right)^{4m+2} b_m^{i+1} \right), \quad (2.40)$$

$$b_m^i = \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \right) \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_1} \right)^{4m+2} a_m^{i+1} + \left( 1 + \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \right) b_m^{i+1} \right). \quad (2.41)$$

Zur Lösung des Systems setzt man  $b_m^n = \mathcal{C}_m$  und  $a_m^n = 0$  im Außenraum bzw.  $a_m^n = \mathcal{C}_m$  und  $b_m^n = 0$  im Innenraum an. Nach Iteration mit den Rekursionsformeln (2.40) und (2.41) beginnend bei  $i = n-1$  bis  $i = 1$  erhält man  $a_m^1 = A_m \mathcal{C}_m$  und  $b_m^1 = B_m \mathcal{C}_m$ , die mit bekannten Koeffizienten  $A_m$  und  $B_m$  nur noch bis auf die Konstante  $\mathcal{C}_m$  unbestimmt sind. Die Potentialverteilung auf der Elektrodenoberfläche (2.29) liefert mit der Entwicklung nach den  $\sin \nu \varphi$  (2.11) durch Vergleich:

$$a_m^1 + b_m^1 \stackrel{!}{=} 1. \quad (2.42)$$

Mit dieser Bedingung bestimmt man  $\mathcal{C}_m = 1/(A_m + B_m)$  und durch Rückeinsetzen den gesamten Satz der  $a_m^i$  und  $b_m^i$ , so daß die Potentialfunktionen  $\Phi^i$  nun eindeutig bestimmt sind. Dies ist die allgemeine Lösung des Problems, für die keine geschlossenen Formeln angegeben werden sollen, da diese schnell sehr unübersichtlich werden. Diese Rechenvorschrift ist direkt in einen Algorithmus umzusetzen, mit dem die Potentialfunktion für beliebige Schichtenanordnungen berechnet werden kann.

In Abschnitt 2.2.1 wurde für den Fall, daß die letzte Schicht aus Metall besteht, die Behandelbarkeit dieses Problems mit dem Grenzfall der Algorithmen für  $\varepsilon_n \rightarrow \infty$  diskutiert.  $\varepsilon_n$  tritt ausschließlich im Zähler des ersten Iterationsschrittes der Rekursionsbedingungen (2.40) und (2.41) auf und kann deshalb ausgeklammert werden. Bei der Normierung mit  $\mathcal{C}_m$  kürzt es sich dann wieder. In den Rekursionsbedingungen ist nach Ausklammern von  $\varepsilon_n$  der Grenzwert der Restterme  $\lim_{\varepsilon_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_n} \pm \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} = \pm \frac{1}{\varepsilon_{n-1}}$  zu bilden, im Algorithmus also  $1 \pm \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}$  durch  $\pm \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}$  zu ersetzen.

### 2.2.3 Parametrisierung der Feldlinien

Die Potenzreihe (2.37) beschreibt die Potentialverteilung im Bereich der verschiedenen Schichten. Aus diesen Gleichungen ist nun eine Identität für die Feldlinien abzuleiten. Bronstein und Semendjajew [1989, Abschn. 4.2.2.2.] definieren: "Zur Veranschaulichung von Vektorfeldern benutzt man die Feldlinien. Das sind Kurven, bei denen in jedem Punkt der Feldvektor [...] Tangentenvektor ist." Ausgehend von dieser Definition konstruiert man mit den in Anhang A.2 angegebenen Moivreschen Formeln (A.22) und (A.23),  $z^{\pm n} = \rho^{\pm n} (\cos n \varphi \pm i \sin n \varphi)$ , die analytische Fortsetzung  $g(z)$  der Potentialfunktion (2.37). Deren von  $\sin \nu \varphi$  explizit abhängiger Anteil die Potenzfunktion liefert (für reelle Dielektrizitätskonstanten ist das gerade der Imaginärteil der Potentialfunktion  $\Phi^i(\rho, \varphi) = \text{Im } g^i(z)$ ):

$$g^i(z) = \frac{2V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m^i \left( \frac{z}{\rho_1} \right)^{2m+1} - b_m^i \left( \frac{\rho_1}{z} \right)^{2m+1} \right) \frac{\cos(2m+1)\psi}{2m+1}. \quad (2.43)$$

Nach den Betrachtungen in Anhang A.2 liefert der von  $\cos \nu \varphi$  explizit abhängige Anteil (für reelle Dielektrizitätskonstanten der Realteil  $\Upsilon^i(\rho, \varphi) = \text{Re } g^i(z)$ ) dann eine Parametrisierung der Feldlinienkurvenscharen. Den erhaltenen Parametrisierungen kann man eine physikalische Interpretation geben. Die  $\Upsilon^i$  sind bis auf einen Vorfaktor der Dielektrizitätskonstanten  $-\varepsilon_i \varepsilon_0$  und eine charakteristische Länge  $l$

der elektrische Fluß  $\Psi^i = -\varepsilon_i \varepsilon_0 l \Upsilon^i$  durch eine beim Radius  $\rho$  vom Winkel  $\varphi$  aufge-spannte Fläche. Der Winkel  $\varphi$  bezieht sich auf die Symmetrieebene durch die Mitte der Meßelektrode (parallel der y-Achse), die aus Symmetriegründen auch Feldlinie ist.

Die physikalische Interpretation gewinnt man aus der anschaulicheren Definition in Bergmann et al. [1987, Abschn. 1.6]: “Konstruiert man im elektrischen Feld Kurven, deren Tangente an jedem Punkt mit der Richtung der dort herrschenden Feldstärke übereinstimmt, so geben diese elektrischen Feldlinien ein anschauliches Bild von der Struktur des Feldes, das die Ladungen umgibt [. . .]. Man kann auch über die Stärke des Feldes etwas aussagen, wenn man nach Faraday die Zahl der Feldlinien so wählt, daß durch eine zur Feldrichtung senkrechte Einheitsfläche nur so viele Feldlinien hin-durchgehen, wie der Vektor  $\mathbf{E}$  [der elektrischen Feldstärke] Einheiten besitzt.” Sie definieren den elektrischen Fluß  $\Psi$  als die Anzahl der durch eine Fläche hindurchtre-tenden Feldlinien. Für den Fall einer nach innen (innerhalb des Zylinders, bezeichnet mit  $<$ ) bzw. außen (außerhalb des Zylinders, bezeichnet mit  $>$ ) orientierten Fläche mit Radius  $\rho$ , gemessen von der Meßelektrodenmitte, gilt mit  $\vec{D}^i = -\varepsilon_i \varepsilon_0 \text{grad } \Phi^i$  für den Fluß  $\Psi$  pro Meßelektrodenlänge l:

$$\Psi_{\{\lessgtr\}}^i(\rho, \varphi) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left( \vec{D}^i(\rho', \varphi') \cdot (\{\mp\} \vec{e}_{\rho'}) \right) \Big|_{\rho'=\rho} \rho l d\varphi' = \{\pm\} \varepsilon_i \varepsilon_0 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\partial \Phi^i(\rho', \varphi')}{\partial \rho'} \Big|_{\rho'=\rho} \rho l d\varphi' . \quad (2.44)$$

Verfolgt man also eine Linie konstanten Flußes, so zählt man jeweils von der bekann-ten Feldlinie in der Symmetrieebene bis man die dem Fluß zugeordnete Feldlinie erreicht hat. Wertet man nun die Relation für den Fluß (2.44) mit den eingesetzten Potentialfunktionen im entsprechenden Bereich (2.37) aus, so verifiziert man, daß es sich tatsächlich um die um den Faktor  $-\varepsilon_i \varepsilon_0 l$  reskalierten Realteile  $\Upsilon^i = \text{Re } g^i$  von  $g$  handelt:

$$\Psi_{\{\lessgtr\}}^i(\rho, \varphi) = \{\mp\} \frac{2\varepsilon_i \varepsilon_0 l V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m^i \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{2m+1} - b_m^i \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2m+1} \right) \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\varphi}{2m+1} . \quad (2.45)$$

Während die Reihe für die Potentialverteilung auf der Elektrodenoberfläche  $\Phi^1(\rho_1, \varphi)$  in Gleichung (2.37) wegen der Normierungsbedingung (2.42) unmittel-bar in eine analytisch auswertbare Reihe übergeht, ist das bei der Reihe (2.45) für den Fluß durch die Elektrodenoberfläche  $\Psi^1(\rho_1, \varphi)$  nicht mehr unmittelbar der Fall. Für Konvergenzbetrachtungen ist es sinnvoll, eine Reihe mit der Normierungsbe-dingung abzuspalten. Dies wird hier nicht näher ausgeführt, da sich diese Reihe vollkommen analog zur Behandlung der effektiven Dielektrizitätskonstante im fol-genden Abschnitt 2.2.4 behandeln läßt. Der Fluß  $\Psi_{\{\lessgtr\}}^1(\rho_1, \pi - \xi) - \Psi_{\{\lessgtr\}}^1(\rho_1, \xi) = -2\Psi_{\{\lessgtr\}}^1(\rho_1, \xi) = Q_{\{\lessgtr\}}$  durch eine Leiteroberfläche mit den Berandungswinkeln  $\xi$  und  $\pi - \xi$  ist nach dem Gaußschen Gesetz [Honerkamp und Römer, 1989, Ab-schn. 11.1.3] gerade die auf ihr befindliche Ladung  $Q$ . Verwendet man nun, daß die Kapazität  $C$  pro Spannung  $V$  aufgebrachte Ladung und die effektive Dielek-trizitätskonstante  $\varepsilon^* = \frac{C}{C_0^\infty}$  der Proportionalitätsfaktor zwischen Kapazität und Leerkapazität  $C_0^\infty$  ist, so ergibt sich die Reihe für den Fluß in der Oberfläche  $\Psi_{\{\lessgtr\}}^1(\rho_1, \xi) = -\frac{V}{2} C_0^\infty \varepsilon_{\{\lessgtr\}}^* = -\frac{V}{2} C_{\{\lessgtr\}}$  direkt aus der Reihe für die effektive Di-elektrizitätskonstante mit  $\xi$  als Winkelvariable<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Man beachte auch die bis auf die Integrationsgrenzen vollkommene Analogie zwischen der

## 2.2.4 Kapazität und effektive Dielektrizitätskonstante

Die Kapazität der Anordnung berechnet man direkt mit Formel (2.16), wobei für  $\Phi$  die Funktion  $\Phi^1$  auf der Elektrodenfläche (2.37) einzusetzen ist, die unabhängig in Richtung der Zylinderachse ist, so daß die Integration über  $z'$  zur Länge der Meßelektrode  $l$  ausgewertet werden kann:

$$Q_{\{\lessgtr\}} = \{\pm\} l \int_{\xi}^{\pi-\xi} \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho'} \Phi_{\{\lessgtr\}}^1(\rho', \varphi') \Big|_{\rho'=\rho_1} \rho_1 d\varphi'. \quad (2.46)$$

Mit  $<$  sei wieder der Fall im Innern des Zylinders bezeichnet, während mit  $>$  der Fall im Außenraum bezeichnet sei, die wegen der entgegengesetzten Orientierung des Flächennormalenvektors unterschiedliche Vorzeichen beitragen. Die Integrationsgrenze  $\xi = (\pi - \phi_0)/2$  ist in Abschnitt 2.1.1 bereits definiert worden. Die Meßelektrode überspanne den Winkel  $\phi_0$  symmetrisch um die y-Achse.

Setzt man nun die Lösung (2.37) in die Formel für die Kapazität (2.16) ein, so erhält man die Entwicklung für die Kapazität  $C$ :

$$C_{\{\lessgtr\}} = \frac{Q_{\{\lessgtr\}}}{V} = \{\pm\} l \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^1 - b_m^1) \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi}{2m+1}. \quad (2.47)$$

Zieht man nun die Summe  $a_m^1 + b_m^1$  heraus und nutzt die Bedingung (2.42), so kann man den Anteil für einen Kondensator mit dem Dielektrikum  $\varepsilon_1$  separat auswerten:

$$C_{\{\lessgtr\}} = l \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi}{2m+1} - l \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_m^1}{a_m^1} \right\} \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi}{2m+1}. \quad (2.48)$$

Mit den in Abschnitt 2.1.3.2 angegebenen Formeln wertet man den ersten Term zur Leerkapazität multipliziert mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  des Mediums in der Elektrodenumgebung aus:

$$C_{\{\lessgtr\}} = \underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \ln \left( \cot \frac{\xi - \psi}{2} \cot \frac{\xi + \psi}{2} \right)}_{C_0^\infty} - l \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_m^1}{a_m^1} \right\} \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi}{2m+1}. \quad (2.49)$$

Teilt man durch die Leerkapazität  $C_0^\infty$ , so erhält man die Reihe für die effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon^*$ :

$$\varepsilon_{\{\lessgtr\}}^* \equiv \frac{C_{\{\lessgtr\}}}{C_0^\infty} = \varepsilon_1 \left( 1 - \underbrace{\frac{8\varepsilon_0 l}{\pi C_0^\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_m^1}{a_m^1} \right\} \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi}{2m+1}}_S \right). \quad (2.50)$$

Das Herausziehen der Summe  $a_m^1 + b_m^1$  und die separate Behandlung der Reihe für die Leerkapazität  $C_0^\infty$  macht die Reihenentwicklung einerseits übersichtlicher, hat

---

Relation für den Fluß (2.44) und der Berechnungsformel für die Ladung (2.46).

andererseits aber auch wichtige Gründe für Konvergenzbetrachtungen. Die alternierende Reihe für  $C_0^\infty$  bekannter Summe wurde herausgezogen. Die verbleibende Reihe kann mit den Radienverhältnissen geometrisch majorisiert werden [Remmert, 1995a, Kap. 0, §4, Abschn. 2]. Unter Beachtung der mit Index im Außenraum wachsenden und im Innenraum fallenden  $\rho_i$  und den unterschiedlichen Rekursionsstartpunkten im Gleichungssystem (2.40) und (2.41) für Innen- und Außenraum, sieht man ein, daß alle auftretenden Produkte aus Radien  $q < 1$  bleiben. Die mit Index  $m$  indizierten Summanden der Reihe  $S$  können deshalb mit  $\text{const.} \times q^{4m+2}$  abgeschätzt werden. Die Reihe  $S$  ist nach Definition also geometrisch majorisiert.

Ein Algorithmus zur Implementierung entsprechend dem in Abbildung 2.6 angegebenen Datenflußplan auf elektronischen Rechnern wird in Abschnitt B mit dem Quellcode `nlayeps.c` bereitgestellt. Die Restgliedkontrolle für die auftretende Potenzreihe wird im folgenden Abschnitt 2.2.5 diskutiert.

## 2.2.5 Restglied der Potenzreihen

Bricht man die Summation einer Potenzreihe  $S = \sum_{m=0}^{\infty} s_m$  nach endlich vielen Gliedern  $N$  ab, so stellt sich die Frage nach dem Beitrag, den die restlichen Glieder  $\sum_{m=N+1}^{\infty} s_m$  noch geliefert hätten. Bei den hier auftretenden Potenzreihen kann das Restglied für eine majorisierende Potenzreihe abgeschätzt werden.

### 2.2.5.1 Restgliedabschätzung durch eine majorisierende Potenzreihe

Mit  $S(N_0, N_1) = \sum_{m=N_0}^{N_1} s_m$  sei eine abkürzende Schreibweise eingeführt. Die unendliche Reihe ist dann mit  $S = S(0, \infty)$  bezeichnet. Den Betrag  $R(N) = |\sum_{m=N+1}^{\infty} s_m|$  bezeichnet man als Restglied der endlichen Summe  $S(0, N)$ . Das Restglied kann als Fehler der endlichen Summe  $S(0, N)$  im Vergleich zum Wert  $S$  der Potenzreihe mit unendlich vielen aufsummierten Termen betrachtet werden.

Das Restglied  $R(N)$  ist so nicht direkt zu berechnen, da die Summe  $S$  der Reihe nicht bekannt ist. Eine Abschätzung für das Restglied  $R(N)$  erhält man, wenn man die zu berechnende Potenzreihe  $S$  mit einer reellwertigen Potenzreihe  $\bar{S}$  mit bekannter Summe  $\bar{S} = \bar{S}(0, \infty) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{s}_m$  majorisieren kann. Die Potenzreihe  $S$  heißt mit der Potenzreihe  $\bar{S}$  majorisiert, wenn für fast alle Indizes  $m$ :  $|s_m| \leq \bar{s}_m \in \mathbb{R}_0^+$  gilt [Remmert, 1995a, Kap. 0, §4, Abschn. 2]. Mit der Dreiecksungleichung [Remmert, 1995a, Kap. 0, §1, Abschn. 3] für Summen läßt sich nun eine Folge von Relationen aufstellen, in der das abzuschätzende Restglied  $R(N) = |S(N+1, \infty)|$  auftritt:

$$S(0, \infty) = S(0, N) + S(N+1, \infty) \leq \bar{S}(0, N) + R(N) \stackrel{(*)}{\leq} \bar{S}(0, \infty). \quad (2.51)$$

Aus Relation (\*) ergibt sich durch Subtraktion von  $\bar{S}(0, N)$  die Relation für das als Betrag definierte Restglied  $R(N)$ :

$$0 \leq R(N) \leq \bar{S}(0, \infty) - \bar{S}(0, N) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

Da die Potenzreihe  $\bar{S}$  konvergiert, wird das Restglied beliebig klein, d.h. zu jeder vorgegebenen Fehlertoleranz  $\epsilon$  gibt es nach der eben abgeleiteten Relation (2.52)

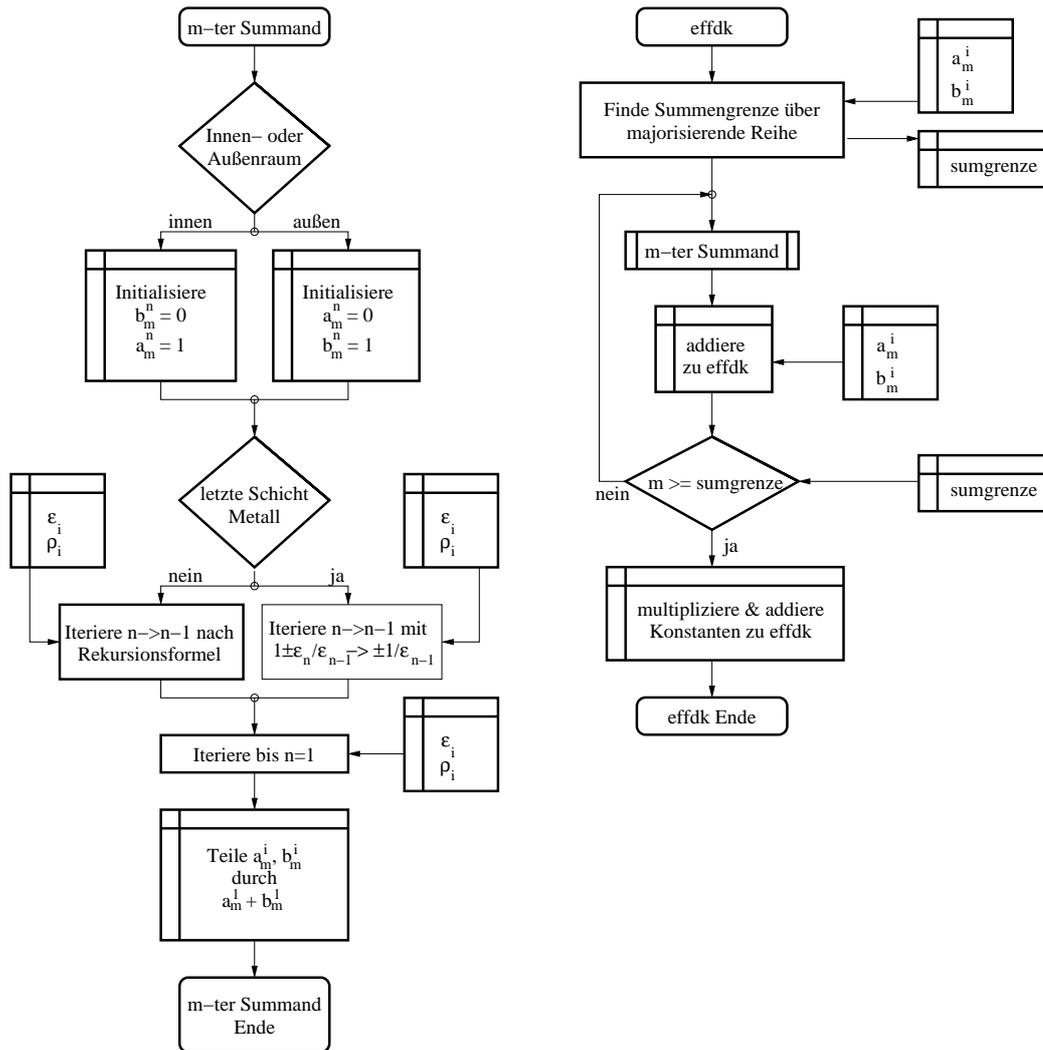


Abbildung 2.6: Datenflußplan zur effektiven Dielektrizitätskonstanten  
 Die Funktion zur Berechnung der Potenzreihe “effdk” verzweigt jeweils für jedes Glied in eine Unterfunktion “m-ter Summand”. Dort wird die Rekursion entsprechend Innen- bzw. Außenraum initialisiert, nach den Relationen (2.40) und (2.41) iteriert und schließlich mit der Normierungsbedingung (2.42) normiert.

eine natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}$ , so daß  $\bar{S}(0, \infty) - \bar{S}(0, N) < \epsilon$  und damit  $R(N) < \epsilon$ . Zur Konvergenzgeschwindigkeit ist mit dieser Abschätzung noch keine Aussage getroffen. Die Konvergenz von  $S$  wird von der Konvergenz der majorisierenden Reihe  $\bar{S}$  kontrolliert. Wenn  $\bar{S}$  wesentlich langsamer konvergiert als  $S$ , wird unnötig hoher Rechenaufwand getrieben. Deshalb ist die Abschätzung  $|s_m| \leq \bar{s}_m$  der majorisierenden Reihe  $\bar{S}$  möglichst scharf zu wählen.

Die angegebene Restgliedabschätzung ist direkt auf die Programmierung zu übertragen. Der Grenzwert  $\bar{S}(0, \infty)$  wird analytisch berechnet und mit jedem weiteren zu  $S(0, N)$  addierten Koeffizienten  $s_{N+1}$  wird  $\bar{s}_{N+1}$  von  $\bar{S}(N+1, \infty) = \bar{S}(0, \infty) - \bar{S}(0, N) \geq R(N)$  abgezogen. Auf diese Weise erhält man für jeden Schleifendurchlauf die aktuelle Restgliedabschätzung. Für Gleitkommazahlenberechnungen wird man

zur Vermeidung numerischer Fehler in der Regel jedoch erst das Restglied bestimmen und dann die Reihe bei großen Indizes beginnend abwärts summieren.

### 2.2.5.2 Allgemeine Form der auftretenden Potenzreihen und ihre majorisierende Reihe

Die auftretenden Potenzreihen sind allgemein komplexwertige Reihen, da die  $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$  in Abschnitt 2.2.1 als komplexe Zahlen vorausgesetzt wurden. Die Iterationsformeln bestimmen allgemein eine Anzahl  $l_q$  nichtverschwindende Koeffizienten  $Q_j \in \mathbb{C}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$  im Zähler, die mit Potenzen der reellwertigen Radienverhältnisse  $1 > q_j \in \mathbb{R}_0^+$  multipliziert werden. Im Nenner habe die Reihe eine Anzahl  $l_p$  nichtverschwindender komplexer Koeffizienten  $P_j \in \mathbb{C}^\times$ , die mit Potenzen der reellwertigen Radienverhältnisse  $1 > p_j \in \mathbb{R}_0^+$  multipliziert werden. Außerdem tritt ein konstanter Koeffizient  $P_0$  auf, der nicht mit Potenzen der Radienverhältnisse multipliziert wird. Eine solche Form läßt sich durch Abspaltung des konstanten Terms im Zähler, wie z.B. bei der in Gleichung (2.48) vorgenommenen, erreichen. Bei der Bildung von Ableitungen treten Reihen ohne den Faktor  $(2m+1)$  und mit Potenzen der Polynome im Nenner auf. Diese werden an dieser Stelle mitbehandelt:

$$S(N_1, N_2) = \sum_{m=N_1}^{N_2} \frac{\sum_{j=1}^{l_q} Q_j q_j^{2m+1}}{\left(P_0 + \sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}\right)^r} \frac{\text{trig}(2m+1)}{\left\{ \begin{matrix} 2m+1 \\ 1 \end{matrix} \right\}}. \quad (2.53)$$

Dabei bezeichnet  $|\text{trig}(2m+1)| \stackrel{!}{\leq} 1$  eine Funktion, die die Abhängigkeiten der Reihe von den Winkelfunktionen zusammenfaßt. Also z.B. im Falle der Reihe (2.48)  $\text{trig}(2m+1) = \cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\xi$ .

Zur Bestimmung einer majorisierenden Reihe schätzt man zunächst die Nenner ab. Wegen der  $p_j < 1$  gibt es einen Index  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für  $m > N_0$  und eine gewählte positive reelle Konstante  $1 > \mathcal{D} \in \mathbb{R}^+$  gilt<sup>4</sup>:  $|P_0| > \mathcal{D} |P_0| \geq \sum_{j=1}^{l_p} |P_j| p_j^{4m+2} \geq |\sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}|$ . Mit der ebenfalls in Remmert [1995a, Kap. 0., §1, 3.] angegebenen Variante der Dreiecksungleichung  $|w+z| \geq ||w|-|z||$  rechnet man die mit negativem Vorzeichen multiplizierte Gleichung, die nun umgekehrte Relationen hat, weiter:  $0 < (1 - \mathcal{D}) |P_0| \leq |P_0| - |\sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}| \leq |P_0 + \sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}|$ . Dividiert man nun diese Gleichung und potenziert sie mit  $r \in \mathbb{N}$ , so erhält man für den Nenner die Abschätzung:

$$\frac{1}{\left|P_0 + \sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}\right|^k} \leq \frac{1}{(1 - \mathcal{D})^r |P_0|^r} \quad \text{für } m > N_0 \in \mathbb{N}, 1 > \mathcal{D} \in \mathbb{R}^+. \quad (2.54)$$

Nach der Abschätzung des Nenners nutzt man zur Abschätzung des Zählers zunächst  $|\text{trig}(2m+1)| \leq 1$  und erhält die majorisierende Reihe  $\bar{S}$  für beliebige Summations-

<sup>4</sup>Bei der numerischen Berechnung wird man  $\mathcal{D}$  wählen und dann testen, für welches  $N_0$   $\sum_{j=1}^{l_p} |P_j| p_j^{4N_0+2}$  unter  $\mathcal{D} |P_0|$  fällt. Formal für den Beweis der Konvergenz der Folge der Summen  $\sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2} \rightarrow 0$  ist für  $m \geq N_0 > \left(\ln\left(\frac{\mathcal{D}|P_0|}{l_p \max_{j=1, \dots, l_p} \{|P_j|\}}\right) / \ln(\max_{j=1, \dots, l_p} \{p_j\}) - 2\right) / 4$  die Bedingung  $|\sum_{j=1}^{l_p} P_j p_j^{4m+2}| \leq \mathcal{D} |P_0|$  erfüllt.

grenzen  $N_1 > N_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
R(N_1) &= |S(N_1 + 1, \infty)| \stackrel{N_1 > N_0}{\leq} \sum_{m=N_1+1}^{\infty} \frac{|\sum_{j=1}^{l_q} Q_j q_j^{2m+1}|}{(1-\mathcal{D})^r |P_0|^r \left\{ \begin{smallmatrix} 2m+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}} \leq \\
&\leq \frac{1}{(1-\mathcal{D})^r |P_0|^r} \sum_{j=1}^{l_q} |Q_j| \sum_{m=N_1+1}^{\infty} q_j^{2m+1} \frac{1}{\left\{ \begin{smallmatrix} 2m+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}} = \bar{S}(N_1 + 1, \infty).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Die majorisierende Reihe berechnet man mit der in Bronštein und Semendjajew [1989, Tabelle 1.1.3.2] angegebenen Reihenentwicklung  $\operatorname{atanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  bzw. mit der ebenfalls an dieser Stelle angegebenen geometrischen Reihe  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ :

$$\begin{aligned}
\bar{S}(N_1 + 1, \infty) &= \frac{1}{(1-\mathcal{D})^r |P_0|^r} \sum_{j=1}^{l_q} |Q_j| \sum_{m=N_1+1}^{\infty} \frac{q_j^{2m+1}}{\left\{ \begin{smallmatrix} 2m+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}} = \\
&= \frac{1}{(1-\mathcal{D})^r |P_0|^r} \sum_{j=1}^{l_q} |Q_j| \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{atanh}(q_j) - \sum_{m=0}^{N_1} \frac{q_j^{2m+1}}{2m+1} \\ \frac{q_j}{1-q_j^2} - \sum_{m=0}^{N_1} q_j^{2m+1} \end{array} \right\}. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Beachtet man nun die für die Wahl von  $\mathcal{D}$  benötigte Voraussetzung  $N_1 > N_0$ , so ist das Restglied  $R(N_1) \leq \bar{S}(N_1 + 1, \infty)$  mit der erhaltenen Potenzreihe abgeschätzt.

### 2.2.5.3 Grundlagen der Bildung der Ableitung und Stammfunktion einer komplexen Potenzreihe

Mit der eben erhaltenen Abschätzung (2.56), die für die Potenzfunktion selbst und weitere im folgenden betrachtete Potenzreihen anwendbar ist, ist für feste  $q_j < 1$  die gleichmäßige Konvergenz gesichert, da zu gegebenem  $\epsilon > 0$  ein  $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gefunden werden kann, so daß das Restglied  $R(N_1) < \epsilon$  bleibt, was nach Remmert [1995a, Kap. 3, §1, Abschn. 1] zu zeigen war. Mit den in Remmert [1995a, Kap. 3, §1, Abschn. 2 & 3] getroffenen Definitionen und Anmerkungen folgt aus gleichmäßiger Konvergenz lokal gleichmäßige und schließlich kompakte Konvergenz. Für kompakt konvergente Folgen konvergiert aber nach dem “Weierstraßschen Konvergenzsatz” [Remmert, 1995a, Kap. 8, §4, Abschn. 1] die Potenzreihe beliebig hoher Ableitungen gegen die entsprechenden Ableitungen der Grenzfunktion. Auch die Konvergenz der Stammfunktionenfolge konvergiert gegen die Stammfunktion der Grenzfunktion, wenn es einen Punkt im Definitionsbereich gibt, für den die Folge der Stammfunktionen konvergiert [Remmert, 1995a, Kap. 8, §4, Abschn. 4]. Das ist aber jeweils gegeben, da alle im folgenden diskutierten Potenzreihen mit der eben gefundenen Restgliedabschätzung behandelt werden können und daher absolut konvergent sind. Die Grenzwerte der im folgenden diskutierten Potenzreihen existieren also und sollen nicht mehr im einzelnen diskutiert werden.

## 2.2.6 Das Modell eines Plattenkondensators zur Abschätzung des Einflusses des Nachbarbereichs auf die Kapazitätsmessung

Mit der Parametrisierung der Feldlinien kann nun auf einer Grenzfläche der zur Meßelektrode korrespondierende Bereich bestimmt werden. Leitend ist hier die Idee, daß Feldlinien von Ladungen ausgehen und wieder auf Ladungen enden, eine Feldlinie einer Ladung also einen Raumbereich zuordnet. Ein Flächenstück schneidet einen Flußschlauch, dessen Schnittbereich mit einer weiteren Fläche als zur ersten korrespondierendes Flächenstück gesehen werden kann, sofern die Flußschlauchberandung sich vollständig mit beiden Flächen schneidet.

Ein auf diese Weise zur Meßelektrode korrespondierendes Flächenstück in der ersten Grenzfläche wird festgelegt und der Mittelwert der Potentialverteilung über die Fläche bestimmt.

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}^i(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\varphi} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \Phi^i(\rho, \varphi') d\varphi' &= & \quad (2.57) \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\varphi} \frac{2V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left( a_m^i \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{2m+1} + b_m^i \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{2m+1} \right) \frac{\cos(2m+1)\psi \cos(2m+1)\varphi}{(2m+1)^2}\end{aligned}$$

Die gemittelte Potentialfunktion  $\overline{\Phi}^i(\rho, \varphi)$  (2.57) wurde durch Einsetzen der Potentialfunktion (2.37) und Auswertung des Integrals bestimmt. Die Konvergenz der Reihe ist durch Majorisierung mit  $\overline{S}$  in Gleichung (2.56) sichergestellt, d.h. der Mittelwert kann durch geringfügige Modifikation der Algorithmen für das Potential berechnet werden.

Im allgemeinen müßte zur Behandlung des Einflusses von Nachbarschichten die Poisson-Gleichung für den Zylinder mit einer Abhängigkeit in  $z$ -Richtung behandelt werden. Dies ist jedoch aufwendig und vereinfachend soll die Modellsituation in einem ebenen Plattenkondensator betrachtet werden. Entscheidend für den Einfluß auf die Kapazitätsmessung sind nur die Verhältnisse in der letzten Schicht vor der Meß- bzw. Gegenelektrode, die durch die Potentialverteilung auf der Oberfläche dieses Bereichs eindeutig bestimmt sind. Vereinfachend soll deshalb der Extremfall eines Potentialsprungs von  $V_1$  nach  $V_2$  bei  $z = 0$  betrachtet werden. Jackson [1982, Abschn. 1.11] definiert: "Die Kapazität eines Leiters ist somit gleich der Gesamtladung, die sich auf ihm befindet, wenn er auf dem Einheitspotential gehalten wird und alle anderen Leiter sich auf dem Potential Null befinden." Wichtig ist hierbei, daß alle beteiligten Leiter in die Betrachtungen mit einbezogen werden. Bei den vorangegangenen Kapazitätsberechnungen in den Gleichungen (2.16) und (2.46) hätte die Potentialfunktion durch Addition eines konstanten Faktors  $\frac{V}{2}$ , der bei der Bildung der Radialableitung wieder weggefallen wäre, der Definition genügt. Bei der Betrachtung in einem Plattenkondensator kann man durch Umordnung der Bereiche diese Bedingung erfüllen.

Zum Antreiben des Modells verwendet man die Spannungsmittelwerte  $V_1 = \overline{\Phi}^1$  für  $z \rightarrow -\infty$  und  $V_2 = \overline{\Phi}^2$  für  $z \rightarrow \infty$  über die zum Winkelbereich der Meßelektrode korrespondierenden Winkelbereiche in den jeweils ersten Grenzschichten.

### 2.2.6.1 Der Kondensator mit Potentialsprung auf einer Platte

Zunächst werden die in Abbildung 2.7 festgelegten Verhältnisse behandelt. Bei einem Plattenkondensator können Schichten ohne Änderung der Kapazität entsprechend der Ersatzschaltbilder in Abbildung 2.8 vertauscht werden, so daß eine geschlossene Parametrisierung im gesamten Isolierschichtbereich mit Berechnung der Kapazität möglich wird.

Die Zusammenfassung der beiden Isolierschichtbereiche zu einem Bereich doppelter Dicke ist durch die zu erwartende Skalierung der axialen Abhängigkeit der Kapazität mit der Gesamtdicke  $2d = 2|\rho_1 - \rho_2|$  der Isolierschicht motiviert. Diese Betrachtungsweise kann hier nicht theoretisch streng bewiesen werden, da keine exakte Berechnung ausgeführt wird. Es geht vielmehr um die Ableitung eines Modells, das letztlich an Meßdaten für die jeweiligen Verhältnisse zu validieren ist. Experimentell stellt die Vermessung der axialen Auflösung keine besonderen Anforderungen und kann z.B. mit einem Kernende, Metall- oder Kunststoffrohr vorgenommen werden.

Für die auf den Begrenzungsflächen  $y = 0$  und  $y = -2d$  des in Abbildung 2.7, entsprechend dem rechten Ersatzschaltbild in Abbildung 2.8, undefinierten Kondensators mit der in den äußersten Spalten der Abbildung angegebenen Potentialverteilung:

$$\Phi_M(x, y, z)|_{y=0, -2d} = \begin{cases} 0 & \text{für } y = -2d \\ V - 2V_1 & \text{für } y = 0, z < 0 \\ V - 2V_2 & \text{für } y = 0, z > 0 \\ V - V_1 - V_2 & \text{für } y = 0, z = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

wird zunächst eine Lösung in der gesamten Schicht zwischen  $y = 0$  und  $y = -2d$  geraten:

$$\Phi_M(x, y, z) = (V - V_1 - V_2) \left(1 + \frac{y}{2d}\right) - (V_2 - V_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctan \frac{z}{4nd + y}. \quad (2.59)$$

Eine Idee für den zu wählenden Ansatz wurde über die Konstruktion einer Greensfunktion mit der Methode der Spiegelladungen gewonnen. Mit einer Spiegelladung erfüllt man zunächst analog zu Jackson [1982, Abb. 2.1] die konstante Potentialbedingung in der ersten Fläche. Spiegelt man nun diese beiden Ladungen an der zweiten Fläche, so ist die Bedingung für die erste Fläche nicht mehr erfüllt und muß durch eine weitere Spiegelung an ihr wieder korrigiert werden, und so fort. Durch iterativ fortgesetztes spiegeln erhält man eine unendliche Summe, die für beide Flächen die Bedingung konstanten Potentials erfüllt. Das funktioniert mathematisch, weil bei unendlichen Summen eine indexverschobene Summe immer noch dieselben Summationsgrenzen hat. Die gewonnene Reihe ist bis auf die Ladung als Vorfaktor die Greensfunktion, deren mit der Potentialverteilung auf der Berandung multiplizierte und über dieselbe integrierte Normalenableitung die Potentialverteilung im gesamten Gebiet liefert. Die Integrale über die Flächen bei  $y = 0$  und  $y = -2d$  liefern die angegebene unendliche Summe. Die Integrale an den Grenzen bei  $z \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow \infty$  wurden nicht ausgeführt und direkt die in  $y$  linearen Terme hinzugefügt, die einen Kondensator mit der mittleren Potentialdifferenz der beiden Hälften des

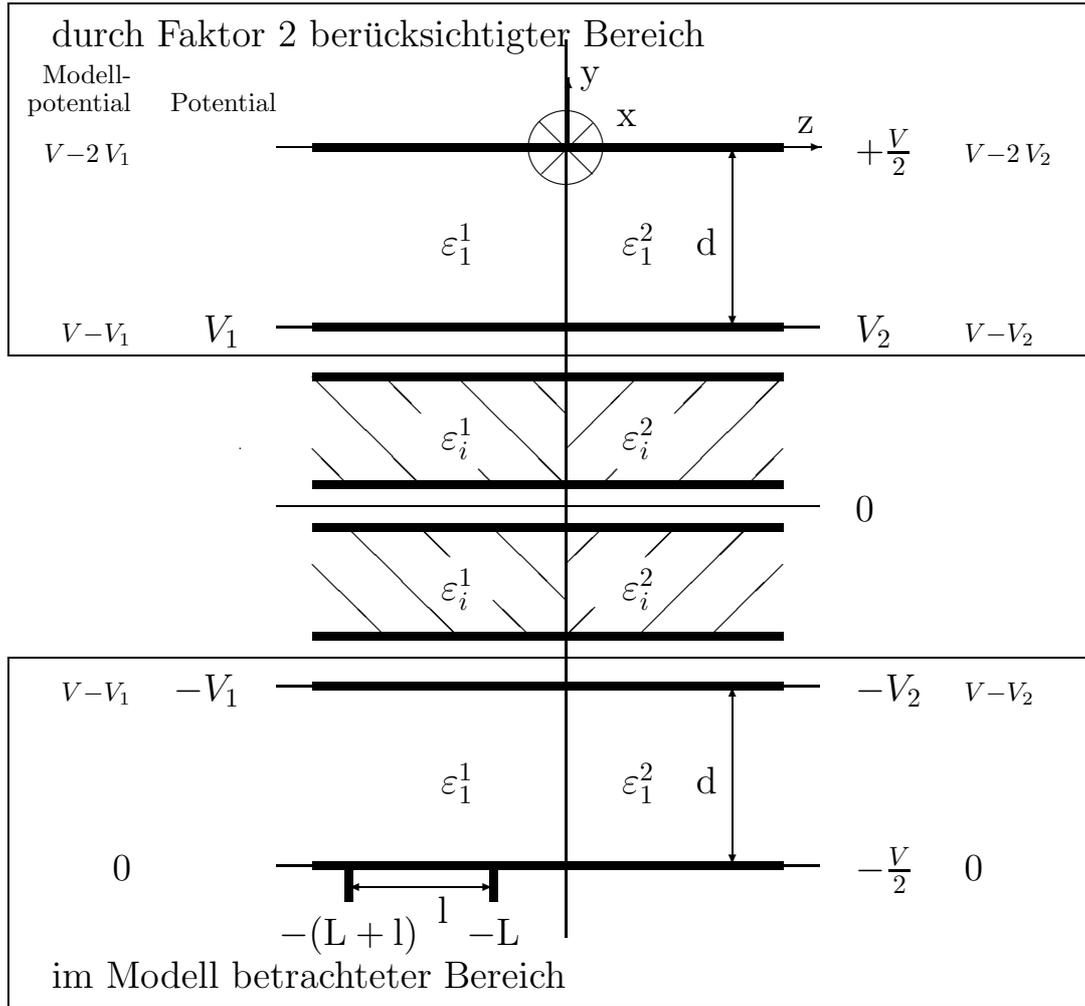


Abbildung 2.7: Modell für den Einfluß benachbarter Schichten

Ein Schnitt durch den Kondensator in der von der  $z$ -Achse und der Richtung senkrecht zur Spaltebene zwischen den Elektroden aufgespannten Ebene ist gezeigt. Das kartesische Koordinatensystem  $(x, y, z)$  entspricht, bis auf die in  $z$ -Richtung verschobenen Begrenzungen  $-L$  und  $-(L+1)$  der Meßelektrode und der Verschiebung des  $y$ -Achsenursprungs auf die Elektrodenoberfläche, dem in Abbildung 2.1 gezeigten. Die Begrenzungen der Elektrode in  $x$ -Richtung sind hier nicht eingetragen, seien aber in Anlehnung an die Nomenklatur bei der Behandlung des zylinderförmigen Kondensators in Abbildung 2.1  $\pm \frac{(\rho_1 + \rho_2) \phi_0}{4}$ , wobei hier der Mittelwert der Krümmungsradien zur Berücksichtigung der Elektrodenkrümmung genommen wird. Der  $z$ -Achsenursprung liegt in der Grenzfläche mit Materialien unterschiedlicher dielektrischer Eigenschaften  $\varepsilon_i^1$  und  $\varepsilon_i^2$ , die für alle Schichten  $i = 1, \dots, n$  variieren können, aber nicht notwendiger Weise müssen. Die Modellbetrachtungen werden nun auf den unrandeten Bereich beschränkt und alle Einflüsse der bei  $z = 0$  wechselnden Materialeigenschaften werden vereinfachend in den Potentialflächen mit  $V - 2V_1$  und  $V - 2V_2$  bei  $y = 0$  zusammengefaßt. Zur Verwendung einer geschlossenen Schreibweise wird in der Formel für die influenzierte Ladung  $\varepsilon_1$  geschrieben, wofür in den jeweiligen Bereichen  $z \leq 0$  das entsprechende  $\varepsilon_1^1$  bzw.  $\varepsilon_1^2$  einzusetzen ist. Den Bereich nahe der Elektrode auf negativem Potential bezieht man entsprechend der Betrachtung in Abbildung 2.8 mit ein und verwendet mit der laufenden Ortskoordinate  $y \in [0, -2d]$  die jeweils äußerst rechts und links außen angegebene Potentialverteilung.

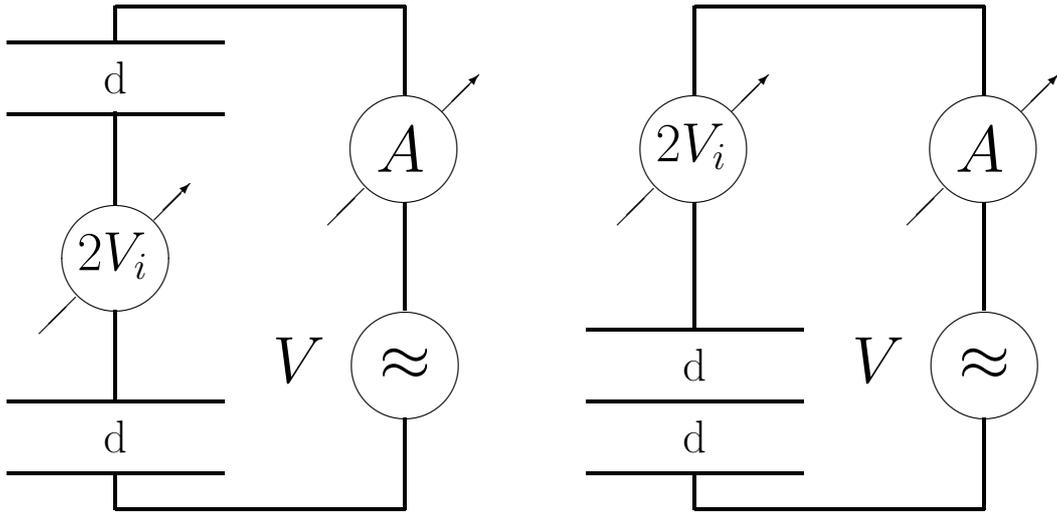


Abbildung 2.8: Ersatzschaltbilder für das Modell eines Plattenkondensators in großer Entfernung von der Grenzschicht

Das linke Ersatzschaltbild repräsentiert die Anordnung im Plattenkondensator. Zur Bestimmung der Kapazität  $C_M$  ist bei Kenntnis der Potentialdifferenz  $V$  lediglich die Bestimmung der Ladungsmenge  $Q_M$  auf einer der beiden äußeren Elektroden notwendig. Äquivalent dazu ist das rechte Schaltbild, bei dem der Spannungsabfall  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus der Mitte der beiden Kondensatoren herausgenommen wurde und diese zu einem Kondensator mit doppeltem Plattenabstand zusammengefasst wurden.

Kondensators beschreiben. Dieser so motivierte Ansatz ist nun als Potentialfunktion zu verifizieren, d.h. die Poisson-Gleichung und die Randbedingungen sind zu testen.

Die Poissongleichung verifiziert man durch nachrechnen. Die linearen Terme verschwinden mit der doppelten Ableitung. Nach Vertauschen von Summation und Differentiation verschwinden auch die zweiten Ableitungen der arctan-Terme:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_M(x, y, z) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_M(x, y, z) = \\ &= -(V_2 - V_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \arctan \frac{z}{4n d + y} = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Zur Nachrechnung der Randbedingungen setzt man in die Potentialverteilung (2.59)  $y = -2d$  ein und führt für die nicht positiven Terme  $n = 0, \dots, -\infty$  eine Umindizierung  $n' = -n + 1$  durch. Dann gilt:  $2n - 1 \rightarrow -(2n' - 1)$ ,  $n = 0 \rightarrow n' = 1$  und  $n = -\infty \rightarrow n' = \infty$ . Aus der ungeraden arctan-Funktion zieht man das negative Vorzeichen des Nenners mit  $n'$  heraus und zeigt so auch das Verschwinden der Reihe:

$$\Phi_M(x, -2d, z) = -(V_2 - V_1) \frac{2}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{z}{(2n-1)2d} - \sum_{n'=1}^{\infty} \arctan \frac{z}{(2n'-1)2d} \right) = 0. \quad (2.61)$$

Betrachtet man die Summe bei  $y = 0$ , so ergibt sich mit einer Umindizierung  $n' = -n$  der negativen Terme  $n = -1, \dots, -\infty$  ein Wegfallen aller Terme der Potenzreihe außer für  $n = 0$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_M(x, 0, z) &= V - V_1 - V_2 - (V_2 - V_1) \frac{z}{\pi} \times & (2.62) \\
&\times \left( \arctan \frac{z}{4nd} \Big|_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{z}{4nd} - \sum_{n'=1}^{\infty} \arctan \frac{z}{4n'd} \right) = \\
&= \begin{cases} V - V_1 - V_2 - (V_2 - V_1) \frac{z}{\pi} \frac{\pi}{2} = V - 2V_2 & \text{für } z > 0 \\ V - V_1 - V_2 & \text{für } z = 0 \\ V - V_1 - V_2 + (V_2 - V_1) \frac{z}{\pi} \frac{\pi}{2} = V - 2V_1 & \text{für } z < 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Mit der Auswertung auf den Oberflächen (2.61) und (2.62) wurde nachgerechnet, daß der Potentialansatz (2.59) die vorgegebene Potentialverteilung auf der Oberfläche (2.58) erfüllt. Da er weiter die Poissongleichung (2.60) erfüllt ist der Ansatz (2.59) wegen der Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungen die gesuchte Potentialfunktion. Aus dem Integral der Normalenableitung der Potentialverteilung über die Meßelektrode berechnet sich analog zu Gleichung (2.46) in kartesischen Koordinaten die Kapazität  $C_M$  als Ladung  $Q_M$  pro Spannungsdifferenz  $V$ :

$$C_M = \frac{Q_M}{V} = \frac{1}{V} \int_{-\frac{(\rho_1+\rho_2)\phi_0}{4}}^{\frac{(\rho_1+\rho_2)\phi_0}{4}} \int_{-(L+1)}^{-L} \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial y} \Phi_M(x, y, z) \Big|_{y=-2d} dz dx . \quad (2.63)$$

Die Auswertung der gliedweise differenzierten und mit  $n' = n - 1$  ( $2n - 1 \rightarrow 2n' + 1$ ,  $n = \pm\infty \rightarrow n' = \pm\infty$ ) umindizierten Potenzreihe aus dem Potentialansatz (2.59) mit Mathematica [Wolfram, 1996] ergibt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{z}{4nd+y} \Big|_{y=-2d} = - \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \frac{z}{(2n'+1)^2 4d^2 + z^2} = -\frac{\pi}{4d} \tanh \frac{\pi z}{4d} . \quad (2.64)$$

Der Nachweis benötigt die Theorie meromorpher Funktionen, deshalb sei hier nur die Partialbruchreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4z}{(2\nu+1)^2 - z^2} = \pi \tan \frac{\pi z}{2}$  [Remmert, 1995a, Kap. 11, §2, Abschn. 3, Gl. (3)], die mit der Relation für komplexe Argumente der tan-Funktion  $\tan(ix) = \frac{\sin ix}{\cos ix} = i \frac{\sinh x}{\cosh x} = i \tanh x$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 3.4.4.2.4.], die analytische Lösung verifiziert, wenn man die negativen Terme  $n = -1, \dots, -\infty$  der Summe mit  $n' = -n - 1$  umindiziert ( $(2n+1)^2 \rightarrow (2n'+1)^2$ ,  $n = -1 \rightarrow n' = 0$ ,  $n = -\infty \rightarrow n' = \infty$ ):

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{(2n+1)^2 4d^2 + z^2} = -\frac{2}{2id} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \frac{z}{2d}}{(2n+1)^2 - (i \frac{z}{2d})^2} = -\frac{\pi}{i4d} \tan \frac{i\pi z}{4d} = -\frac{\pi}{4d} \tanh \frac{\pi z}{4d} . \quad (2.65)$$

Benutzt man die Formeln und wertet nach Einsetzen der Potentialverteilung (2.59) in die Relation für die Kapazität (2.63) die Integrale aus, so erhält man:

$$C_M = \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \left( \frac{V - V_1 - V_2}{2V} \frac{1}{2d} + \frac{V_2 - V_1}{V\pi} \ln \frac{\cosh \frac{-\pi(L+1)}{4d}}{\cosh \frac{-\pi L}{4d}} \right) . \quad (2.66)$$

Wertet man den Term in der Logarithmusfunktion unter Verwendung des Additionstheorems  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 2.5.2.3.3.] aus, so erhält man:

$$C_M = \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \left( \frac{V - V_1 - V_2}{V} \frac{1}{4d} + \frac{V_2 - V_1}{V\pi} \ln \left( \cosh \frac{\pi L}{4d} + \tanh \frac{\pi L}{4d} \sinh \frac{\pi L}{4d} \right) \right) . \quad (2.67)$$

Das abgeleitete Modell verhält sich für den Grenzfall einer weit von der Grenzfläche entfernten Elektrode wie erwartet wie ein Plattenkondensator mit unendlich ausgedehntem homogenem Medium:

$$\begin{aligned}
C_M^{\{\pm\}\infty} &= \lim_{L \rightarrow \{\pm\}\infty} C_M = \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \left( \frac{V-V_1-V_2}{V} \frac{1}{4d} + \frac{V_2-V_1}{V\pi} \ln \left( \cosh \frac{\pi l}{4d} \{\pm\} \sinh \frac{\pi l}{4d} \right) \right) = \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \left( \frac{V-V_1-V_2}{V} \frac{1}{4d} + \frac{V_2-V_1}{V\pi} \ln e^{\{\pm\} \frac{\pi l}{4d}} \right) = \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \left( \frac{V-V_1-V_2}{V} \frac{1}{4d} \{\pm\} \frac{V_2-V_1}{V} \frac{1}{4d} \right) = \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_0 (\rho_1 + \rho_2) \phi_0 \frac{V-2\left\{\begin{smallmatrix} V_1 \\ V_2 \end{smallmatrix}\right\}}{V} \frac{1}{4d}. \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Gesucht ist der Einfluß einer mit 2 indizierten Nachbarschicht auf die Messung im mit 1 indizierten Bereich. Die relative Abweichung  $\delta C_M$  von der idealisierten Modellannahme  $C_M^{+\infty}$  nach diesem Modell für eine Meßelektrode der Länge  $l$  im mit 1 indizierten Bereich, die sich im Abstand  $L$  von der Mediengrenzfläche befindet, ist dann:

$$\delta C_M = \frac{C_M - C_M^{+\infty}}{C_M^{+\infty}}. \tag{2.69}$$

Im üblicherweise bei einer Meßbank auf die Elektrodenmitte bezogenen Koordinatensystem ist  $L \rightarrow L - \frac{1}{2}$  zu setzen. Von der relativen Abweichung im Modell  $\delta C_M$  ist die Abweichung:

$$\delta_C C_M = \frac{C_M^{+\infty} - C}{C}. \tag{2.70}$$

des Grenzwertes des Plattenkondensatormodells für große Abstände von der Grenzfläche  $C_M^{+\infty}$  von der Theorie für den zylinderförmigen Kondensator  $C$  zu unterscheiden. Die Diskussion soll nun im nächsten Abschnitt am für DEP-Messungen relevanten Anwendungsfall zweier Lagen geführt werden.

## 2.3 Theorie für den Anwendungsfall eines Eiskerns (einer Bohrlochsonde) mit Isolierschicht

Nach obigen Vorarbeiten kann nun der Fall zweier Schichten diskutiert und die Potenzreihen direkt angegeben werden. Die in Abschnitt 2.2.1 festgelegte Nomenklatur wird allgemein beibehalten und dahingehend modifiziert, daß der an die Elektrode angrenzende Isolierschichtbereich mit  $a$  anstatt mit 1 indiziert wird, also  $\Phi^a$  und  $\varepsilon_a$ , und der Bereich des zu vermessenden Mediums (Eiskern bzw. Bohrlochmatrix) mit  $i$  statt mit 2. Die Radien werden mit  $a$  für  $\rho_1$  und  $b$  für  $\rho_2$  bezeichnet. Außerdem wurde in Abschnitt 2.1.5 diskutiert, daß kleine Luftspalte zwischen den Elektrodenhalbschalen keinen Einfluß haben. Bei den hier diskutierten Apparaturen werden Luftspalte minimiert, so daß  $\psi = 0$  gesetzt werden kann<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Sollen die Luftspalte mitbehandelt werden, so ist der  $m$ -te Term der Reihe mit  $\cos(2m+1)\psi$  zu multiplizieren.

### 2.3.1 Bestimmung der Koeffizienten in gemeinsamer Nomenklatur für Elektrodeninnen- und außenbereich

Mit den Rekursionsbedingungen (2.40) und (2.41) ergeben sich mit Einsetzen von  $a_{m<}^i \equiv a_{m<}^2 = \mathcal{C}_{m<}$  und  $b_{m<}^i \equiv b_{m<}^2 = 0$  für den Bereich innerhalb der Elektroden die Koeffizienten für den Isolierschichtbereich zu  $a_{m<}^a \equiv a_{m<}^1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \mathcal{C}_{m<}$  und  $b_{m<}^a \equiv b_{m<}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{4m+2} \mathcal{C}_{m<}$ . Man führt eine abkürzende Schreibweise für die Radienverhältnisse mit  $\rho_{a<} \equiv \frac{\rho}{a} < 1$  und  $v_{<} \equiv \frac{b}{a} < 1$  ein und folgert mit der Normierungsbedingung (2.42) und durch Rückeinsetzen:

$$A_{m<}^i = a_{m<}^i \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m+1} = \frac{2 \rho_{a<}^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{<}^{4m+2}}, \quad (2.71)$$

$$B_{m<}^i = b_{m<}^i \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2m+1} = 0, \quad (2.72)$$

$$A_{m<}^a = a_{m<}^a \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m+1} = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \rho_{a<}^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{<}^{4m+2}}, \quad (2.73)$$

$$B_{m<}^a = b_{m<}^a \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2m+1} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \left(\frac{v_{<}^2}{\rho_{a<}}\right)^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{<}^{4m+2}}. \quad (2.74)$$

Analog bestimmt man die Koeffizienten im Bereich außerhalb der Elektroden ausgehend von  $a_{m>}^i \equiv a_{m>}^2 = 0$  und  $b_{m>}^i \equiv b_{m>}^2 = \mathcal{C}_{m>}$  mit den Rekursionsbedingungen (2.40) und (2.41) zu  $a_{m>}^a \equiv a_{m>}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{4m+2} \mathcal{C}_{m>}$  und  $b_{m>}^a \equiv b_{m>}^1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \mathcal{C}_{m>}$ . Nach Normierung mit Bedingung (2.42) und Rückeinsetzen folgt mit der abkürzenden Schreibweise  $\rho_{a>} \equiv \frac{a}{\rho} < 1$  und  $v_{>} \equiv \frac{a}{b} < 1$ :

$$A_{m>}^i = a_{m>}^i \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m+1} = 0, \quad (2.75)$$

$$B_{m>}^i = b_{m>}^i \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2m+1} = \frac{2 \rho_{a>}^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{>}^{4m+2}}, \quad (2.76)$$

$$A_{m>}^a = a_{m>}^a \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m+1} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \left(\frac{v_{>}^2}{\rho_{a>}}\right)^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{>}^{4m+2}}, \quad (2.77)$$

$$B_{m>}^a = b_{m>}^a \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2m+1} = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) \rho_{a>}^{2m+1}}{\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right) v_{>}^{4m+2}}. \quad (2.78)$$

Der wesentliche Gewinn der mit  $\rho_{a\lessgtr}$  und  $v_{\lessgtr}$  eingeführten Schreibweise ist eine geschlossene Darstellungsweise für die Potenzreihen im Bereich innerhalb und außerhalb der Elektroden, denn durch Vergleich der Gleichungen (2.71) und (2.76) zeigt man die formale Gleichheit  $A_{m<}^i = B_{m>}^i$ . Analog zeigt der Vergleich der Gleichungen (2.73) mit (2.78) die formale Gleichheit  $A_{m<}^a = B_{m>}^a$ . Vergleicht man Relation (2.74) mit Relation (2.77), so findet man  $B_{m<}^a = A_{m>}^a$  formal identisch. Die weiteren Betrachtungen werden allgemein mit  $v$  und  $\rho_a$  gemacht, wobei dann im Bereich

innerhalb der Elektroden  $v = \frac{b}{a}$  und  $\rho_a = \frac{\rho}{a}$  zu setzen ist, während außerhalb der Elektroden  $v = \frac{a}{b}$  und  $\rho_a = \frac{a}{\rho}$  gilt<sup>6</sup>.

### 2.3.2 Potenzreihen für Potential und Fluß

Die im letzten Abschnitt 2.3.1 bestimmten Koeffizienten (2.71) bis (2.78) setzt man in die Potenzreihen für Potential (2.37) und Fluß (2.45) ein und erhält die in Tabelle 2.1 aufgelisteten Relationen. Für den Fluß durch die Elektrode wurde die Reihe im Elektrodenbereich in der Grenze für  $\rho = a$  betrachtet. Durch Addition und Subtraktion von  $(\varepsilon_a - \varepsilon_i)/(\varepsilon_a + \varepsilon_i) v^{4m+2}$  erhält man zwei getrennte Potenzreihen von denen sich eine analytisch mit  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\varphi}{2m+1} = -\frac{1}{2} \ln \left( \tan \frac{\varphi}{2} \right)$  [Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 4.4.1.2 Gl. 36] zusammenfassen läßt und die zweite verbleibende Potenzreihe geometrisch majorisierbar ist:

$$\begin{aligned} \Psi_{\{\leq\}}^a(a, \varphi) &= \{\mp\} \varepsilon_a \varepsilon_0 l \frac{2V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_a^{2m+1} - \left( \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right) \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)^{2m+1}}{1 + \left( \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right) v^{4m+2}} \frac{\cos(2m+1)\varphi}{2m+1} \Bigg|_{\rho_a=1} = \\ &= \{\mp\} \varepsilon_a \varepsilon_0 l \frac{V}{\pi} \left( \ln \cot \frac{\varphi}{2} - 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right) v^{4m+2}}{1 + \left( \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right) v^{4m+2}} \frac{\cos(2m+1)\varphi}{2m+1} \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

### 2.3.3 Potenzreihen für die Komponenten der Feldstärken

Die Potenzreihen für die Komponenten der Feldstärken lassen sich aus der Definition  $\vec{E}^{i/a} = -\text{grad } \Phi^{i/a}$  berechnen. Für die Winkelableitung  $E_{\varphi}^{i/a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi^{i/a}$  tritt außer der impliziten Abhängigkeit in  $\rho_a$  und  $v$  keine weitere Vorzeichenabhängigkeit der Potenzreihensummanden in Tabelle 2.1 abhängig vom Bereich innerhalb oder außerhalb der Elektroden auf. Bei der Radialableitung  $E_{\rho}^{i/a} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi^{i/a}$  tritt neben der impliziten Abhängigkeit vom Innen- oder Außenbereich über die Radialableitungen noch eine Vorzeichenabhängigkeit hinzu. Beim Differenzieren der Potenzreihe ist dann zu beachten, daß im Bereich innerhalb der Elektroden:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho_{a<}^k = k \rho_{a<}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{a} = k \frac{1}{\rho} \rho_{a<}^k \quad (2.80)$$

gilt, hingegen im Bereich außerhalb der Elektroden ist:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho_{a>}^k = k \rho_{a>}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{a}{\rho} = -k \frac{1}{\rho} \rho_{a>}^k. \quad (2.81)$$

In geschlossener Schreibweise faßt man dies zu:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho_{a\{\leq\}}^k = \{\pm\} k \frac{1}{\rho} \rho_{a\{\leq\}}^k \quad (2.82)$$

zusammen. Die auf diese Weise berechneten Potenzreihen sind ebenfalls in Tabelle 2.1 aufgelistet.

<sup>6</sup>Die Definitionen von  $v$  und  $\rho_a$  sind so gewählt, daß sie immer kleiner gleich 1 sind.

Tabelle 2.1: Potenzreihen und Restglied für Potential, Feldlinien und Feldkomponenten für ein Medium mit zwei Schichten Die Tabelle listet in der zweiten Spalte die Funktion für die in der ersten Spalte angegebene Größe auf. Die mit a indizierten Größen sind im Bereich der unmittelbar an die Elektrode angrenzenden Schicht, während mit i Größen im vermessenen Medium bezeichnet sind. In geschweiften Klammern (...) sind Unterschiede für den Bereich im Innern der Elektroden (Kernmessung, <) und außerhalb der Elektroden (Bohrlochmessung, >) unterschieden. In eckigen Klammern [...] wird die in der dritten und vierten Spalte betrachtete Potenzreihe definiert. Die dritte Spalte gibt die majorisierende Potenzreihe an und die vierte Spalte ihre Summe als analytische Funktion. Die gewinkelten Klammern (<...>) bezeichnen alternativ einzusetzende Größen bzw. Werte für Potenzreihen mit derselben majorisierenden Reihe.

| Größe   | Funktion [Potenzreihe $S(0, \infty)$ ]   | majorisierende Potenzreihe $\bar{S}(0, \infty)$   |  |
|---|--|---|--|
|   |  | Potenzreihendarstellung   | summierte Funktion   |
| $\left\langle \begin{matrix} \Phi^a \\ \Psi_{\{\bar{S}\}}^a \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} 1 \\ \{\mp\} \varepsilon_a \varepsilon_0 l \end{matrix} \right\rangle \frac{2V}{\pi} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_a^{2m+1} \left\langle \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\rangle \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)^{2m+1} \frac{\langle \sin(2m+1)\varphi \rangle}{\cos(2m+1)\varphi} (2m+1)}{1 + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}} \right]$ | $\frac{1}{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\rho_a^{2m+1}}{2m+1} + \frac{\left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)^{2m+1}}{2m+1} \right)$ | $\frac{\operatorname{artanh} \rho_a}{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} + \frac{\operatorname{artanh} \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)}{\left  \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_i}{\varepsilon_a - \varepsilon_i} \right  - v^2}$ |
| $\Psi_{\{\bar{S}\}}^a \Big _{\rho_a=1}$   | $\{\mp\} \varepsilon_a \varepsilon_0 l \frac{V}{\pi} \left( \ln \cot \frac{\varphi}{2} - 4 \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}}{1 + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}} \cos(2m+1)\varphi \right] \right)$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} (v^2)^{2m+1} \frac{2m+1}{2m+1}$  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \operatorname{artanh} (v^2)$  |
| $\left\langle \begin{matrix} \Phi^i \\ \Psi_{\{\bar{S}\}}^i \end{matrix} \right\rangle$ | $\left\langle \begin{matrix} 1 \\ \{\mp\} \varepsilon_i \varepsilon_0 l \end{matrix} \right\rangle \frac{4V}{\pi} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \rho_a^{2m+1}}{1 + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}} \frac{\langle \sin(2m+1)\varphi \rangle}{\cos(2m+1)\varphi} (2m+1) \right]$  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_a^{2m+1}}{2m+1}$  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \operatorname{artanh} \rho_a$   |
| $\left\langle \begin{matrix} E_{\rho}^a \\ E_{\varphi}^a \end{matrix} \right\rangle$    | $\left\langle \begin{matrix} \{\pm\} \\ - \end{matrix} \right\rangle \frac{2V}{\rho \pi} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_a^{2m+1} \left\langle \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\rangle \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)^{2m+1}}{1 + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}} \frac{\langle \sin(2m+1)\varphi \rangle}{\cos(2m+1)\varphi} \right]$                                 | $\frac{1}{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \rho_a^{2m+1} + \frac{\left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  \left( \frac{v^2}{\rho_a} \right)^{2m+1} \right)$                     | $\frac{\frac{\rho_a}{1 - \rho_a}}{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} + \frac{\frac{v^2}{\rho_a} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\rho_a}}}{\left  \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_i}{\varepsilon_a - \varepsilon_i} \right  - v^2}$        |
| $\left\langle \begin{matrix} E_{\rho}^i \\ E_{\varphi}^i \end{matrix} \right\rangle$    | $\left\langle \begin{matrix} \{\pm\} \\ - \end{matrix} \right\rangle \frac{4V}{\rho \pi} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \rho_a^{2m+1}}{1 + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} v^{4m+2}} \frac{\langle \sin(2m+1)\varphi \rangle}{\cos(2m+1)\varphi} \right]$  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_a^{2m+1}$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_i}{\varepsilon_a + \varepsilon_i} \right  v^2} \frac{\rho_a}{1 - \rho_a^2}$  |

Mit den Definitionen  $v = \frac{b}{a}$  und  $\rho_a = \frac{\rho}{a}$  innerhalb bzw.  $v = \frac{a}{b}$  und  $\rho_a = \frac{\rho}{a}$  außerhalb der Elektroden.

### 2.3.4 Restglied der Potenzreihen

Die Konvergenz der eben in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3 diskutierten Reihen läßt sich mit der in Abschnitt 2.2.5.2 gefundenen Restgliedabschätzung (2.56) kontrollieren. Durch Wahl von  $\mathcal{D} = |(\varepsilon_a - \varepsilon_i)/(\varepsilon_a + \varepsilon_i)| v^2 < 1$ , wegen Relation (2.25) also  $\mathcal{D} < 1$ , und mit  $P_0 = 1$  sowie  $r = 1$  wird die Bedingung an den Nenner unabhängig vom Index  $N$  und man erhält mit der jeweiligen summierten majorisierenden Reihe die entsprechende Restgliedabschätzung. Die Potenzreihen für die hier diskutierten Reihen sind mit ihren majorisierenden Reihen und der summierten Funktion in Tabelle 2.1 angegeben und wurden mit dem in Abschnitt B angegebenen Quellcode `theo2lay.c` implementiert.

### 2.3.5 Berechnete Beispielpotentialverteilungen

Die Potential- und Feldlinienverteilung gibt einen anschaulichen Überblick über die jeweilige Problemstellung. Mit dem Programm `cont2gmt.c` (Anhang B), das auf Routinen in `sup2lay.c` (Anhang B) zurückgreift, werden Äquipotential- und Feldlinien berechnet und mit dem Skript `plot2lay.gmt` (Anhang B) grafisch dargestellt. Die im folgenden angegebenen Beispiele sollen keine umfassende Diskussion der Theorie in allen ihren Facetten sein, sondern vielmehr an frühere Arbeiten [Wilhelms, 1996; Wilhelms et al., 1998] anknüpfen und eine Vorstellung der Verhältnisse bei einer realen Apparatur geben.

Ein typischer Fall in der Anwendung ist ein von einem Luftspalt ( $\varepsilon_a = 1$ ) umgebener Eiskern ( $\varepsilon_i$ ). Für niedrige Frequenzen im Vergleich zur Debeyschen Relaxation sind  $\varepsilon_i \approx 100$  typische relative Dielektrizitätskonstanten für reines Eis, während für hohe Frequenzen  $\varepsilon_i \simeq 3.2$  ist [Petrenko, 1993, S. 7]. Einen Frequenzgang für im Labor hergestelltes Eis findet man in Petrenko und Whitworth [1999, Fig. 4.5], basierend auf Daten von Takei und Maeno [1997]. Für polares Eis wurden Dielektrizitätskonstanten in der gleichen Größenordnung gemessen [Wilhelms, 1996, Kapitel 4].

Für eine bei NGRIP [Dahl-Jensen et al., 1997] eingesetzte Apparatur ist die Potentialverteilung für hohe Frequenzen in Abbildung 2.9 gezeigt.

Die Dielektrizitätskonstanten des Luftspalts ( $\varepsilon_a = 1$ ) und des Eiskerns ( $\varepsilon_i = 3.2$ ) liegen in der gleichen Größenordnung, so daß man im wesentlichen den gleichen Befund wie bei der keine Luftspalte berücksichtigenden Theorie in Wilhelms [1996, Abb. 2.22] und Wilhelms et al. [1998, Fig. 5] erwartet. Dies wird auch bestätigt, lediglich eine leichte Brechung der Äquipotentiallinien am Rand kommt bei der den Luftspalt berücksichtigenden Theorie hinzu.

Qualitativ verschieden ist hingegen das in Abbildung 2.10 gezeigte Verhalten bei niedrigen Frequenzen.

Das Potential fällt fast vollständig im Luftspalt zwischen Eiskern und Elektrode ab. Die hohe Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i = 100$  des Kerns bedingt ein an Metalle erinnerndes Verhalten. Der Potentialabfall im Eiskern ist etwa nur  $\frac{1}{10}$  des gesamten Potentialabfalls zwischen den Elektroden. Damit wird der Bereich nahe der positiven

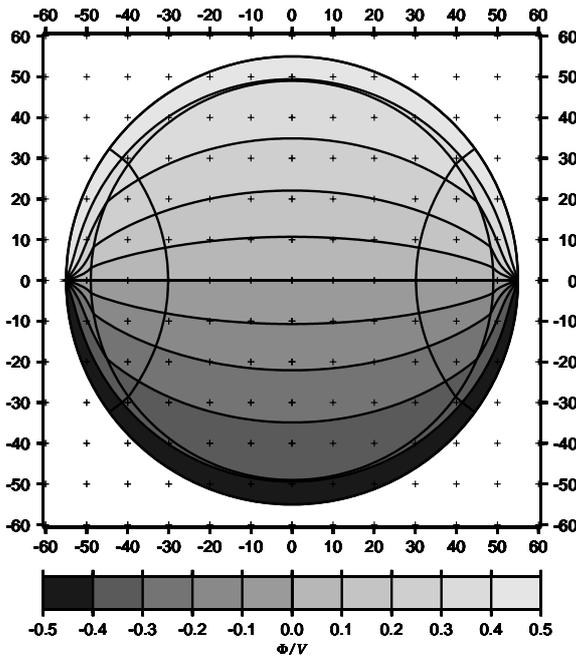


Abbildung 2.9: Potentialverteilung für eine Kernmessung bei hohen Frequenzen

Die Potentialverteilung für eine Apparatur mit 110 mm Elektrodendurchmesser und einem mittenzentrierten 98 mm Eiskern ist in relativen Einheiten  $\frac{\Phi}{V}$  aufgetragen. Berücksichtigt ist ein Luftspalt ( $\epsilon_a = 1$ ) um einen Kern mit der für hohe Frequenzen typischen Dielektrizitätskonstanten von Eis ( $\epsilon_i = 3.2$ ). Die beiden Feldlinien schneiden die Berandungen der einen Winkel  $\phi_0 = 108^\circ$  überspannenden Meßelektrode. Die Ortskoordinaten am Rand sind in mm angegeben.

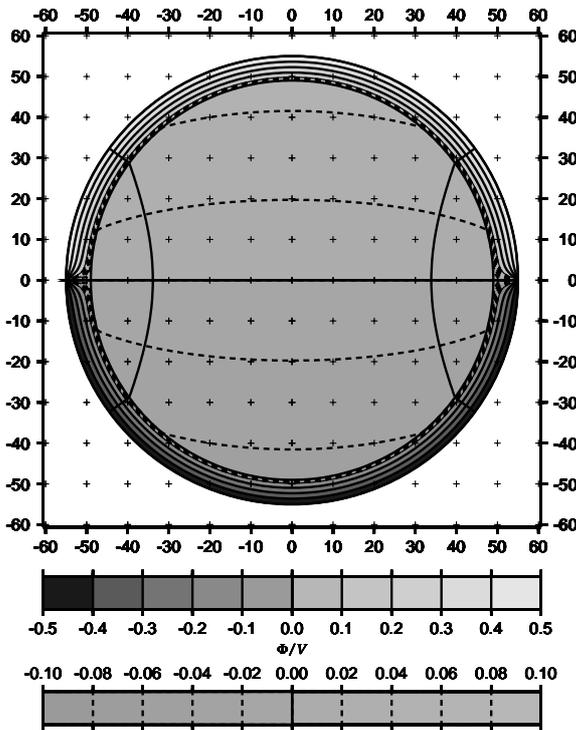


Abbildung 2.10: Potentialverteilung für eine Kernmessung bei niedrigen Frequenzen

Die Potentialverteilung für eine Apparatur mit 110 mm Elektrodendurchmesser und einem mittenzentrierten 98 mm Eiskern ist in relativen Einheiten  $\frac{\Phi}{V}$  aufgetragen. Berücksichtigt ist ein Luftspalt ( $\epsilon_a = 1$ ) um einen Kern mit der für niedrige Frequenzen typischen Dielektrizitätskonstante von Eis ( $\epsilon_i = 100$ ). Die beiden Feldlinien schneiden die Berandungen der einen Winkel  $\phi_0 = 108^\circ$  überspannenden Meßelektrode. Die Ortskoordinaten am Rand sind in mm angegeben.

mit dem nahe der negativen Halbschale quasi kurzgeschlossen und befindet sich auf nahezu gleichem Potential. Auch die Feldlinien treten nahezu senkrecht durch die Kernoberfläche, wie bei Metallen zu erwarten wäre, und werden dann stark gebrochen.

Das Verhalten einer Bohrlochsonde mit Luftspalt in Abbildung 2.11 erinnert für große Abstände von der Elektrodenoberfläche wiederum an frühere Arbeiten [Wilhelms, 1996; Wilhelms et al., 1998], während an der Luft-/Eisgrenzfläche die Äquipotentiallinien, besonders im Randbereich, merklich gebrochen werden.

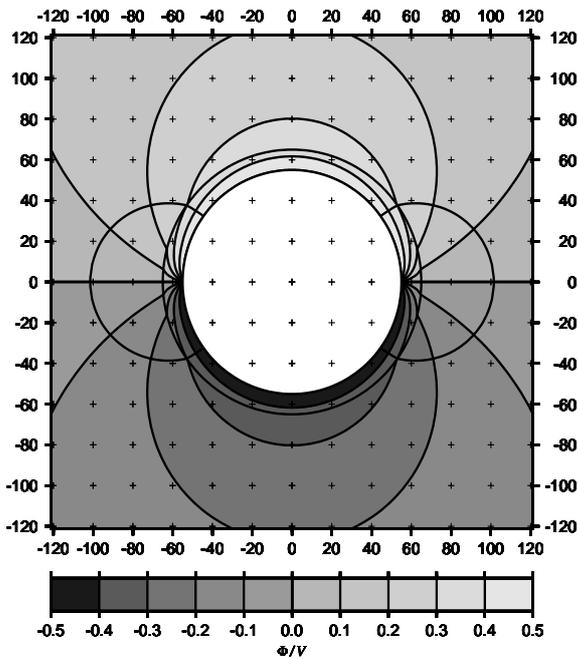


Abbildung 2.11: Potentialverteilung für eine Bohrlochmessung bei hohen Frequenzen

Die Potentialverteilung in relativen Einheiten  $\frac{\Phi}{V}$  für eine Apparatur mit 120 mm Elektrodendurchmesser mitzentriert in einem 130 mm Bohrloch ist für einen Luftspalt ( $\epsilon_a = 1$ ) und für hohe Frequenzen typischen Dielektrizitätskonstante von Eis ( $\epsilon_i = 3.2$ ) gezeigt. Die beiden Feldlinien schneiden die Berandungen der einen Winkel  $\phi_0 = 108^\circ$  überspannenden Meßelektrode. Die Ortskoordinaten am Rand sind in mm angegeben.

## 2.3.6 Gültigkeitsbereich der Theorie

Bei der in Abschnitt 2.2 abgeleiteten Theorie für geschichtete Dielektrika war der Auflösungsverlust durch Einfluß einer Nachbarschicht auf den Meßbereich im geschichteten Medium zunächst nicht diskutiert worden. Das in Abschnitt 2.2.6 abgeleitete Modell eines Plattenkondensators benötigt dafür die in diesem Abschnitt abgeleiteten Relationen für Potentialverteilung und Feldlinienparametrisierung.

### 2.3.6.1 Antrieb des Plattenkondensatormodells

Neben geometrischen Abmessungen benötigt das Modell des Plattenkondensators  $C_M$  (2.67) die Spannungen  $V_1$  und  $V_2$  auf der Grenzfläche zwischen Medium  $\epsilon_2^1$  bzw.  $\epsilon_2^2$  und Isolierschicht  $\epsilon_1$  bei  $L = \pm\infty$ . In Abschnitt 2.2.6 wurde beschrieben, daß sich über die Feldlinienparametrisierung der auf Grenzfläche zur Meßelektrode korrespondierende Bereich bestimmen läßt, wie auch die Abbildungen 2.9 bis 2.11 illustrieren. Zu diesem Zweck ist in dem in Anhang B gelisteten Quellcode `sup2lay.c` eine Routine zur Verfügung gestellt. Für den zum Begrenzungswinkel der Meßelektrode  $\xi$  korrespondierenden Winkel  $\xi_b$  berechnet man nach Gleichung (2.57) den Mittelwert  $\overline{\Phi^a}^i(b, \xi_b)$  in der jeweiligen Grenzfläche ( $i = 1, 2$ ) und setzt ihn für  $V_1$  bzw.  $V_2$  ein. Dies ist in den Algorithmen für die Potentialverteilung in `theo2lay.c` (Anhang B) implementiert.

### 2.3.6.2 Anwendbarkeit des Plattenkondensatormodells

Das Modell wurde zur Abschätzung des Einflusses einer Nachbarschicht auf den Meßbereich entwickelt. Zunächst ist deshalb zu testen, ob es für die Kapazitätsmessung in einem Bereich ohne Grenzfläche im Dielektrikum, d.h. die in Gleichung (2.68) berechnete Grenze  $C_M^{+\infty}$ , mit der Kapazität eines unendlich langen zylinderförmigen

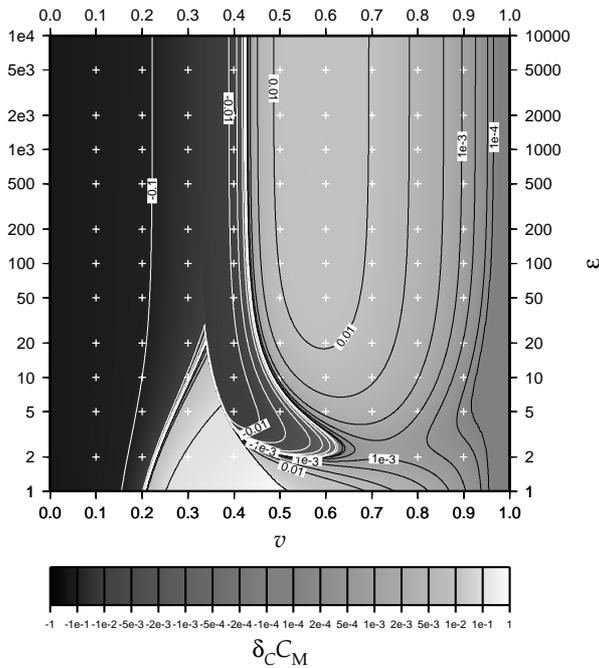


Abbildung 2.12: Abweichungen zwischen dem Modell eines Plattenkondensators und der Theorie

Die Abweichung  $\delta_C C_M = \frac{C_M^{+\infty} - C}{C}$  in Abhängigkeit des Radienverhältnisses  $v$  (innerhalb des Zylinders  $\frac{b}{a}$ , außerhalb  $\frac{a}{b}$ ) und des Verhältnisses der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}$  der Dielektrizitätskonstanten im Eiskern bzw. Bohrlochmatrix ( $\varepsilon_i$ ) zur Dielektrizitätskonstanten der Isolierschicht ( $\varepsilon_a$ ) für einen Elektrodenwinkel von  $\phi_0 = 108^\circ$  bzw.  $\xi = \frac{\pi}{5}$  ist aufgetragen.

Kondensators, die am Ende von Abschnitt 2.2.3 bereits zu  $C = -\frac{2}{V} \Psi$  bestimmt wurde, übereinstimmt. Die relative Abweichung  $\delta_C C_M = (C_M^{+\infty} - C)/C$  (2.70) wird von einem Programm `slitgrd.c` (Anhang B) auf einem Gitter berechnet und von einem Skript `slitmodel.gmt` (Anhang B) für vorgegebenen Meßelektrodenbereich  $\xi$  dargestellt. Abbildung 2.12 zeigt die vom Skript `slitmodel.gmt` für die verwendeten Apparaturen mit einem Meßelektrodenwinkel von  $\phi_0 = 108^\circ$  ausgegebene Grafik.

Akzeptiert man wiederum die bereits bei der Diskussion zur Verwendung einer Theorie für einen endlich langen Zylinder zur Berechnung der Leerkapazität in Abschnitt 2.1.5 angenommene Fehlergenauigkeit von 1 %, so ist für die verwendeten Kondensatoren das Plattenkondensatormodell für Radienverhältnisse  $v \geq 0.7$  brauchbar, was in der praktischen Anwendung keine Begrenzung darstellt. Bei der an NGRIP verwendeten Apparatur mit dem größten bisher gebauten Luftspalt beträgt das Radienverhältnis immer noch  $v = \frac{49 \text{ mm}}{55 \text{ mm}} \simeq 0.89$ , für das  $\delta_C C_M \lesssim 1\%$  ist.

Auffallend ist in Abbildung 2.12 das Dreieck extremer Abweichung mit praktisch verschwindender Übergangszone zu moderaten Abweichungen mit den Eckpunkten  $v = 0.2$  und  $v = 0.5$  bei  $\varepsilon = 1$ . Für den dritten Eckpunkt bei  $v = 0.34$  und  $\varepsilon = 20$  sind die Potentialverteilungen im Innen- bzw. Außenraum der Elektroden in Abbildung 2.13 aufgetragen. Im Bereich hoher Dielektrizitätskonstanten werden die am Rand der Meßelektrode entspringenden Feldlinien auf die Oberfläche des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix gezogen. Die Annahme eines gebogenen Plattenkondensators ist brauchbar<sup>7</sup>. Unterhalb eines kritischen Dielektrizitätskonstanten-/Radienverhältnisses werden nicht mehr alle auf der Meßelektrode entspringenden Feldlinien auf die Oberfläche gezogen und das Modell wird unbrauchbar. Dieses Ablösen der Feldlinien findet entlang der Dreieckseite mit höheren Radienverhältnissen über den in Abbildung 2.13 dargestellten Punkt an der Spitze zu nahezu konstanten Radienverhältnissen von  $v \lesssim 0.33$  für Dielektrizitätskonstantenverhältnisse  $\varepsilon \gtrsim 20$  statt.

<sup>7</sup>Die topologischen Zusammenhänge eines Plattenkondensators sind erfüllt und der Plattenkondensator ist lediglich deformiert.

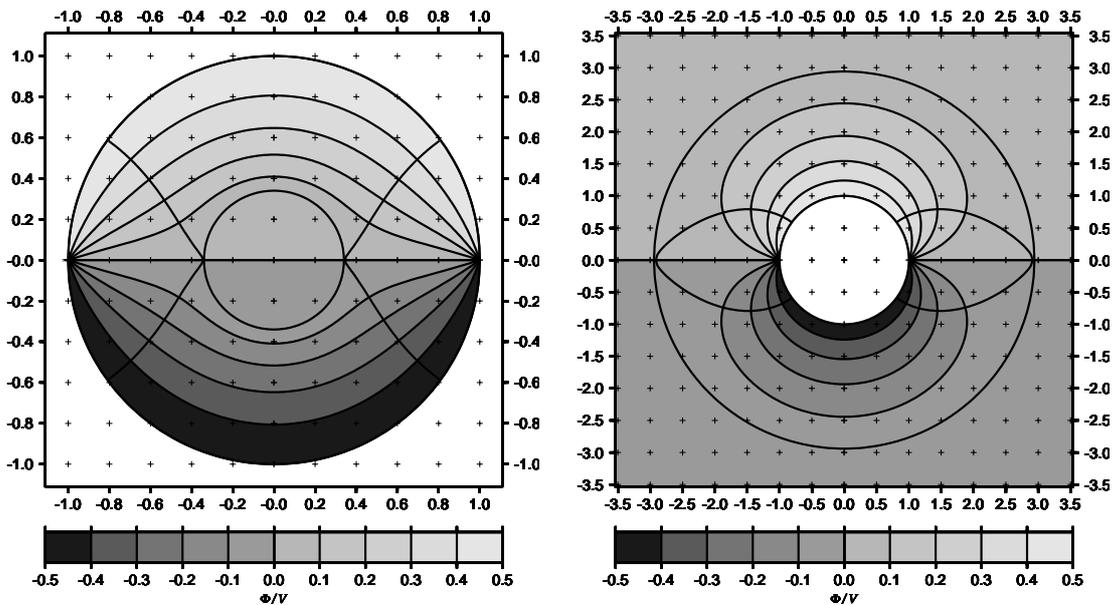


Abbildung 2.13: Potentialverteilung am Rand des Bereichs für große Abweichungen des Plattenkondensatormodells

Die Potentialverteilung innerhalb und außerhalb der Elektroden ist für einen Elektrodenwinkel  $\xi = \frac{\pi}{5}$  an der Spitze der dreieckigen Region in Abbildung 2.12, d.h. rapide Zunahme der Abweichung des Plattenkondensatormodell von der exakten Theorie  $\delta_C C_M$  aufgetragen. Der Radius der Elektrodenoberfläche ist  $a = 1$ . Für ein Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten von  $\varepsilon = 20$  wurde für einen Kernradius  $b = 0.34$ , bzw. für eine Bohrlochmatrix  $b = \frac{1}{0.34} \simeq 2.94$  eingesetzt. Am gezeigten Punkt treffen die Feldlinien gerade noch auf die Oberfläche des vermessenen Mediums.

Die Änderungsrate der Abweichung entlang der Dreiecksseite mit kleinen Radienverhältnissen ist kleiner und wohl im wesentlichen ein geometrischer Effekt der Spannungsmittelung über die Grenzfläche. Treffen die Feldlinien der Elektrodenberandung nicht auf die Grenzfläche, so wird die über die Grenzfläche gemittelte Spannung zu hoch und damit die Spannungsdifferenz im Modell zu klein geschätzt, das resultiert in einer nach dem Modell zu hohen Kapazität. Zu kleineren Radienverhältnissen hin verliert die Änderung in der Spannungsmittelung an Bedeutung und die Spannungsdifferenz erreicht einen nahezu konstanten Wert. In diesem Bereich wird die Überschätzung des mittleren Plattenabstands bedeutend und die nach dem Modell berechnete Kapazität zu groß.

### 2.3.6.3 Einfluß der Nachbarschicht

Das Modell eines Plattenkondensators (Abschnitt 2.2.6) wurde abgeleitet, um den Einfluß einer Nachbarschicht auf den Meßbereich abzuschätzen. Für einen Eiskernradius von 49 mm ist in Abbildung 2.14 der Verlauf der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^*$  im hochfrequenten Bereich mit einer Dielektrizitätskonstanten von  $\varepsilon_i = \varepsilon_{\text{Eis}}$  in axialer Richtung gegen den Abstand der Elektrodenmitte  $L$  von der Grenzfläche für Elektrodenradien bestehender Apparaturen entsprechend der Legende aufgetragen und mit Meßdaten verglichen. Der asymmetrische Abfall von 0 bis 2 cm bei B26 hat seine Ursache in einem abgerundeten Kernende nach dem Boh-

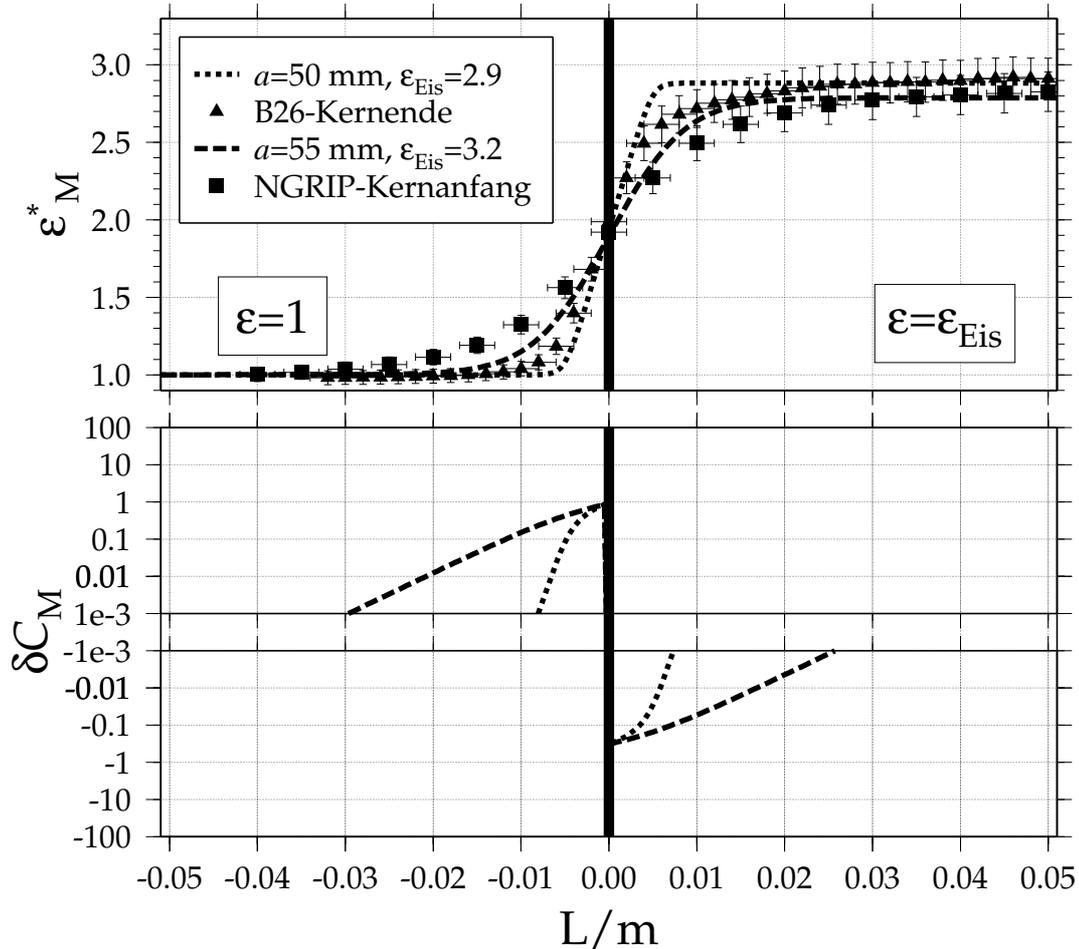


Abbildung 2.14: Effektive Dielektrizitätskonstante und ihre relative Abweichung bei hohen Frequenzen an einer Grenzfläche in axialer Richtung

Der zu erwartende Verlauf der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten nach dem Plattenkondensatormodell  $\varepsilon_M^* = \frac{C_M}{C_0^\infty}$  im Bereich der Grenzflächen und die relative Abweichung vom Wert in unendlicher Entfernung  $\delta C_M$  ist für einen Eiskernradius von  $b = 49$  mm und verschiedene Elektrodenradien  $a$  und Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_{\text{Eis}}$  entsprechend der Legende aufgetragen und mit Meßdaten verglichen. Die Tiefenskala des bereits in Wilhelms [1996, Abb. 2.27] dargestellten Kernendes von B26 [Schwager et al., 1996] bei 119.718 m wurde in eine auf das Ende bezogene Tiefenskala umgewandelt und für die Darstellung gedreht. Die verwendete DEP-Apparatur hatte einen Durchmesser von 100 mm und der Kern einen Durchmesser von 98 mm. Der Kernanfang von Bag 3007 des NGRIP-Kerns [Dahl-Jensen et al., 1997] in einer auf die entsprechende Tiefe von 1653.3 m bezogene Tiefenskala ist für eine Apparatur mit 110 mm Elektrodendurchmesser und einem Kern von 98 mm Durchmesser dargestellt. Die Fehlerbalken zeigen 4.5 % Fehler der Dielektrizitätskonstanten [Wilhelms et al., 1998] und einen geschätzten Ortsauflösungsfehler von 2 mm an. Die Meßelektrodenlänge ist für beide Apparaturen  $l = 10$  mm.

ren. Beim glatten, gesägten Kernende von NGRIP tritt dieser asymmetrische Abfall hingegen nicht auf. Die Meßdaten verifizieren also das Plattenkondensatormodell. Eine Dicke von 3 Radiendifferenzen  $d = |a - b|$  repräsentiert die Meßdaten optimal, während eine Dicke von  $4d$  bereits einen zu flachen Abfall beschreibt.

Damit kann man das Plattenkondensatormodell für die in der vorliegenden Arbeit diskutierten hochfrequenten Messungen akzeptieren und den Einflüßbereich

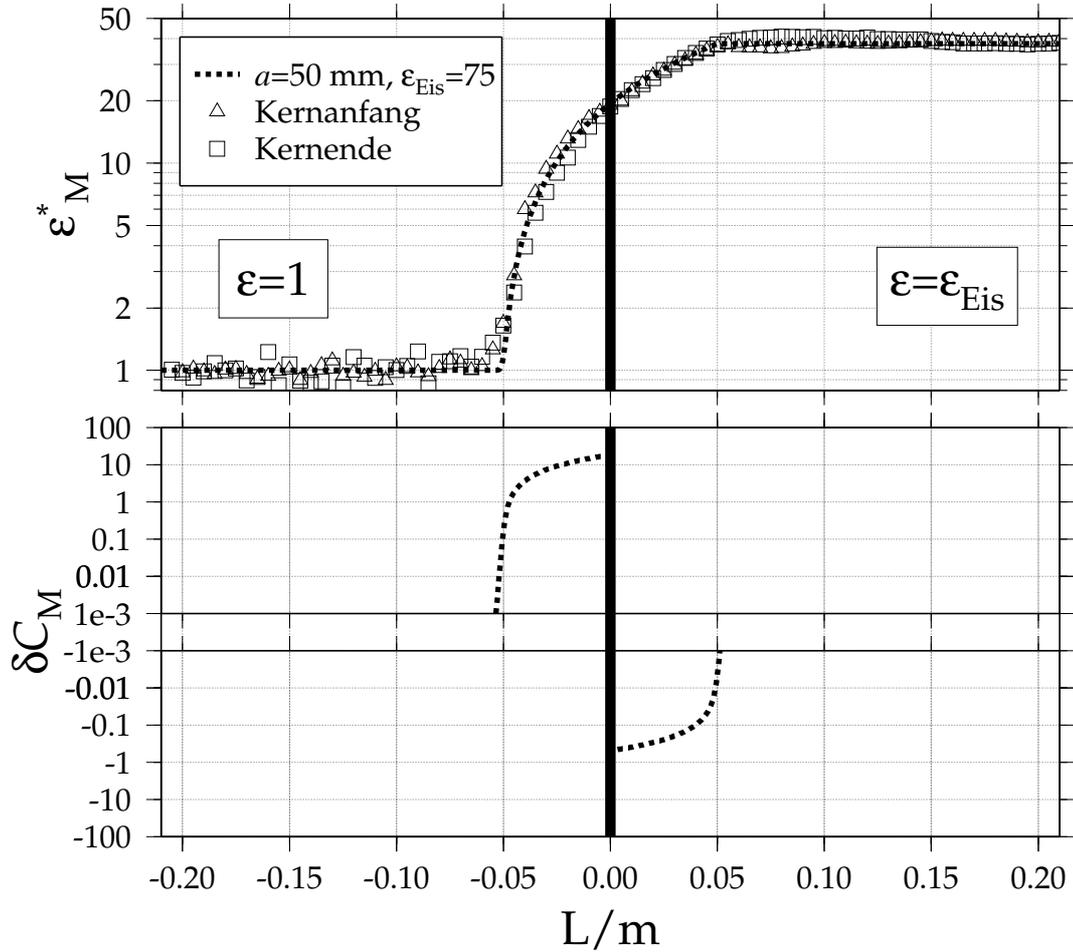


Abbildung 2.15: Effektive Dielektrizitätskonstante und ihre relative Abweichung bei niedrigen Frequenzen an einer Grenzfläche in axialer Richtung

Der zu erwartende Verlauf der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten nach dem Plattenkondensatormodell  $\varepsilon_M^* = \frac{C_M}{C_0^\infty}$  im Bereich der Grenzflächen und die relative Abweichung vom Wert in unendlicher Entfernung  $\delta C_M$  ist für einen Eiskernradius von  $b = 49$  mm, einen Elektrodenradius  $a = 50$  mm und die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_{\text{Eis}} = 75$  aufgetragen und mit Meßdaten des Kerns FB9817 [Oerter et al., 2000] verglichen. Die Tiefenskala wurde auf den Kernanfang bei 15.705 m bzw. das Kernende bei 16.685 m bezogen, wobei das Kernende entsprechend für die Darstellung gedreht wurde. Die Fehlerbalken sind kleiner als die verwendeten Symbole und deshalb nicht dargestellt. Die Meßelektrodenlänge ist hier  $l = 100$  mm.

der Nachbarschicht bei Messungen mit der Apparatur an NGRIP auf maximal 3 cm abschätzen, während er bei allen anderen Messungen unter 1 cm bleibt. Die Auflösung der Apparaturen liegt also im Bereich einer Meßelektrodenlänge. Deshalb stellt die Theorie keinen limitierenden Faktor dar.

Abbildung 2.15 zeigt die Anwendbarkeit des Plattenkondensatormodells auf niederfrequente Messungen. Bei niederfrequenten Messungen mit Kreisfrequenzen von  $\omega \simeq 2\pi 100$  Hz ist die effektive Dielektrizitätskonstante von Eis  $\varepsilon^*$  für die gewählten Apparaturdimensionen zwar um eine Größenordnung größer als bei hochfrequenten Messungen mit einer Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi 250$  kHz, die Frequenz aber um mehr als zwei Größenordnungen kleiner. Damit die Impedanz  $Z = 1/(i\omega\varepsilon^*C_0^\infty)$  nicht größer als der Meßbereich der Meßbrücke wird, wird eine 100 mm breite Meßelektrode,

also 10 mal länger als bei niederfrequenten Messungen, verwendet. Der Verlauf der Dielektrizitätskonstanten in Abbildung 2.15 zeigt die exakte Übereinstimmung zwischen Plattenkondensatormodell und Theorie, d.h. für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Messungen im niederfrequenten Bereich ist das Modell eines Plattenkondensators anwendbar. Die Verwendung einer die axiale Abhängigkeit vernachlässigenden Theorie ist hier in keiner Weise limitierend, da der Einflußbereich der Nachbarschicht lediglich eine halbe Meßelektrodenbreite ist. Messungen innerhalb einer halben Meßelektrodenbreite um das Kernende mit großen Abweichungen nach Abbildung 2.15 sind nicht sinnvoll, da die Mediengrenze im Meßbereich liegt.

Für die im Rahmen dieser Arbeit diskutierten Apparaturen stellt die vorgestellte Theorie eine wenigstens auf 1 % exakte Beschreibung der Verhältnisse dar. Die axiale Auflösung wird durch die Vernachlässigung der axialen Abhängigkeit in der Theorie nur vernachlässigbar herabgesetzt.

# Kapitel 3

## Meßanwendungen mit der Theorie für 2 Schichten

Die Anwendung der in Abschnitt 2.3 für ein Medium mit Kern bzw. Bohrlochmatrix und einer Isolierschicht ausformulierten Theorie beinhaltet verschiedene Aspekte. Zunächst ist für die gemessene effektive Dielektrizitätskonstante und die ebenfalls fehlerbehafteten Apparaturparameter die Dielektrizitätskonstante des Mediums  $\varepsilon_i$  mit einer Fehlerangabe gesucht. Dazu werden im nächsten Abschnitt 3.1 die Potenzreihen für die effektive Dielektrizitätskonstante angegeben und die Eigenschaften der Funktion als Abbildung diskutiert. Mit numerischen Methoden zur Nullstellenbestimmung von Gleichungen wird die gesuchte Dielektrizitätskonstante des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix iterativ bestimmt. Die Ableitungen der Umkehrfunktion werden aus den mit der iterativ bestimmten Dielektrizitätskonstanten des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix ausgewerteten Potenzreihen für die Ableitungen der effektiven Dielektrizitätskonstanten bestimmt. Die Ableitungen der Umkehrfunktion sind die zur Fehlerrechnung gesuchten Größen. In Abschnitt 3.2 werden die fehlersensiblen Größen einer Apparatur für die Eiskernmessung identifiziert und eine Apparaturdimensionierung unter den weiteren vorgegebenen technischen Rahmenbedingungen durchgeführt.

### 3.1 Die effektive Dielektrizitätskonstante und ihre numerische Umkehrung zugunsten der Kern- bzw. Matriceigenschaften

Zur Messung der dielektrischen Eigenschaften des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix  $\varepsilon_i$  wird die Kapazität der Anordnung  $C$  gemessen und die Leerkapazität  $C_0^\infty$  durch Eichung, Messung oder Berechnung bestimmt. Zunächst sind dazu die Potenzreihen für die effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon^*$  und ihre Ableitungen in Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix  $\varepsilon_i$  und der Isolierschicht  $\varepsilon_a$  bereitzustellen und in ihrem Verhalten zu diskutieren. Danach wird in Abschnitt 3.1.3 das Newton-Verfahren zur numerischen Umkehrung der Potenzreihen eingeführt und die Eindeutigkeit der Lösungen diskutiert.

### 3.1.1 Dielektrizitätskonstante und Ableitungen als Potenzreihen

Verschwindende Randspalte ( $\psi = 0$ ) angenommen, d.h. die in Gleichung (2.20) und (2.49) zusammengefaßte Leerkapazität des unendlich langen Zylinders  $C_0^\infty$  geht mit Relationen aus Bronštein und Semendjajew [1989, Abschn. 2.5.2.1.3. & 2.5.2.3.4.] über zu:

$$\begin{aligned} C_0^\infty &= \varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \ln \left( \cot \frac{\xi}{2} \right)^2 = \varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + (\cos \frac{\xi}{2})^2 - (\sin \frac{\xi}{2})^2}{1 - (\cos \frac{\xi}{2})^2 + (\sin \frac{\xi}{2})^2} \\ &= \varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \cos \xi}{1 - \cos \xi} = 2 \varepsilon_0 \frac{1}{\pi} \operatorname{artanh}(\cos \xi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Außer dieser Relation für die Leerkapazität  $C_0^\infty$  benötigt man für die Bestimmung der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^*$  nach Gleichung (2.50) noch die Koeffizienten  $b_{m<}^a \equiv b_{m<}^1$  bzw.  $a_{m>}^a \equiv a_{m>}^1$  für zwei Schichten nach den Gleichungen (2.74) und (2.77). Setzt man diese Relationen ein, so erhält man nach geeigneter Differentiation der Ursprungsreihe, die wegen der Existenz der Ableitung für die hier behandelten Reihen nach Abschnitt 2.2.5.3 die gesuchte Potenzreihe ist, die in der ersten und zweiten Spalte von Tabelle 3.1 angegeben Potenzreihen.

Die im folgenden diskutierte Implementierung der Reihen auf elektronischen Rechnern benutzt das in Abschnitt 2.2.5 beschriebene Verfahren der Restgliedabschätzung von Potenzreihen. Dazu benötigt man die in der dritten Spalte der Tabelle aufgelisteten majorisierenden Reihen und ihre analytischen Summen in der vierten Spalte.

#### 3.1.1.1 Implementierung der Potenzreihen

Bei der Betrachtung der Restglieder der Potenzreihen treten bei den Ableitungen auch Potenzen  $r \neq 1$  des Nenners entsprechend der allgemeinen Form der Reihe (2.53) und ihrer majorisierenden Reihe (2.56) auf. Die übrigen Abschätzungen können analog zu den Abschätzungen für die Potenzreihen von Feld, Potential und Fluß in Abschnitt 2.3.4 zu  $\mathcal{D} = |(\varepsilon_i - \varepsilon_a)/(\varepsilon_i + \varepsilon_a)| v^2 < 1$  und mit  $P_0 = 1$  gewählt werden. Entsprechend der Diskussion über Ableitung und Stammfunktion einer komplexen Potenzreihe im Abschnitt 2.2.5.3 existieren die Ableitungen der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^*$  ebenfalls.

Die in Tabelle 3.1 angegebenen Reihen sind in dem in Anhang B angegebenen Quellcode `eps2lay.c` entsprechend implementiert.

### 3.1.2 Abbildungseigenschaften der Dielektrizitätskonstanten

Zur Darstellung der Abbildungseigenschaften wurde ein in Anhang B aufgelistetes Skript `epsmap.gmt` entwickelt, das auf das Programm mit in Anhang B aufgelistetem Quellcode `epsgrid.c` zurückgreift. Mit diesen Hilfsmitteln können die Abbildungseigenschaften studiert werden. Um eine möglichst große Allgemeingültigkeit

Tabelle 3.1: Die Restglieder der Potenzreihen für die effektive Dielektrizitätskonstante und ihre Ableitungen

In der zweiten Spalte findet man die Funktion für die in der ersten Spalte angegebene Größe. In eckigen Klammern (...) ist eine Potenzreihe definiert, die mit der in der dritten Spalte angegebenen Potenzreihe und ihrer in der vierten Spalte ausgewerteten Summe majorisiert wird.

| Größe   | Funktion [Potenzreihe $S(0, \infty)$ ]   |  | majorisierende Potenzreihe $\bar{S}(0, \infty)$  |  |
|---|--|--|--|--|
|   | Potenzreihendarstellung  |  | summierte Funktion   |  |
| $\varepsilon^*$   | $\varepsilon_a \left( 1 + \frac{4}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a v^{4l+2} \cos(2m+1)\xi}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \frac{2m+1}{1 - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+2}} \right] \right)$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2}}{2m+1}$                  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2} \operatorname{artanh}(v^2)$                                   |  |
| $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i}$     | $\frac{8}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left[ \frac{\varepsilon_a^2}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2} \cos(2m+1)\xi}{1 - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+2}} \right]$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2}}{2m+1}$               | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \operatorname{artanh}(v^2)$                                |  |
| $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_a}$     | $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a} - \frac{8}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left[ \frac{\varepsilon_a \varepsilon_i}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2} \cos(2m+1)\xi}{1 - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+2}} \right]$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a \varepsilon_i}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2}}{2m+1}$ | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a \varepsilon_i}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \operatorname{artanh}(v^2)$                  |  |
| $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial v}$                 | $\frac{8 \varepsilon_a}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+1} \cos(2m+1)\xi \right]$  | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \sum_{m=0}^{\infty} v^{4m}$                | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^2} \frac{v}{1 - v^4}$                           |  |
| $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \xi}$               | $\frac{1}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_a}{\sin \xi} - 4 \varepsilon_a \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a v^{4l+2} \sin(2m+1)\xi}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \frac{\sin(2m+1)\xi}{1 - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+2}} \right] \right)$ | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2} \sum_{m=0}^{\infty} v^{4m}$                                 | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right }{1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2} \frac{v^2}{1 - v^4}$  |  |
| $\frac{\partial^2 \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i^2}$ | $\frac{16}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \left[ \frac{\varepsilon_a^2}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{4m+2} (\cos(2m+1)\xi)}{\left( 1 - \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} v^{4m+2} \right)^3} \right]$   | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^{8m+4} + v^{4m+2}}{2m+1}$    | $\frac{\left  \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right ^2}{\left( 1 - \left  \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_a}{\varepsilon_l + \varepsilon_a} \right  v^2 \right)^3} (\operatorname{artanh}(v^4) + \operatorname{artanh}(v^2))$ |  |

Mit den Definitionen  $v = \frac{b}{a}$  innerhalb bzw.  $v = \frac{a}{b}$  außerhalb der Elektroden.

der Ergebnisse zu erhalten, betrachtet man alle Größen bezogen auf die Dielektrizitätskonstante der äußeren Schicht. Man formt die Potenzreihe für  $\varepsilon^*$  in Tabelle 3.1 wie folgt um:

$$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a} = \left( 1 + \frac{4}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} v^{4m+2} \frac{\cos(2m+1)\xi}{2m+1}}{1 - \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} v^{4m+2}} \right). \quad (3.2)$$

In den Algorithmen entspricht dies  $\varepsilon_a = 1$  zu setzen und  $\varepsilon_i$  als Laufvariable zu betrachten. Um in der hier geforderten Allgemeinheit den Definitionsbereich der Laufvariable  $\varepsilon_i$  zu konstruieren, ist der Wertebereich der Abbildung  $\varepsilon_i/\varepsilon_a$  für positive Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten mit der in Gleichung (2.24) festgelegten Konvention mit negativem Vorzeichen des Imaginärteils zu betrachten:

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_i' - i\varepsilon_i''}{\varepsilon_a' - i\varepsilon_a''} = \frac{(\varepsilon_i' - i\varepsilon_i'')(\varepsilon_a' + i\varepsilon_a'')}{\varepsilon_a'^2 + \varepsilon_a''^2} = \frac{\varepsilon_i' \varepsilon_a' + \varepsilon_i'' \varepsilon_a''}{|\varepsilon_a|^2} + i \frac{\varepsilon_i' \varepsilon_a'' - \varepsilon_i'' \varepsilon_a'}{|\varepsilon_a|^2}. \quad (3.3)$$

Berücksichtigt man nun, daß die  $\varepsilon_{i/a}' \geq 1$  und die  $\varepsilon_{i/a}'' \geq 0$  vorausgesetzt waren, so bildet die Quotientenbildung den vierten Quadranten mit positivem Real- und negativem Imaginärteil auf die rechte Halbebene mit positivem Realteil  $\mathbb{C}_{\operatorname{Re}>0}$  ab, diese ist der zu betrachtende Definitionsbereich der Abbildung. Abbildung 3.1 gibt einen Überblick für eine oft benutzte Apparatur.

Anhand Abbildung 3.1 lassen sich einige grundlegende Eigenschaften der effektiven Dielektrizitätskonstanten bezogen auf die Dielektrizitätskonstante im Isolierschichtbereich  $\varepsilon^*/\varepsilon_a$  als Abbildung des Dielektrizitätskonstantenverhältnisses  $\varepsilon_i/\varepsilon_a$  ablesen.

### 3.1.2.1 Antisymmetrie des Imaginärteils und Symmetrie des Realteils unter Spiegelungen an der reellen Achse

Die Symmetrie wird offensichtlich, wenn man die Entwicklung der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a}$  nach Radienverhältnissen  $v$  nach Gleichung (3.2) mit der geometrischen Reihe  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 3.4.7.1.] in eine Potenzreihe der relativen Dielektrizitätskonstantenverhältnisse umformt und den Kosinus in Exponentialfunktionen darstellt:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a} &= 1 + \frac{4}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} v^{4m+2} \frac{\cos(2m+1)\xi}{2m+1}}{1 - \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} v^{4m+2}} = \\ &= 1 + \frac{4}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} \right)^{n+1} \frac{(v^{2(n+1)})^{2m+1} e^{(2m+1)i\xi} + e^{-(2m+1)i\xi}}{2(2m+1)} = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} \right)^{n+1} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{2(n+1)\ln v + i\xi})^{2m+1}}{(2m+1) \operatorname{artanh}(\cos \xi)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{2(n+1)\ln v - i\xi})^{2m+1}}{(2m+1) \operatorname{artanh}(\cos \xi)} \right) = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} \right)^{n+1} \left( \frac{\operatorname{artanh}(e^{2(n+1)\ln v + i\xi})}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} + \frac{\operatorname{artanh}(e^{2(n+1)\ln v - i\xi})}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} \right) = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} \right)^{n+1} \frac{\operatorname{artanh}\left(\frac{e^{2(n+1)\ln v} (e^{i\xi} + e^{-i\xi})}{1 + e^{4(n+1)\ln v}}\right)}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)} = \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1} \right)^{n+1} \frac{\operatorname{artanh}\left(\frac{\cos \xi}{\cosh(2(n+1)\ln v)}\right)}{\operatorname{artanh}(\cos \xi)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

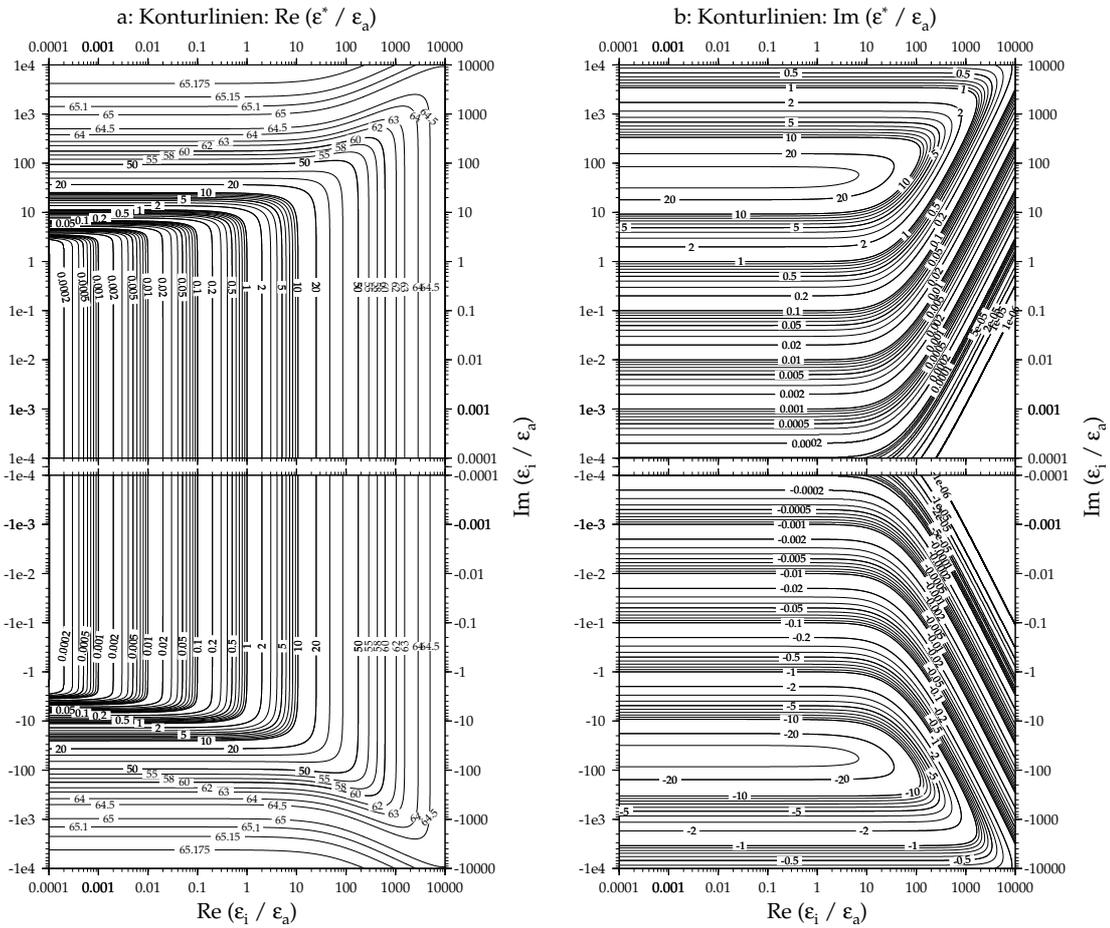


Abbildung 3.1: Abbildungseigenschaften von  $\frac{\epsilon^*}{\epsilon_a}(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a})$  für eine Standardapparatur. Die mit dem Skript `epsmap.gmt` erzeugte Ausgabe für Real- und Imaginärteil ist der Übersichtlichkeit wegen getrennt nach Real- (a:) und Imaginärteil (b:) dargestellt. Eingesetzt wurden das Radienverhältnis  $v = 0.98$ , also z.B. ein Elektrodendurchmesser von 100 mm und einen Eiskerndurchmesser von 98 mm, mit einem Elektrodenwinkel von  $\xi = \frac{\pi}{5}$ . Da bei der realen Apparatur die Isolierschicht mit Luft  $\epsilon_a = 1$  gefüllt ist, kann die Abbildung für diesen Fall auch als  $\epsilon^*(\epsilon_i)$  gesehen werden und es ist nur der Bereich mit  $\text{Re}(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a}) \geq 1$  und  $\text{Im}(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a}) \leq 0$  relevant. Um möglichst allgemein alle Fälle über Größenordnungen hinweg darzustellen, wurden logarithmische Achsen verwendet. Der wichtige Fall mit verschwindendem Imaginärteil ist deshalb hier nicht darstellbar, aber eindeutig aus dem Verlauf der Konturlinien ablesbar.

Dabei wurden beim Zusammenfassen die Entwicklung der Potenzreihe  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \text{artanh } x$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Tab. 1.1.3.2.] und das Additionstheorem  $\text{artanh } x + \text{artanh } y = \text{artanh } \frac{x+y}{1+xy}$  [Bronštein und Semendjajew, 1989, Kap. 2.5.2.3.5.] verwendet. Die in Gleichung (3.4) angegebene Entwicklung von  $\frac{\epsilon^*}{\epsilon_a}$  ist eine Potenzreihe in den komplexwertigen relativen Radienverhältnissen  $(\epsilon_i/\epsilon_a - 1)/(\epsilon_i/\epsilon_a + 1)$  mit reellen Koeffizienten. Die komplexe Konjugation  $z \rightarrow \bar{z}$  einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist die Abbildung, die den Realteil von  $z$  festhält und den Imaginärteil an der reellen Achse spiegelt [Remmert, 1995a, Kap. 0, §1, Abschn. 1]. Unter Verwendung der multiplikations- und additionsverträglichen Eigenschaften der komplexen Konjugation rechnet man die Verträglichkeit des relativen Dielektrizitätskonstantenverhältnisses der Eingangsvariablen  $\epsilon_i/\epsilon_a$  mit der

komplexen Konjugation nach:

$$\frac{\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right)} - 1}{\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}\right)} + 1} = \frac{\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} - 1\right)}}{\overline{\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} + 1\right)}} = \overline{\left(\frac{\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1}{\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1}\right)}. \quad (3.5)$$

Da die Reihe  $\varepsilon^*/\varepsilon_a$  in den relativen Dielektrizitätskonstantenverhältnissen reelle Koeffizienten hat, ist sie ebenfalls mit der Konjugation verträglich, womit folgt:  $\varepsilon^*/\varepsilon_a \overline{(\varepsilon_i/\varepsilon_a)} = \overline{\varepsilon^*/\varepsilon_a (\varepsilon_i/\varepsilon_a)}$ . Dieses Verhalten zeigt die beobachtete Symmetrie algebraisch exakt, denn der Realteil ist symmetrisch unter Spiegelung an der reellen Achse, während der Imaginärteil sein Vorzeichen ändert, also antisymmetrisch ist. Die Verträglichkeit der abgeleiteten Theorie mit der komplexen Konjugation zeigt, daß die in Definition (2.24) getroffene Konvention mit negativem Vorzeichen des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten, wie in Abschnitt 2.2.1 kurz erwähnt, tatsächlich willkürlich ist. Für die Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie können also beide Vorzeichenkonventionen, die gerade durch die komplexe Konjugation ineinander überführt werden, gewählt werden.

### 3.1.2.2 Endlicher Grenzwert der Abbildung bei $\infty$

Zu großen Eingangswerten  $\varepsilon_i/\varepsilon_a$  hin, sowohl im Real- als auch im Imaginärteil, scheint der Realteil von  $\varepsilon^*/\varepsilon_a$  einen endlichen Maximalwert anzunehmen. Bei der Betrachtung von Abbildung 3.1a ist dabei zu beachten, daß oberhalb von  $\text{Re}(\varepsilon^*/\varepsilon_i) = 50$  zusätzliche Konturlinien mit immer kleineren Abständen zu großen Werten hin eingefügt wurden. Der Imaginärteil hingegen verschwindet rasch, besonders bei großem Realteil des Eingangswertes. Der exakte Maximalwert ist für die in Abbildung 3.1 dargestellten Apparaturparameter  $\varepsilon^*/\varepsilon_a(\infty) = 65.185$ . Anschaulich geht  $(\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1)/(\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1) \rightarrow 1$  in der Grenze für unendlich große  $\varepsilon_i/\varepsilon_a$ . Hilbert und Cohn-Vossen [1996, §§36, 38] zeigen mit Hilfe der stereographischen Projektion, daß es einen eindeutigen Punkt  $\infty$  gibt, mit dem man die komplexe Ebene abschließt, in der Literatur wird sie auch oft abgeschlossene Ebene oder Riemannsche Zahlensphäre genannt und mit  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  bezeichnet [Fischer und Lieb, 1994, Kap. VI, §3]. Die gebrochen linearen Transformationen, wie hier  $(\varepsilon_i/\varepsilon_a - 1)/(\varepsilon_i/\varepsilon_a + 1) \rightarrow 1$ , sind gerade die sogenannten “Kreisverwandtschaften”, die den Punkt  $\infty$  nicht festlassen<sup>1</sup>. Damit wird die bereits bei der Festlegung der zu fordernden Eigenschaften der Dielektrizitätskonstanten in Abschnitt 2.2.1 erwähnte Behandelbarkeit von Metallen als ein Material mit unendlich hoher Dielektrizitätskonstante auch mathematisch verifiziert. Existiert nur ein Punkt  $\infty$ , so ist theoretisch nicht zwischen einem Material mit sehr hoher Dielektrizitätskonstante, d.h. großem Realteil, oder im Vergleich zur Meßfrequenz sehr hoher Leitfähigkeit, d.h. großem Imaginärteil, zu unterscheiden. Für ersteres erwartet man wegen der hohen Dielektrizitätskonstanten einen senkrechten Durchtritt der Feldlinien, zweiteres ist eine allgemein bekannte Eigenschaft von Metallen.

<sup>1</sup>Ganz analoge Abbildungseigenschaften hat die Caleyabbildung [Remmert, 1995a, Kap. 2, §2, Abschn. 2], die die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  biholomorph auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  abbildet, während hier die rechte Halbebene  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$  auf die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  abgebildet wird. Eine Drehung der rechten Halbebene  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$  um  $90^\circ$  in der mathematisch positiven Richtung in die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  ist die Multiplikation des Arguments mit der imaginären Einheit  $i$ . Kürzt man dann  $i$ , so geht die Caley-Abbildung in den hier behandelten Bruch über. Eine verallgemeinerte Caley-Abbildung findet man in Remmert [1995b, Kap. 8, §3, Abschn. 1, Bsp. 2].

### 3.1.2.3 Konsistenz mit dem Kondensator ohne Schichtung

Die Grenzfälle für ein homogenes Medium im ganzen Raum existieren. Denn betrachtet man für  $\varepsilon_i = \varepsilon_a$  in der Potenzreihe für die in Einheiten der Isolierschichtdielektrizitätskonstanten angegebene effektive Dielektrizitätskonstante (3.2)  $\varepsilon_i/\varepsilon_a \rightarrow 1$ , so folgt unmittelbar aus dem Verschwinden des Bruchs  $\varepsilon^* = \varepsilon_i = \varepsilon_a$ .

Beim Grenzübergang des Radienverhältnisses  $v \rightarrow 0$  folgt  $\varepsilon^* = \varepsilon_a$ , was bei einer verschwindend nah am Ursprung gelegenen Grenzfläche der Materialien gegeben ist. Betrachtet man umgekehrt  $v \rightarrow 1$ , so hängt die Summation nicht mehr vom Potenzen des Radienverhältnisses ab. Man faßt die verbleibende Summe nach Bronštein und Semendjajew [1989, Abschn. 4.4.1.2 Gl. 36.] zusammen und formt das Ergebnis analog zur Bestimmung der Leerkapazität in Gleichung (3.1) um:  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\xi}{2m+1} = -\frac{1}{2} \ln(\tan \frac{\xi}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{artanh}(\cos \xi)$ . Nach Einsetzen und Auswerten der relativen Dielektrizitätskonstantenverhältnisse, sowie Multiplikation mit  $\varepsilon_a$ , erhält man  $\varepsilon^* = \varepsilon_i$ , was bei einer vollständigen Ausfüllung mit dem inneren Medium gegeben ist. Die bei einer Erweiterung einer Theorie betrachteten Grenzfälle zum Altbekannten stimmen hier also auch überein.

Für die Auswertung einer Messung wird die Umkehrabbildung  $\varepsilon_i(\varepsilon^*)$  der eben diskutierten Abbildung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  benötigt, für die keine Reihe vorhanden ist. Aus den oben diskutierten Relationen der Abbildung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  wird im folgenden Abschnitt die Umkehrabbildung durch ein rekursives Verfahren mathematisch abgeleitet und implementiert.

### 3.1.3 Numerische Umkehrung mit dem Newton-Verfahren

Aus der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^* = C/C_0^\infty$  soll die implizit in der Potenzreihe  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  enthaltene Dielektrizitätskonstante des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix  $\varepsilon_i$  berechnet werden. D.h. die Umkehrfunktion  $\varepsilon_i(\varepsilon_m^*) \equiv (\varepsilon^*)^{-1}(\varepsilon_m^*)$  ist zu bestimmen.

Voraussetzung für die Umkehrbarkeit einer Funktion ist ihre Injektivität, d.h für eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  gilt für beliebige  $x_1, x_2 \in A$ :  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  [Barner und Flohr, 1987]. Auch für die Meßanwendung hier ist diese Forderung unmittelbar einsichtig. Falls zwei gleiche Meßwerte  $\varepsilon_m^*$  unterschiedlichen Eigenschaften des Kerns oder der Bohrlochmatrix  $\varepsilon_i$  zugeordnet werden können, macht die Messung keinen Sinn, da diese gerade eindeutig bestimmt werden sollen.

Bevor die analytischen Kriterien über die Umkehrbarkeit einer Abbildung in Abschnitt 3.1.3.2 diskutiert werden, soll zunächst im nächsten Abschnitt die, für die Anwendung vorteilhafte, Darstellung einer komplexen Zahl als Matrix diskutiert werden. Da die analytischen Kriterien mit reinen Abschätzungsbetrachtungen keine ausreichend allgemeine Aussage über die Invertierbarkeit der Abbildung geben, wird in Abschnitt 3.1.3.3 die Umkehrabbildung mit dem Newton-Verfahren rekursiv definiert und die Injektivität für den jeweiligen Anwendungsfall durch Nachrechnen auf einem den Anwendungsfall umfassenden Gitter nachgewiesen.

### 3.1.3.1 Darstellung komplexer Zahlen

In Remmert [1988, §2, Abschn. 5] ist der Körperisomorphismus  $F$ , d.h. eine alle Körpereigenschaften übertragende umkehrbare Abbildung, der komplexen Zahlen in einen kommutativen Unterring mit Körpereigenschaften der reellen  $2 \times 2$  Matrizen  $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$  angegeben:

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Mat}(2, \mathbb{R}), \quad x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Damit übertragen sich alle Sätze der reellen mehrdimensionalen Analysis auf komplexe Betrachtungen, so daß alle in den Sätzen auftretenden inversen Matrizen durch das Inverse der komplexen Zahl ersetzt werden können. Für die Implementierung auf Rechnern vereinfacht sich damit die Betrachtung von Matrizen auf komplexe Zahlen. Die partiellen Ableitungen von Real- bzw. Imaginärteil, wie sie z.B. bei einer Fehlerrechnung benötigt werden, sind über Identifikation mit der Jacobimatrix [Heuser, 1990b, Satz 164.1] der reellen Abbildung ablesbar. So ist allgemein die Ableitung  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) - i \frac{\partial v}{\partial y}(z) = \text{Re } f'(z) + i \text{Im } f'(z)$  [Remmert, 1995a, Kap. 1, §1, Abschn. 2] einer holomorphen Funktion  $f(z) = f(x + iy) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$  in Matrixschreibweise mit der Jacobimatrix  $\mathcal{J}_f(x, y)$  der Abbildung  $f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  über dem zweidimensionalen reellen Vektorraum mit Basis  $\{1, i\}$  identifiziert:

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \text{Re}(f'(z)) & -\text{Im}(f'(z)) \\ \text{Im}(f'(z)) & \text{Re}(f'(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}(x, y) \quad (3.7)$$

Die anhand der Matrix jeweils für die Diagonalen ablesbaren Identitäten für die partiellen Ableitungen sind gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

In der Matrixdarstellung wird auch unmittelbar offensichtlich, daß für die hier betrachteten mit komplexen Zahlen identifizierten Matrizen die Determinante der Matrix  $|\dots|$  [Fischer, 1989, Abschn. 4.2.4.] dem quadrierten Betrag  $|\dots|^2$  der komplexen Zahl entspricht:

$$\left| \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \right| = x^2 - y^2(-y) = x^2 + y^2 = |x + iy|^2. \quad (3.8)$$

### 3.1.3.2 Analytische Kriterien für die Umkehrbarkeit

Die mittels der Differentialrechnung getroffenen Aussagen über die Umkehrbarkeit von Funktionen gewinnt man aus dem Umkehrsatz [Heuser, 1990b, Satz 171.1]. Danach ist eine Umgebung mit Umkehrfunktion für einen offenen<sup>2</sup> Definitionsbereich einer stetig differenzierbaren Funktion um einen Punkt mit invertierbarer Ableitung sichergestellt. Des weiteren gibt er die Ableitung der Umkehrfunktion am Bildpunkt explizit als das Inverse der Ableitung am Urbildpunkt an. Dieser Satz garantiert

---

<sup>2</sup>Eine Untermenge eines reellen normierten Vektorraumes heißt offen, wenn jeder Punkt der Menge eine Umgebung besitzt, die noch ganz in der Menge enthalten ist [Heuser, 1990b, Kap. 111]. Für die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  als reeller Vektorraum z.B. die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  oder die Halbebene mit positivem Realteil  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ .

die lokale Umkehrbarkeit, d.h. die Umgebung ist im allgemeinen sehr klein. Von der lokalen Umkehrbarkeit kann keinesfalls auf die globale Umkehrbarkeit geschlossen werden. Heuser [1990b, Kap. 171] gibt ein Gegenbeispiel an. Unter bestimmten Bedingungen, z.B. Invertierbarkeit der Ableitung<sup>3</sup> im gesamten konvexen<sup>4</sup> Definitionsbereich, kann die lokale Umgebung als global nachgewiesen werden [Barner und Flohr, 1989, Kap. 14.6]. Diese Kriterien übertragen sich, wie im letzten Abschnitt 3.1.3.1, auf die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  als reeller zweidimensionaler Vektorraum. Der Umkehrsatz soll hier in der von Remmert [1995a, Kap. 9, §4, Abschn. 1] angegebenen Form verwendet werden:

**“Biholomorphiekriterium** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Injektion. Dann ist  $D' := f(D)$  ein Bereich in  $\mathbb{C}$ , und es gilt  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in D$ . Die Abbildung  $f : D \rightarrow D'$  ist biholomorph; für die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  gilt:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \text{für alle } w \in D' .” \quad (3.9)$$

Dieser Satz setzt über den reinen Umkehrsatz hinausgehend voraus, daß die Abbildung injektiv ist. Die auf Abschätzungen beruhenden Kriterien, wie z.B. das “Injektivitätslemma für Potenzreihen”, oder das “Approximationslemma” [Remmert, 1995a, Kap. 9, §4, Abschn. 2], weisen letztlich das Nichtverschwinden des Betrages der Ableitung in der Umgebung eines Punktes nach, was nach Gleichung (3.8) einer nichtverschwindenden Jacobimatrix gleichkommt und somit das oben genannte Kriterium für globale Invertierbarkeit ist.

Der Nachweis über eines der allgemeinen – Abschätzungen verwendenden – Kriterien wurde für die hier behandelte Potenzreihe von  $\varepsilon^*$  versucht, ist aber nicht gelungen. Auf die Darstellung von Beispielen zum Versagen der hinreichenden aber nicht notwendigen Kriterien [Barner und Flohr, 1987, Kap. 1.5] wird verzichtet, da das Versagen der Kriterien lediglich einen mathematisch exakten und eleganten Weg verschließt, i.a. aber nicht impliziert, daß die Abbildung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  nicht injektiv ist. Die Überprüfung der Kriterien würde die numerische Berechnung der zu überprüfenden Bedingung im betrachteten Bereich bedeuten. Damit wären die Beweise zwar geführt, für die Anwendung aber nicht viel gewonnen. Mehr Informationen erhält man durch einen direkten Test des Biholomorphiekriteriums. Die Holomorphie von  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  ist mit der expliziten Angabe der Ableitung in Tabelle 3.1 erfüllt. Zu Prüfen bleibt die Injektivität, d.h. der Umkehralgorithmus muß auf das Bild  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  angewendet das Urbild  $\varepsilon_i$  liefern. Dieser Test liefert zusätzlich Abschätzungen über die numerische Genauigkeit des im nächsten Abschnitt vorgestellten Algorithmus zur Umkehrung der Abbildung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$ .

---

<sup>3</sup>In Barner und Flohr [1989, Kap. 14.6] als Nichtverschwinden der Determinante der Jacobimatrix vorausgesetzt, was aber äquivalent ist [Kowalsky, 1970; Heuser, 1990b, Satz 172.1].

<sup>4</sup>Eine Teilmenge eines normierten Raumes heißt konvex, wenn sie mit je zweien ihrer Punkte auch deren gerade Verbindungsstrecke enthält [Heuser, 1990b, Kap. 161]. D.h. z.B., daß die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  und die Halbebene mit positivem Realteil  $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$  als Teilmengen der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  konvex sind.

### 3.1.3.3 Newton-Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung

Zur numerischen Bestimmung von Nullstellen sind in der Literatur zahlreiche Verfahren mit mehr oder minder guten Konvergenzeigenschaften beschrieben. Letztlich entscheidet die Konvergenz und ihre Geschwindigkeit über die Brauchbarkeit eines Verfahrens im konkreten Anwendungsfall. In dem hier behandelten Fall erfüllt das Newton-Verfahren [Heuser, 1990b, Kap. 189] alle geforderten Eigenschaften. Dieses Verfahren spielt nicht nur als Standardminimierungsverfahren bei der Kurvenanpassung [Leo, 1994, Kap. 4.7] in der Physik, sondern auch in der numerischen Mathematik und Technik eine wesentliche Rolle als Basisverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme [Schwetlick und Kretzschmar, 1991, Kap. 7]. Für mehrdimensionale Probleme ist das eng verwandte Newton-Raphson-Verfahren die einzige elementare Methode, die gut funktioniert, falls ein guter Startwert für die Lösung abgeschätzt werden kann [Press et al., 1992].

Für einen gemessenen Wert der effektiven Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^*$  bestimmt man die Lösung  $\varepsilon_i^\times$  der Gleichung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i^\times) - \varepsilon_m^* = 0$ . Das Newton-Verfahren ist iterativ, d.h. beginnend mit einem Startwert  $\varepsilon_i^0$  iteriert man die mit  $n$  indizierte sogenannte Newton-Folge  $\mathfrak{N}(\varepsilon_i^n)$ , die für die Berechnung von  $\varepsilon_i(\varepsilon^*)$  mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Relationen lautet:

$$\varepsilon_i^{n+1} = \mathfrak{N}(\varepsilon_i^n) \equiv \varepsilon_i^n - \frac{\varepsilon^*(\varepsilon_i^n) - \varepsilon_m^*}{\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i}(\varepsilon_i^n)}, \quad (3.10)$$

bis ein sogenannter Fixpunkt  $\varepsilon_i^\times$  erreicht ist, d.h. die Iteration von  $\mathfrak{N}(\varepsilon_i^\times) = \varepsilon_i^\times$ . Dabei wurde das im Satz [Heuser, 1990b, Kap. 189] auftretende Inverse der Jacobimatrix  $(\partial \varepsilon^* / \partial \varepsilon_i)^{-1}(\varepsilon_i^n)$  nach den Betrachtungen in Abschnitt 3.1.3.1 als das Inverse der komplexen Zahl  $1/(\partial \varepsilon^* / \partial \varepsilon_i)$  eingesetzt. Damit wird auch nochmals die im Umkehrsatz geforderte Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix klar. Im Biholomorphiekriterium ergibt sich das Nichtverschwinden der Ableitung aus der Injektivität. Bei der Anwendung hier soll das Nichtverschwinden der Ableitung auf dem Definitionsbereich nicht gesondert nachgeprüft werden, da andernfalls das Newton-Verfahren sowieso divergiert. Die verfolgte Strategie ist vielmehr, das Verfahren in einem Algorithmus anzuwenden und das Ergebnis mit dem Ausgangswert zu vergleichen. Das Übereinstimmen zeigt die Injektivität und damit auch das Nichtverschwinden der Ableitung. Bei verschwindender Ableitung würde allein die Berechnung auf Rechnern Fehler liefern, da entweder direkt Fließkommazahlbereichsüberläufe auftreten oder das Verfahren instabil wird.

Ein Fixpunkt  $\varepsilon_i^\times$  der Newton-Folge ist tatsächlich Lösung der Gleichung  $\varepsilon^*(\varepsilon_i^\times) - \varepsilon_m^* = 0$ , da man dann in der Gleichung für die Newton-Folge (3.10)  $\varepsilon_i^\times$  auf beiden Seiten subtrahieren kann und nach Multiplikation mit der Ableitung, die nach obiger Diskussion ungleich Null ist, die gesuchte Relation  $\varepsilon^*(\varepsilon_i^\times) - \varepsilon_m^* = 0$  erhält.

Der Startwert ist nach den Rechenvorschriften nahe genug bei der Lösung zu wählen. Viele Betrachtungen zur Wahl des Startwertes wären möglich, hier wurde das zu invertierende Ergebnis  $\varepsilon_m^*$  als Startwert  $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_m^*$  der Newton-Folge gewählt. Die Newton-Folgenabbildung bildet gemeinsam mit dem Startwert eine Rechenvorschrift. Absehbare Anwendungen sollten sich im Rahmen von Verhältnissen der Dielektrizitätskonstanten, die einen Faktor 10 000 nicht überschreiten, bewegen. In

Abschnitt 3.1.3.4 wird auf einem engmaschigen Gitter gezeigt werden, daß die eben angegebene Rechenvorschrift aus Newton-Folge mit Startwert eine injektive Abbildung auf dem Wertebereich der effektiven Dielektrizitätskonstanten bilden, denn ansonsten sollte es Ursprungswerte geben, die nicht reproduziert werden. Zu einer gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^*$  findet man dann eine eindeutige Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i^x$  des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix.

Zur Implementierung eines numerischen Verfahrens ist es noch notwendig, die Abbruchbedingung anzugeben, d.h. wann die Iteration sich der Norm nach nicht mehr als um einen Wert  $\epsilon$  ändert und man den Fixpunkt  $\varepsilon_i^x$  als erreicht ansieht. Bei der im Quellcode `eps2lay.c` (Anhang B) implementierten Funktion `epsinv` wurde als Abbruchbedingung eine relative Abweichung von weniger als der auch bei der Implementierung der Potenzreihen für die effektive Dielektrizitätskonstante und ihre Ableitungen nach Tabelle 3.1 verwendeten relativen Genauigkeit in jeder Komponente verwendet. Die bei der in Anhang B vorgestellten Implementierung verwendete Relativgenauigkeit von  $\epsilon = 10^{-8}$  entspricht einer tatsächlich erreichten Relativgenauigkeit von  $10^{-7}$ , die auch der Relativgenauigkeit `FLT_EPSILON`  $\approx 1.2 \times 10^{-7}$  und den signifikanten Dezimalziffern `FLT_DIG` = 6 für einfach genaue Gleitkommazahlen [Kernighan und Ritchie, 1990, Anhang B.11] des für Rechnungen im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Linuxsystems [S.u.S.E., 1998; Kofler, 1995] und der Workstations mit Betriebssystem Solaris™ 2.6 entspricht. Der endlich lange Meßkondensator wird mit einer unendlichen axialen Ausdehnung und verschwindende Randspalte annehmenden Theorie behandelt. Die nach Abschnitt 2.1.5 verbleibende Ungenauigkeit der Theorie für einen realen Meßkondensator ist in der Größenordnung von 1 ‰ anzugeben, womit die Implementationsgenauigkeit in keiner Weise limitierend ist.

### 3.1.3.4 Numerische Genauigkeit des Newton-Verfahrens

Wie in der vorangegangenen Diskussion schon angedeutet ist die Injektivität des Verfahrens nachzuweisen. Für die Abmessungen einer bei Eiskernmessungen häufig verwendeten Apparatur wurde der Bildpunkt  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a}(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a})$  zunächst berechnet und dann mit dem im letzten Abschnitt beschriebenen Newton-Verfahren invertiert. Abbildung 3.2 zeigt geringe relative Abweichung für Real- und Imaginärteil vom Ausgangswert und recht schnelle Konvergenz.

Zu der in Abbildung 3.2 für ein Radienverhältnis von  $v = 0.98$  vorgenommenen Betrachtung wurden analog für weitere Radienverhältnisse zwischen  $v = 0.01, \dots, 0.99$  die in Tabelle 3.2 aufgelisteten Ergebnisse erhalten. Insbesondere zeigt sich, daß für Radienverhältnisse von  $v \geq 0.2$  der Fehler auf dem gesamten Gitter unter 1 ‰ bleibt. Selbst für ein Radienverhältnis von  $v = 0.01$  bleibt der Fehler bei 300 ‰. Schließt man einen relativ kleinen Bereich mit Beträgen des Realteils von weniger als 0.03 bei gleichzeitig einem betragsmäßigen Imaginärteil von mehr als 500 aus, so sind selbst für ein Radienverhältnis von  $v = 0.01$  die Fehler unter 1 ‰. Das sind bei weitem ausreichende Präzisionen im Vergleich zur relativen Meßgenauigkeit in der praktischen Anwendung. Damit ist die Injektivität der Abbildung  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a}(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a})$  auf einem engmaschigen Gitter, das den technisch sinnvoll meßbaren Anwendungsbereich beinhaltet, für den Umkehralgorithmus mit dem Meßwert  $\frac{\varepsilon_m^*}{\varepsilon_a}$  als Startwert der

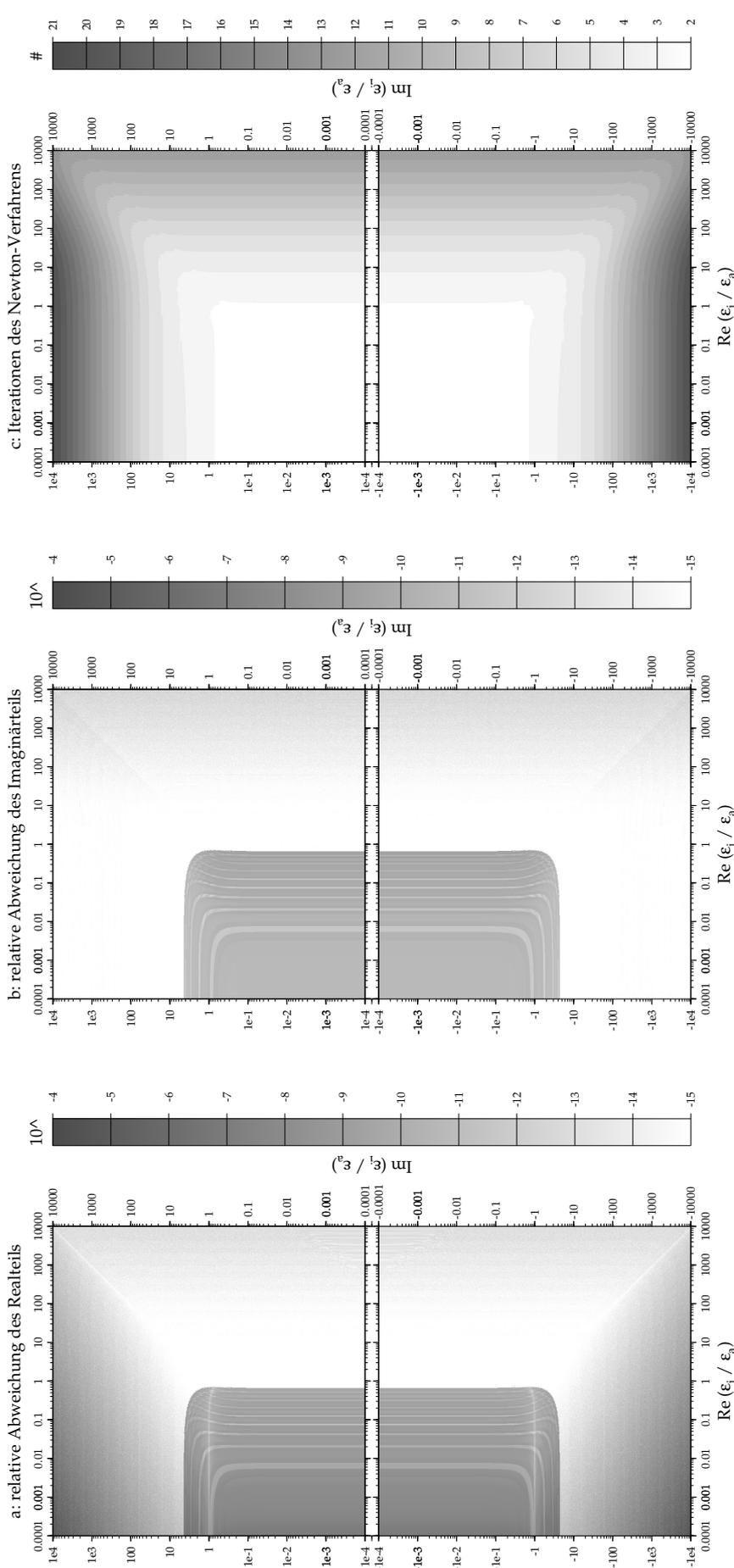


Abbildung 3.2: Inversionseigenschaften des Newtonverfahrens für eine Standardapparatur

Für die Abmessungen einer häufig verwendeten Standardapparatur wurde die auf den Ausgangswert bezogene relative Abweichung des Real- (a:) und des Imaginärteils (b:) nach Inversion des Bildwertes mit dem Newton-Verfahren dargestellt. Die Konvergenz des Newton Verfahrens mit dem Bildpunkt als Startwert erfolgt in relativ wenigen Iterationsschritten (c:). Eingesetzt wurden das Radienverhältnis  $v = 0.98$ , also z.B. ein Elektrodendurchmesser von 100 mm und einen Eiskerndurchmesser von 98 mm, mit einem Elektrodenwinkel von  $\xi = \frac{\pi}{5}$ . Da bei der realen Apparatur die Isolierschicht mit Luft  $\varepsilon_a = 1$  gefüllt ist, kann die Abbildung für diesen Fall auch als die Umkehrung von  $\varepsilon^*(\varepsilon_i)$  gesehen werden und es ist nur der Bereich mit  $\text{Re}(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}) \geq 1$  und  $\text{Im}(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}) \leq 0$  relevant. Logarithmische Achsen stellen eine möglichst allgemeine Darstellung über Größenordnungen hinweg sicher. Der wichtige Fall mit verschwindendem Imaginärteil ist eindeutig aus der Graustufengrafik interpolierbar.

Tabelle 3.2: Maximale relative Abweichungen und Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz des Newton-Algorithmus für verschiedene Radienverhältnisse

| Maximale relative Abweichung<br>und Anzahl der Iterationen<br>auf verschiedenen Gittern |                           |             |                            |
|---|---------------------------|-------------|----------------------------|
| $v$   | $\delta_{\square}$<br>[‰] | $\#\square$ | $\delta_{\boxplus}$<br>[‰] |
| 0.01  | 336.70                    | 43          | 0.9508                     |
| 0.02  | 72.75                     | 41          | 0.2015                     |
| 0.05  | 10.75                     | 39          | 0.1713                     |
| 0.10  | 3.03                      | 37          | 0.0082                     |
| 0.20  | 0.69                      | 35          | 0.0023                     |
| 0.30  | 0.32                      | 33          | 0.0009                     |
| 0.40  | 0.24                      | 32          | 0.0007                     |
| 0.50  | 0.19                      | 31          | 0.0005                     |
| 0.60  | 0.18                      | 30          | 0.0008                     |
| 0.70  | 0.15                      | 29          | 0.0220                     |
| 0.80  | 0.13                      | 28          | 0.0148                     |
| 0.89  | 0.12                      | 26          | 0.0032                     |
| 0.90  | 0.13                      | 26          | 0.0052                     |
| 0.95  | 0.10                      | 24          | 0.0031                     |
| 0.98  | 0.09                      | 21          | 0.0014                     |
| 0.99  | 0.12                      | 19          | 0.0005                     |

Für verschiedene Radienverhältnisse  $v$  und den festen Meßelektrodenwinkel  $\xi = \frac{\pi}{5}$  ist die maximale relative Abweichung in Real- und Imaginärteil  $\delta$  in ‰ und die Anzahl der benötigten Iterationen bis zum Erreichen der Abbruchbedingung des Newton-Verfahrens  $\#$  bei der Rückrechnung der Werte  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a}(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a})$  zu  $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}$  angegeben. Mit  $\square$  bezeichnete Größen beziehen sich auf ein Gitter mit einer Schrittweite von 0.01, jeweils im Bereich von  $\pm 4$  für die Eingangsgröße der dekadisch logarithmischen Achsen. Real- und Imaginärteil des in Gleichung (3.3) explizit berechneten Dielektrizitätskonstantenverhältnisses wurden mit Beträgen zwischen 0.0001, ..., 10 000 berechnet. Unter Nichtberücksichtigung des rechteckigen Bereichs mit der schlechtesten Reproduzierbarkeit, durch den in etwa diagonal die Grenze der maximalen relativen Abweichung von etwa 1 ‰ für ein Radienverhältnis von  $v = 0.01$  hindurchverläuft wurde auf demselben Gitter die mit  $\boxplus$  bezeichnete Größe berechnet. Der nicht berücksichtigte rechteckige Bereich für das Gebiet mit gleichzeitig kleinerem Realteil als 0.03 und größerem Betrag des Imaginärteil als 500 ist immer noch klein.

Newton-Iteration  $\mathfrak{N}(\varepsilon_i^n/\varepsilon_a)$  verifiziert. Im Rahmen der für die Anwendung ausreichenden numerischen Genauigkeit ist der Fixpunkt der Newtonfolge  $\varepsilon_i^x/\varepsilon_a$  identisch mit dem Ausgangswert  $\varepsilon_i/\varepsilon_a$ .

Damit ist das Biholomorphiekriterium erfüllt und die Anwendung der Aussage über die Ableitung der Umkehrfunktion (3.9) liefert die besonders für die Fehlerrechnung benötigten Aussagen über die Ableitung der Umkehrfunktion nach den sie parametrisierenden Größen.

### 3.1.4 Ableitungen der Umkehrfunktion

Zur besseren Übersichtlichkeit sei von nun an  $\varepsilon_a$  wieder als Variable und nicht mehr als Skalenparameter angesehen. Betrachtungen finden nun in der bei einer Meßanwendung benötigten Form mit den Größen  $\varepsilon^*$  und  $\varepsilon_i$  statt, nicht mehr in den auf den Skalenparameter bezogenen Größen  $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a}$  bzw.  $\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_a}$ . Mit der Bereitstellung der Umkehrfunktion über das Newton-Verfahren und Sicherstellung der Injektivität der Urfunktion, also der Erfüllung des Biholomorphiekriteriums (3.9), ist die Ableitung

der Umkehrfunktion am Bildpunkt ebenfalls als das Inverse der Ableitung der Urfunktion am Urbildpunkt gegeben.

Für einen gemessenen Bildpunkt  $\varepsilon_m^*$  mit durch die Umkehrfunktion eindeutig zugewiesenem Urbildpunkt als Fixpunkt der Newtonfolge  $\varepsilon_i^\times = (\varepsilon^*)^{-1}(\varepsilon_m^*)$  ist bei einer Fehlerrechnung die differentielle Abhängigkeit des berechneten Urbildpunktes  $\varepsilon_i^\times$  von den Apparaturparametern  $w = v, \xi, \varepsilon_a$  und dem gemessenen Bildpunkt  $\varepsilon_m^*$  gesucht. Die Ableitung nach dem Meßwert ergibt sich nach dem Biholomorphiekriterium (3.9) unter Berücksichtigung, daß  $\varepsilon^*(\varepsilon_i^\times) = \varepsilon_m^*$ :

$$\frac{\partial \varepsilon_i^\times}{\partial \varepsilon_m^*} \equiv \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_m^*} = \frac{\partial (\varepsilon^*)^{-1}}{\partial \varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_m^*} = \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i = \varepsilon_i^\times}}. \quad (3.11)$$

Für die praktische Berechnung wird aus einem Meßwert  $\varepsilon_m^*$  mit dem Newton-Verfahren der Fixpunkt  $\varepsilon_i^\times$  bestimmt und die gesuchte Ableitung als Kehrwert der Ableitung der als Potenzreihe vorhandenen Funktion  $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i}$  an der Stelle  $\varepsilon_i^\times$  berechnet.

Diese Relation benutzt man ebenfalls zur Bestimmung der Ableitung an der Fixpunktstelle nach den oben mit  $w$  allgemein bezeichneten Apparaturparametern. Die Funktion  $\varepsilon^*$  enthält implizit alle Abhängigkeiten von den Apparaturparametern. D.h. die Ableitung der gemessenen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i$  an der Fixpunktstelle berechnet sich nach der Kettenregel [Remmert, 1995a, Kap. 1, §3, Abschn. 1]:

$$\frac{\partial \varepsilon_i^\times}{\partial w} \equiv \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial w} \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_m^*} = \frac{\partial (\varepsilon^*)^{-1}}{\partial \varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_m^*} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial w} \Big|_{\varepsilon_i = \varepsilon_i^\times} = \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \varepsilon_i} \Big|_{\varepsilon_i = \varepsilon_i^\times}} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial w} \Big|_{\varepsilon_i = \varepsilon_i^\times}. \quad (3.12)$$

Also sind insgesamt alle gesuchten Ableitungen der Umkehrfunktion aus den am Urbildpunkt  $\varepsilon_i^\times$  ausgewerteten Potenzreihen der Ableitungen von  $\varepsilon^*$  zu bestimmen.

Die in Anhang B im Quellcode von `eps2lay.c` implementierte Funktion `epsinv` berechnet im Anschluß an die Umkehrung mit dem Newton-Verfahren die Ableitungen der Umkehrfunktion nach den eben abgeleiteten Relationen aus den Potenzreihen der Ableitungen der effektiven Dielektrizitätskonstanten. Damit sind nun alle Funktionen für die Auswertung einer Messung implementiert.

## 3.2 Dimensionierung und Fehlerrechnung einer Eiskernmeßapparatur

Die wesentlichen Randbedingungen für eine feldtaugliche Eiskernmeßapparatur sind technischer Natur. Eine Fehlerrechnung schätzt für eine vorgegebene Meßsituation die Genauigkeit der Eingangsgrößen ab und betrachtet ihre Auswirkung auf das Meßergebnis. D.h. eine Meßapparatur ist unter gegebenen Randbedingungen auf einen möglichst geringen Fehler des Meßergebnisses hin zu optimieren. Dazu ist es notwendig, den Beitrag der Eingangsfehler abzuschätzen und diese Fehlerquellen möglichst zu minimieren. Bei der Ableitung der Theorie wurden bereits Annahmen über die Bauform des Meßkondensators gemacht und in seiner Grundform folgt er

Abbildung 2.1 mit der Koordinatenfestlegung. Um für die vorgegebene Bauform die Fehlerabhängigkeiten zu identifizieren und nach Möglichkeit zu minimieren werden die einzelnen Abmessungen in ihrer beim Bau einer Apparatur auftretenden logischen Reihenfolge betrachtet. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Verbesserung der Meßgenauigkeit zerstörungsfreier dielektrischer Messungen an Eisbohrkernen. Eine Verbesserung ist im Vergleich zu früheren Arbeiten zu diskutieren. Wilhelms et al. [1998] geben bei hohen Frequenzen eine Genauigkeit von  $\Delta\varepsilon = 4.5\%$  für die relative Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  und  $\Delta\sigma = 8\text{--}15\%$  für die Leitfähigkeit  $\sigma$  an. Eine verbesserte Apparatur sollte diese Fehler drastisch reduzieren, so daß bei der Dimensionierung Fehler in der Größenordnung von  $1\%$  als Richtschnur genommen werden. Eine Fehlerrechnung unterscheidet verschiedene Fehlerarten, die in der folgenden vorangeschickten Betrachtung kurz eingeführt und in ihren Eigenschaften diskutiert werden, bevor die eigentlichen Detailbetrachtungen zur Apparatur folgen.

### 3.2.1 Fehler und ihre Fortpflanzung bei komplexen Größen

Bei einer Fehlerrechnung unterscheidet man systematische und statistische Fehler. Systematische Fehler sind z.B. die Genauigkeit von Kalibrierungsstandards, Nullpunkte oder das Linearitätsverhalten eines Meßgerätes. Sie reduzieren sich nicht durch mehrmalige Messung, da alle Meßwerte den gleichen Fehler teilen und deswegen im statistischen Sinn nicht voneinander unabhängig sind. Bei statistischen Fehlern kann man den Fehler durch mehrmalige Messung und Mittelung verkleinern, da er aus einem statistischen Rauschen mit zu hohen und zu niedrigen Messwerten entsteht [Barlow, 1989, Abschn. 4.4]. Statistische Fehler reduzieren sich nach dem  $\sqrt{N}$ -Gesetz mit der Anzahl der Messungen  $N$ . Zur Halbierung des Fehlers sind also viermal so viele Messungen nötig [Barlow, 1989, Abschn. 4.2.1].

Es gibt keine Standardmethode systematische Fehler aufzufinden. Oft ist die einzige Möglichkeit der Vermeidung systematischer Fehler ein sorgfältiger Umgang mit allen Fehlerquellen. Aus diesem Grund werden systematische Fehler mitunter überschätzt [Barlow, 1989, Abschn. 4.4.1]. Für die hier verwendeten Meßbrücken der Firma Hewlett Packard ist der nach Spezifikation berechnete Fehler [HPLCR, 1988; HPDTF, 1989] eine Größenordnung größer, als die tatsächlich bei der Vermessung einer theoretisch berechneten Kapazität gefundene Abweichung [Wilhelms, 1996, Abschn. 2.3.4.2]. Apparatur- und theorieinherente Fehler sind ihrer Definition nach systematisch, da sie sich nicht durch Wiederholungsmessungen reduzieren lassen.

Allgemein soll in der folgenden Betrachtung der systematische Fehler einer Größe  $X$ , angelehnt an die Bezeichnungsweise in Barlow [1989, Abschn. 4.4.2], mit  $\Delta^S X$  (*engl. systematic*) und der statistische Fehler mit  $\Delta^R X$  (*engl. random*) bezeichnet werden. Der Gesamtfehler  $(\Delta X)^2 = (\Delta^R X)^2 + (\Delta^S X)^2$  einer Größe  $X$  berechnet sich aus der quadratischen Addition beider Fehler [Barlow, 1989, Abschn. 4.4.2].

Sobald systematische Fehler identifiziert und quantifiziert sind, ist ihre Behandlung vergleichsweise unproblematisch. Da im Gegensatz zu rein statistischen Fehlern Meßgrößen einen gemeinsamen systematischen Fehler teilen können, tritt an die Stelle des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes, das lediglich einen teilweisen

gegenseitigen statistischen Ausgleich von Fehlern berücksichtigt [Westphal, 1966, Abschn. B.11], die im folgenden kurz zusammengefaßte Betrachtung mit Kovarianzmatrizen [Barlow, 1989, Abschn. 4.3.4].

In der Meßstatistik betrachtet man die Erwartungswerte  $\langle X \rangle$  zufallsverteilter Größen  $X$ . Für die Meßauswertung setzt man für den Erwartungswert  $\langle X \rangle$  einer mit einer Stichprobe  $\{x_1, \dots, x_n\}$  abgeschätzten Meßgröße  $X$  den Schätzwert  $\langle X \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  ein. Die Kovarianz  $\mathfrak{C}_{XY}$  zweier Größen  $X$  und  $Y$  definiert man als den Erwartungswert  $\mathfrak{C}_{XY} \equiv \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle$ . Die Abschätzung der Kovarianz  $\mathfrak{C}_{XY}$  aus einer Stichprobe von Tupeln  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  der Größen  $X$  und  $Y$  erhält man aus der empirischen Kovarianz  $\mathfrak{C}_{XY} \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle X \rangle)(y_i - \langle Y \rangle)$  [Storch und Zwiers, 1999; Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 5.2.2.2], wobei  $\langle X \rangle$  und  $\langle Y \rangle$  in dieser Formel die Schätzwerte bezeichnen. Die bereits eingeführten Fehler oder auch Standardabweichungen  $\Delta X = \sqrt{\mathfrak{C}_{XX}}$  der Größe  $X$  sind die Quadratwurzeln der Varianz  $\mathfrak{C}_{XX}$ . Mit diesen Größen definiert man den sogenannten dimensionslosen Korrelationskoeffizienten  $\mathfrak{R}(X, Y) \equiv \frac{\mathfrak{C}_{XY}}{\Delta X \Delta Y}$  der Größen  $X$  und  $Y$ .

Betrachtet man nun eine vektorwertige Funktion  $(f_1, \dots, f_m)$  eines Eingangsvektors  $(x_1, \dots, x_n)$ , d.h. von Einträgen  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) abhängige Komponenten  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), so lassen sich die Kovarianzen der Komponenten der Bildfunktion  $\mathfrak{C}_{f_i f_j}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) aus den Kovarianzen der Komponenten der Eingangsvariablen  $\mathfrak{C}_{x_k x_l}$  ( $l, k = 1, \dots, n$ ) bestimmen. Einen übersichtlichen Formalismus erhält man durch Anordnung der eben definierten Kovarianzen als Elemente einer symmetrischen  $n \times n$ -Matrix, der sogenannten Kovarianzmatrix:

$$\mathfrak{V}_{(x_1, \dots, x_n)} \equiv (\mathfrak{C}_{x_l x_k})_{\substack{l=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n}} \equiv \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{x_1 x_1} & \dots & \mathfrak{C}_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{C}_{x_n x_1} & \dots & \mathfrak{C}_{x_n x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Die Symmetrie, also die Invarianz  $\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{M}}$  unter Transposition [Fischer, 1989, Def. 2.4.2 & 6.1.7], ergibt sich aus der Symmetrie der Kovarianz  $\mathfrak{C}_{XY} = \mathfrak{C}_{YX}$ . Die Kovarianz der Komponenten der Bildfunktion bestimmt Barlow [1989, Abschn. 4.3.4] durch Auswertung der Kovarianz auf den Taylorentwicklungen der Komponenten und erhält  $\mathfrak{C}_{f_i f_j} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \mathfrak{C}_{x_l x_k}$ . Verwendet man die Jacobimatrizen

$$\mathcal{J}_{(f_1, \dots, f_m)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ l=1, \dots, n}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

zur abkürzenden und geschlossenen Schreibweise, so erhält man für die Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(f_1, \dots, f_m)}$  der Komponenten der vektorwertigen Funktion:

$$\mathfrak{V}_{(f_1, \dots, f_m)} = \mathcal{J} \circ \mathfrak{V}_{(x_1, \dots, x_n)} \circ \widetilde{\mathcal{J}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}_{(f_1, \dots, f_m)}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.15)$$

Die nichtverschwindende Kovarianz bei Betrachtung einer komplexen Funktion zeigt, daß Real- und Imaginärteil im allgemeinen nicht unabhängig sind. Zur Durchführung der Fehlerrechnung bei der Bestimmung der Eiskerneigenschaften  $\varepsilon_i^\times$  aus den Meßgrößen  $\varepsilon_m^*$  war mit Gleichung (3.12) in Abschnitt 3.1.4 bereits eine Rechenvorschrift für die benötigten Ableitungen  $\partial\varepsilon_i^\times/\partial w$  der Eiskerneigenschaften  $\varepsilon_i^\times$  nach den Apparaturparametern  $w \in \{\varepsilon_a, \xi, v\}$  sind voneinander unabhängig, d.h. die Fehlerabhängigkeit der dielektrischen Eiskerneigenschaften  $\varepsilon_i^\times$  kann für jede Größe einzeln betrachtet und anschließend die Kovarianzmatrizen aufsummiert werden. Allgemein berechnet die Fehlerfortpflanzung der Kovarianzmatrix eines komplexwertigen Parameters  $w = \text{Re}(w) + i \text{Im}(w)$ , mit der in Abschnitt 3.1.3.1 angegebenen Darstellung einer komplexen Ableitung  $\partial\varepsilon_i^\times/\partial w$  als Jacobimatrix (3.7) den Fehlerbeitrag zum Fehler der komplexwertigen Eiskerndielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^\times = \text{Re}(\varepsilon_i^\times) + i \text{Im}(\varepsilon_i^\times) = \varepsilon_i^{\times'} - i \varepsilon_i^{\times''}$  zu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{(\varepsilon_i^{\times'}, -\varepsilon_i^{\times''})} &= \mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^\times), \text{Im}(\varepsilon_i^\times))} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \\ \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) & -\text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \\ \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) & \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Re}(w)} & \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Im}(w)} \\ \mathfrak{C}_{\text{Im}(w)\text{Re}(w)} & \mathfrak{C}_{\text{Im}(w)\text{Im}(w)} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) & \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \\ -\text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) & \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nach Auswertung des Matrizenproduktes liest man die Relationen für die Fehler ab<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} (\Delta\varepsilon_i^{\times'})^2 &= \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} = -2 \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Im}(w)} + \\ &+ \left( \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Re}(w)} + \left( \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 \mathfrak{C}_{\text{Im}(w)\text{Im}(w)}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\varepsilon_i^{\times''})^2 &= \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} = 2 \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Im}(w)} + \\ &+ \left( \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 \mathfrak{C}_{\text{Im}(w)\text{Im}(w)} + \left( \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Re}(w)} \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} -\mathfrak{C}_{\varepsilon_i^{\times'}\varepsilon_i^{\times''}} &= \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} = \left( \left( \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 - \left( \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \right)^2 \right) \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Im}(w)} + \\ &+ \text{Re}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) \text{Im}(\frac{\partial\varepsilon_i^\times}{\partial w}) (\mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Re}(w)} - \mathfrak{C}_{\text{Im}(w)\text{Im}(w)}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für die rein reellen Parameter  $w \in \mathbb{R}$  mit einem Fehler  $(\Delta w)^2 = \mathfrak{C}_{\text{Re}(w)\text{Re}(w)}$ , wie z.B. der Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi$  und das Radienverhältnis  $v$ , reduzieren sich die Fehlerbeiträge zum Real- bzw. Imaginärteil von  $\varepsilon_i^\times$  auf die bereits mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berücksichtigten Beiträge

<sup>5</sup>Das negative Vorzeichen der Kovarianz für die Darstellung mit dem Negativen des Imaginärteils  $\varepsilon_i^{\times''}$  ergibt sich aus der Fortpflanzung der Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^\times), \text{Im}(\varepsilon_i^\times))}$  mit der Jacobimatrix der komplexen Konjugationsabbildung  $\mathcal{J}_{(\varepsilon_i^{\times'}, \varepsilon_i^{\times''})}(\text{Re}(\varepsilon_i^\times), \text{Im}(\varepsilon_i^\times)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\mathfrak{V}_{(\varepsilon_i^{\times'}, \varepsilon_i^{\times''})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \\ \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & -\mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \\ -\mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Re}(\varepsilon_i^\times)} & \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_i^\times)\text{Im}(\varepsilon_i^\times)} \end{pmatrix}$ .

$(\Delta\varepsilon_i^{\times'})^2 = (\operatorname{Re}(\partial\varepsilon_i^{\times}/\partial w))^2 (\Delta w)^2$  bzw.  $(\Delta\varepsilon_i^{\times''})^2 = (\operatorname{Im}(\partial\varepsilon_i^{\times}/\partial w))^2 (\Delta w)^2$ , da die Kovarianz  $\mathfrak{C}_{\operatorname{Re}(w)\operatorname{Im}(w)} = 0$  und der Fehler des Imaginärteils  $(\Delta\operatorname{Im}(w))^2 = \mathfrak{C}_{\operatorname{Im}(w)\operatorname{Im}(w)} = 0$  verschwinden. Die nichtverschwindende Kovarianz  $\mathfrak{C}_{\varepsilon_i^{\times'}\varepsilon_i^{\times''}} = -\operatorname{Re}(\partial\varepsilon_i^{\times}/\partial w) \operatorname{Im}(\partial\varepsilon_i^{\times}/\partial w) (\Delta w)^2$  des Real- und Imaginärteils von  $\varepsilon_i^{\times}$  beruht auf dem von beiden Komponenten geteilten Fehler  $\Delta w$  des Parameters  $w$ .

Die vorangegangene Betrachtung illustriert die Notwendigkeit einer umfassenden, die Abhängigkeiten zwischen den Komponenten der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{\times}$  berücksichtigenden Fehlerbetrachtung, da Real- und Imaginärteil von gemeinsamen Fehlern abhängen. Die Komponenten einer komplexen Größe sind im statistischen Sinn also nicht voneinander unabhängig. Allgemein reduziert oder vergrößert die Berücksichtigung der Kovarianz den Fehler teilweise drastisch, je nachdem welche Relationen aus den Größen gebildet werden.

Bei der Eiskernmeßapparatur ist die Isolierschicht mit Luft gefüllt, so daß auch die Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht  $\varepsilon_a$  reell ist. Die Fehlerabhängigkeiten sind entsprechend der vorangegangenen Betrachtung implementiert, so daß auch andere Isolierschichtmaterialien behandelt werden. Relevant werden die Betrachtungen bei der in Abschnitt 3.2.7 diskutierten Eichung der Apparatur und Bestimmung der Eiskernparameter  $\varepsilon_i^{\times}$  aus den Meßgrößen  $\varepsilon_m^*$ . Die Funktionen für die Fehlerfortpflanzung komplexwertiger Funktionen sind im Quellcode `cerror.c` (Anhang B) implementiert. Die Fortpflanzung erfolgt mit einer Implementation von Gleichung (3.15). Diese greift auf eine Funktion zur Überführung der komplexwertigen Funktionsableitung in die gleichwertige Jacobimatrixdarstellung nach Gleichung (3.7) zurück. Funktionen zur Ausführung algebraischer Operationen mit den  $2 \times 2$ -Matrizen findet man ebenfalls in `cerror.c`.

### 3.2.2 Elektrodenhalbschalen

Die Länge und die Randspalte der Schutzelektrode wurden bereits in Abschnitt 2.1.5 diskutiert. Bei der Dimensionierung der hier beschriebenen Apparatur waren die theoretischen Betrachtungen noch nicht vorgenommen, so daß konservativ die Länge von 700 mm gewählt wurde. Diese Länge war die bei der Verwendung von Standardpackkisten maximal mögliche. Die Spaltbreite von weniger als 5 mm, d.h. einen Schutzelektrodenbegrenzungswinkel von  $\psi \leq 0.05$  rad bei einem Elektrodenradius von  $a = 50$  mm wird durch die Maximalbreite eines Kreissägeschnitts beim Zertrennen der Rohre bestimmt.

Der Unterschied zu früheren Apparaturen ist hier die Verwendung eines in einem festen Rahmen montierten Elektrodenpaars. Wilhelms et al. [1998] verwendeten eine direkte Verkabelung und bewegten die Meß- bzw. Schutzelektrode auf Schienen entlang der Gegenelektrode, in der der Kern ruhte. Dadurch wurden unbekannte Streukapazitäten im Vergleich zu früheren Apparaturen [Moore und Maeno, 1991; Wolff et al., 1995] verkleinert. Diese früheren Apparaturen verwendeten Relais zum Beschalten der aus einzelnen Segmenten aufgebauten Elektrode. Die Streukapazitäten durch Kabeldeformation beim Bewegen der Elektrode verblieben auch bei der von Wilhelms et al. [1998] beschriebenen Apparatur. Die fest montierten Elektroden gemeinsam mit der Verwendung der Originalanschlußkabel HP 16048E (4 m lang)

bzw. HP16048D (2 m lang) [Honda, 1989] zu den Meßbrücken HP4284A [HPLCR, 1994] bzw. HP4285A [HPLCR, 1996] minimieren die Streukapazitäten durch Kabeldeformation während der Messung. Fest montierte Elektroden erlauben außerdem die in Abschnitt 3.2.7 beschriebene Eichung. Anstatt der Elektrode muß bei diesem Apparaturaufbau der Eiskern bewegt werden. Die Bewegung des Eiskerns löst man technisch durch die Aufhängung in einer dünnen Plastikfolie, deren Einfluß aber bei der hier gewählten Apparatur, wie in Abschnitt 3.2.6 diskutiert, vernachlässigbar ist. Die Theorie erfordert eine exakte Positionierung des Eiskerns in der Mitte der Apparatur. Die Fehler in der Positionierung können als Radienfehler abschätzend behandelt werden. Bei hochfrequenten Messungen ist der Radienfehler des Eiskerns nicht führend, da die Dielektrizitätskonstante von Eis und Luft sich nur um Bruchteile einer Größenordnung unterscheiden. Deshalb kann bei hochfrequenten Messungen der Fehler des Eiskernradius großzügig geschätzt werden. Bei niederfrequenten Messungen wird der Radienfehler führend und eine hochgenaue Positionierung des Eiskerns im Meßkondensator wird erforderlich, um die verbleibenden Luftspalte mit der um Größenordnungen kleineren Dielektrizitätskonstanten von Luft im Vergleich zu Eis für die Korrektur mit der Theorie möglichst genau zu definieren.

Für die Apparatur mit oben genannten Abmessungen und einem im unmittelbar folgenden Abschnitt diskutierten Meßelektrodenwinkel von  $\phi_0 = 108^\circ$ , also einem Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi = \frac{\pi}{5}$ , berechnet man mit dem in Abschnitt 2.1.4 vorgestellten Programm `aircap.c` (Anhang B) für eine Meßelektrodenlänge  $l = 10$  mm eine Leerkapazität  $C_0 = 63.45$  fF  $\pm 1.5$  ‰ und für eine Meßelektrodenlänge von  $l = 100$  mm eine Leerkapazität von  $634.5$  fF  $\pm 1.5$  ‰. Beide Berechnungen wurden mit einer dem Programm vorgegebenen numerischen Fehlerschranke von weniger als 1 ‰ und über 11 Perioden der Summe durchgeführt, so daß die im Programm implementierten numerischen Fehlerabschätzungen das Ergebnis als verlässlich klassifizieren. Die angegebene relative Fehlerschranke ist als Abweichung des angegebenen Wertes von der theoretischen Leerkapazität eines unendlich ausgedehnten Kondensators ohne Randspalte mit einer Leerkapazität pro Meßelektrodenlänge von  $\frac{C_0^\infty}{l} = 6.337 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$  berechnet.

Fehler aus der Vernachlässigung der Randspalte und der endlichen Ausdehnung des Meßkondensators sind mit den berechneten  $\Delta^S C_0^\infty / C_0^\infty = 1.5$  ‰ Abweichung fast eine Größenordnung kleiner als die als Richtschnur vorgegebene Fehlerschranke von 1 ‰. Der Fehler der Leerkapazität wird bei der in Abschnitt 3.2.7 diskutierten Eichung bei der Berechnung des Eichstandards berücksichtigt, geht also auch direkt in die Fehlerrechnung ein.

### 3.2.3 Meßelektrodenwinkel und Oberflächenströme

Der Meßelektrodenwinkel  $\phi_0 = 108^\circ$  war bereits bei den ersten ungeschützten DEP-Apparaturen [Moore und Paren, 1987; Moore et al., 1989] gewählt worden. Er wurde bei der weiterentwickelten geschützten Apparatur [Wilhelms et al., 1998] beibehalten. Zur Erzielung einer möglichst großen Leerkapazität  $C_0^\infty$  ist der Meßelektrodenwinkel groß zu dimensionieren. Konkurrierend dazu ist die Vermeidung von Oberflächenströmen, die einen möglichst senkrechten Felddurchtritt verlangt. Der in den

berechneten Beispielpotentialverteilungen in Abschnitt 2.3.5 gezeigte Feldlinienverlauf illustriert die bevorzugte Wahl eines kleinen Meßelektrodenwinkels zur Gewährleistung eines möglichst senkrechten Felddurchtritts durch die Eiskernoberfläche.

Das Phänomen von Oberflächenströmen wurde in der Literatur ausführlich diskutiert, da frühe Messungen besonders im niederfrequenten Bereich bei Temperaturen um  $-10\text{ °C}$  durch Oberflächenströme dominiert waren [Bullemer und Riehl, 1966; Bullemer et al., 1969; Camp et al., 1969; Jaccard, 1966; Maeno, 1973; Maeno und Nishimura, 1978]. Petrenko [1993] hält fest, daß Schutzelektroden eine geeignete Maßnahme zur Verhinderung des Eintretens von Oberflächenströmen in den Meßkreis sind. Wilhelms [1996, Abschn. 2.2.2] erweitert das Prinzip im allgemeinen Fall auf einen möglichst senkrechten Durchtritt des Feldes durch die Probenoberfläche, da Ladungsträger nur entlang von Feldlinien bewegt werden können. Bei senkrechtem Felddurchtritt durch die Oberfläche können wegen des Fehlens oberflächenparalleler Feldstärkekomponenten keine Oberflächenströme auftreten. In diesem Abschnitt diskutierte Oberflächenströme bezeichnen Ströme an der Eiskernoberfläche. Bei Behandlung von Einkristallen ist die Kristalloberfläche gleichzeitig die Probenoberfläche und die Bezeichnung Oberflächenstrom ist eindeutig. Die in einem polykristallinen Medium an der Oberfläche von Kristallen evtl. fließenden Ströme werden an dieser Stelle nicht betrachtet, vielmehr wird der Eiskern für die Messung als homogenes isotropes Medium betrachtet.

Mit einem für einen speziellen Meßaufbau aus Abbildung 6 in Camp et al. [1969] abgeschätzten Verhältnis von 0.2 zwischen Oberflächen- und Volumenleitwert wurde von Wilhelms et al. [1998] gemeinsam mit einem Verhältnis von Tangential- zu Radialkomponente des elektrischen Feldes von weniger als 0.03 der Einfluß von Oberflächenströmen zu weniger als 1 % diskutiert. Diese Diskussion wurde mit einer einfachen, keinen Luftspalt zwischen Eiskern und Elektrode berücksichtigenden, Theorie geführt [Wilhelms, 1996, Abschn. 2.3.3]. Mit der in Abschnitt 2.3 eingeführten Theorie einer Messung mit Isolierschicht stehen die Potentialverteilung und damit die Feldstärken im gesamten Elektrodeninnenraum zur Verfügung. Aus der von Petrenko [1994, Abb. 13] reproduzierten Abbildung einer Arbeit von Caranti und Illingworth [1983] können die Zahlenwerte von elektrischer Oberflächen- ( $\sigma_S$ ) und Volumenleitfähigkeit ( $\sigma_B$ ) für hohe ( $> 10\text{ kHz}$ ) Frequenzen entnommen und ihr Verhältnis zu  $\sigma_S/\sigma_B \approx 1.4 \times 10^{-7}\text{ S}/1.9 \times 10^{-5}\text{ S m}^{-1} \lesssim 8 \times 10^{-3}\text{ m}$  abgeschätzt werden. Für niedrige Frequenzen unter  $100\text{ Hz}$  ergibt sich  $\sigma_S/\sigma_B \approx 1 \times 10^{-8}\text{ S}/3.2 \times 10^{-8}\text{ S m}^{-1} \lesssim 0.32\text{ m}$ . Die eben angegebenen Zahlenwerte gelten für  $-10\text{ °C}$  und stellen eine obere Abschätzung für die mit der Temperatur wachsende Oberflächenleitfähigkeit dar, denn weder die Messung noch die Lagerung von polarem Eis sollte oberhalb von  $-10\text{ °C}$  erfolgen, da die dielektrischen Eigenschaften irreversibel verändert werden [Reynolds, 1985].

Das Verhältnis von Oberflächen- zu Volumenleitfähigkeit  $\frac{\sigma_S}{\sigma_B}$  ist Ausgangspunkt für die Abschätzung des Verhältnisses von der Messung störendem Oberflächenstrom  $I_S$  bezogen auf die Meßgröße Volumenstrom  $I_B$ . Die Ströme im Eiskern werden über die Elektroden des Kondensators influenziert und entsprechen deshalb dem Strom im Meßkreis der Brücke. Der senkrecht durch die Eiskernoberfläche hindurchtretende Strom ist der Volumenstrom  $I_B$ . Der Oberflächenstrom  $I_S$  ist der mittlere parallel zur Eiskernoberfläche fließende Strom. Den auf der Oberfläche zu betrachtenden Bereich definiert man als den über Feldlinien korrespondierenden Bereich, wie er in

Abschnitt 2.2.6 für die Potentialmittelung im Plattenkondensatormodell betrachtet wurde. Bei der Anwendung des Modells für zwei Schichten in Abschnitt 2.3.6.1 wurde ein über Feldlinien zum Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi$  korrespondierender Winkel auf der Eiskernoberfläche  $\xi_b$  (beim Radius  $b$ ) eingeführt und die Routinen in `sup2lay.c` (Anhang B) und `theo2lay.c` (Anhang B) zur Berechnung bereitgestellt.

Wegen der Spiegelsymmetrie der Anordnung an der  $y$ -Achse, d.h. um einen Winkel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ist es ausreichend, die Betrachtungen im Intervall  $[\xi_b, \frac{\pi}{2}]$  durchzuführen. Den Strom senkrecht in den Eiskern  $I_B$  berechnet man als Oberflächenintegral über die Stromdichte  $\vec{j} = \sigma_B E_\rho \vec{e}_\rho$ . Führt man die Integration in  $z$ -Achsenrichtung über die Meßelektrodenlänge  $l$  aus und verwendet die Definition der Flußfunktion nach Gleichung (2.44), so ergibt sich:

$$I_B = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_b} \sigma_B E_\rho(\varphi') l b d\varphi' = \sigma_B \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_b} \left. \frac{\partial}{\partial \rho'} \Phi(\rho', \varphi') \right|_{\rho'=b} l b d\varphi' = \sigma_B \frac{\Psi(b, \xi_b)}{\varepsilon_i \varepsilon_0}. \quad (3.20)$$

Die Flußfunktion ist wegen der Stetigkeit der elektrischen Flußdichte  $\vec{D}$  in ihrer Definition stetig in der Grenzfläche, d.h. die berechnete Stromdichte hängt nicht von ihrer Auswertung im Eiskern- oder Isolierschichtbereich ab, weshalb die Indizierung nach dem Bereich  $\Psi^{i/a}$  weggelassen wird.

Die Definition der Oberflächenstromdichte nimmt eine unendlich dünne Oberfläche an, d.h. die Einheit der Oberflächenstromdichte ist  $[j] = \frac{A}{m}$ . Der Strom  $I_S$  berechnet sich hier als Integral entlang der seitlichen Berandungsfläche der Meßelektrode, d.h. wegen der nicht in Richtung der Zylinderachse variierenden Feldstärke berechnet sich der Strom  $I_S$  als Produkt der integral gemittelten Feldstärke  $\overline{E}_\varphi$  und der Meßelektrodenlänge  $l$ . Den integralen Mittelwert definiert man analog zum integralen Mittelwert der Potentialverteilung im  $i$ -ten Bereich  $\overline{\Phi}^i$  in Gleichung (2.57). Die tangentielle Feldstärkekomponente berechnet man als Gradient der Potentialfunktion, analog zu den Stetigkeitsforderungen bei der Ableitung der Potentialfunktion nach Gleichung (2.31). Dies zeigt insbesondere, daß die Feldstärke stetig ist und die Indizierung nach Bereichen  $E_\varphi^{i/a}$  weggelassen werden kann:

$$I_S = \sigma_S l \overline{E}_\varphi = \frac{\sigma_S l}{\frac{\pi}{2} - \xi_b} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\xi_b} \frac{1}{b} \left. \frac{\partial}{\partial \varphi'} \Phi(b, \varphi') \right|_{\varphi'=\varphi} d\varphi = \sigma_S l \frac{\Phi(b, \xi_b) - \Phi(b, \frac{\pi}{2})}{b(\frac{\pi}{2} - \xi_b)}. \quad (3.21)$$

Bei der Auswertung des Integrals wurde benutzt, daß das Integral über die partiell differenzierte Funktion wieder die Funktion an den Integrationsgrenzen liefert. Die Auswertung als Stammfunktion vereinfacht einerseits die Berechnung, da sie in `theo2lay.c` (Anhang B) implementiert wurde, liefert andererseits die physikalische Interpretation. Die gemittelte Feldstärke  $\overline{E}_\varphi$  ist die Spannungsdifferenz  $\Phi(b, \xi_b) - \Phi(b, \frac{\pi}{2})$  pro Weg  $b(\frac{\pi}{2} - \xi_b)$  in der Grenzfläche mit Radius  $b$ . Der Strom  $I_S$  ist die über den Rand der Länge  $l$  integrierte Stromdichte  $\sigma_S \overline{E}_\varphi$ . Mit angegebener Oberflächen- ( $\sigma_S$ ) und Volumenleitfähigkeit ( $\sigma_B$ ) berechnet das in Anhang B angegebene Programm `cont2gmt.c` das Verhältnis  $\frac{I_S}{I_B}$  von Oberflächen- ( $I_S$ ) zu Volumenstrom ( $I_B$ ). Auch die reine Berechnung des Feldstärkenanteils  $(\varepsilon_i \varepsilon_0 l (\Phi(b, \xi_b) - \Phi(b, \frac{\pi}{2}))) / (\Psi(b, \xi_b) b (\frac{\pi}{2} - \xi_b))$  ist als Option des Programms

`cont2gmt.c` implementiert. Das gesuchte Verhältnis wird dann in der inversen Längeneinheit der eingesetzten Radien ausgegeben.

Caranti und Illingworth [1983] finden Oberflächenströme mit hauptsächlich reellem Beitrag und kleinen Phasenwinkeln. Da die Ströme proportional den Leitfähigkeiten und diese wiederum proportional dem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten sind, ist der Betrag des Verhältnisses der Ströme eine Abschätzung für den relativen Fehler des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten  $\Delta^S \varepsilon_i^{x''}/\varepsilon_i^{x''} = |I_S|/|I_B|$ . Zur Abschätzung des durch Beitrag von Oberflächenströmen verursachten Fehlers des Realteils der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{x'}$  beobachteten Caranti und Illingworth [1983, Abb. 3], daß Real- und Imaginärteil der den Oberflächenströmen zugeordneten Dielektrizitätskonstanten bei  $-10^\circ\text{C}$  in guter Näherung gleichzusetzen sind. Absolut läßt sich keine Dielektrizitätskonstante angeben, da in die Berechnung die nicht bekannte Dicke der Oberflächenschicht eingehen würde. Nach der eben referierten Beobachtung gilt die Abschätzung für den Realteil bezogen auf den Imaginärteil, so daß für den Fehler  $\Delta^S \varepsilon_i^{x'} = \Delta^S \varepsilon_i^{x''} = |I_S|/|I_B| \varepsilon_i^{x''}$  gilt. Die Berechnung dieser Fehlerabschätzung kann in Abhängigkeit von den anzugebenden Oberflächen- ( $\sigma_S$ ) und Volumenleitfähigkeiten ( $\sigma_B$ ) mit `cont2gmt.c` vorgenommen werden. Sie ist die im Programm zur Inversion von Messungen `depmeas.c` implementierte Fehlerabschätzung von Oberflächenströmen.

Eine Abschätzung der Fehlergrößenordnung für die in dieser Arbeit diskutierte Apparatur mit einem Elektrodenradius von  $a = 0.05$  m für Eiskerne mit einem Nennradius von  $b = 0.049$  m und einem Meßelektrodenwinkel  $\phi_0 = 108^\circ$  erhält man durch exemplarisches Einsetzen für bestimmte Meßsituationen typischer Werte. Für den zwischen Elektrode und Eiskern verbleibenden Luftspalt setzt man jeweils die Dielektrizitätskonstante von Luft  $\varepsilon_a = 1$  ein. Aus den Abbildungen für reines künstlich hergestelltes Eis liest man Werte [Petrenko, 1993, Abb. 2 & 5] für eine Meßfrequenz von  $f = 250$  kHz von  $\varepsilon_i' = 3.2$  und  $\varepsilon_i'' = (1.8 \times 10^{-5})/(2\pi \cdot 2.5 \times 10^5 \cdot 8.8542 \times 10^{-12}) = 1.29$  bei einer Temperatur von  $-10^\circ\text{C}$  ab.

Mit dem oben abgelesenen Verhältnis der Leitfähigkeiten  $\sigma_S/\sigma_B$  ergibt sich für das Verhältnis der Strombeträge  $|I_S|/|I_B| \approx \sigma_S/\sigma_B \cdot 0.92 \frac{1}{\text{m}} \approx (1.4 \times 10^{-7} \text{ S})/(1.9 \times 10^{-5} \text{ S m}^{-1}) \cdot 0.92 \frac{1}{\text{m}} \lesssim 6.78 \times 10^{-3}$  bei hohen Frequenzen. Damit bleibt der Einfluß von Oberflächenströmen sowohl auf die Leitfähigkeitsmessung mit  $\Delta^S \varepsilon_i^{x''}/\varepsilon_i^{x''} \approx 5\%$ , als auch auf die Messung der Dielektrizitätskonstanten  $\Delta^S \varepsilon_i^{x'}/\varepsilon_i^{x'} \approx 3\%$  deutlich unter der angestrebten Schranke von  $1\%$ .

Für niedrige Frequenzen unter  $100$  Hz liest man an gleicher Stelle [Petrenko, 1993, Abb. 2 & 5]  $\varepsilon_i' \approx 100$  und  $\varepsilon_i'' = (2.5 \times 10^{-8})/(2\pi \cdot 100 \times 8.8542 \times 10^{-12}) = 4.5$  ab. Damit berechnet man hier für das Verhältnis von Oberflächen- zu Volumenstrom  $\Delta^S \varepsilon_i^{x''}/\varepsilon_i^{x''} = |I_S|/|I_B| \approx \sigma_S/\sigma_B \cdot 5.9 \frac{1}{\text{m}} \approx (1 \times 10^{-8} \text{ S})/(3.2 \times 10^{-8} \text{ S m}^{-1}) \cdot 5.9 \frac{1}{\text{m}} \lesssim 1.9$ . D.h. bei niedrigen Frequenzen ist keine sinnvolle Leitfähigkeitsmessung möglich. Eine Leitfähigkeitsmessung ist aber bei niedrigen Frequenzen sowieso fragwürdig, da das Verhältnis von Imaginär- zu Realteil  $\frac{\varepsilon_i^{x''}}{\varepsilon_i^{x'}} = 4.5 \times 10^{-2}$  sehr klein ist. Schätzt man hingegen den maximalen Einfluß durch Oberflächenströme auf die Messung des Realteils  $\Delta^S \varepsilon_i^{x'}/\varepsilon_i^{x'} = \varepsilon_i^{x''}/\varepsilon_i^{x'} |I_S|/|I_B| \lesssim 8.4\%$  ab, so ist dies für niederfrequente Messungen der Dielektrizitätskonstanten ein akzeptabler Fehler.

Betrachtet man hochfrequente Messungen bei einer Frequenz von  $f = 250$  kHz im

Bereich hoher Leitfähigkeiten von  $\sigma_B \approx 89 \frac{\mu\text{S}}{\text{m}}$  entsprechend einem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{\times''} = 6.4$  bei gleichzeitigem Realteil von  $\varepsilon_i^{\times'} = 3.63$ , so findet man ein Verhältnis von Oberflächen- zu Volumenstrom und damit den relativen Fehler des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten von  $\frac{\Delta^S \varepsilon_i^{\times''}}{\varepsilon_i^{\times''}} = \frac{|I_S|}{|I_B|} \approx \frac{\sigma_S}{\sigma_B} 2.03 \frac{1}{\text{m}} \approx (1.4 \times 10^{-7} \text{ S}) / (1.9 \times 10^{-5} \text{ S m}^{-1}) 2.03 \frac{1}{\text{m}} \lesssim 1.5 \%$ . Einen maximalen Einfluß der Oberflächenströme auf die Messung der Dielektrizitätskonstanten schätzt man damit zu  $\frac{\Delta^S \varepsilon_i^{\times'}}{\varepsilon_i^{\times'}} = \varepsilon_i^{\times''} / \varepsilon_i^{\times'} |I_S| / |I_B| \approx 2.6 \%$ . Dies ist nur eine grobe obere Abschätzung, die auf den im weiteren erläuterten Annahmen beruht. Die oben gewählte Leitfähigkeit ist die maximale aus den von der Nordgrönlandtraverse [Friedmann et al., 1995] verfügbaren Daten. Sie sind dem Datensatz von B26 [Wilhelms, 1996] im Bereich des Lakagigarhorizonts [Hammer, 1977; Hammer, 1980; Hammer et al., 1980; Clausen und Hammer, 1988; Newhall und Self, 1982] entnommen. Caranti und Illingworth [1983, Fig. 7] finden für eine Kochsalzdotierung  $[\text{NaCl}] = 100 \frac{\mu\text{mol}}{\text{l}}$  keine wesentliche Erhöhung der Oberflächenleitfähigkeit gegenüber undotiertem Eis. Wegen der geringsten Akkumulationsrate sollte B21 die höchste Sulfatkonzentration unter den Nordgrönlandtraversenkernen haben. Damit schätzt die von Fischer [1997] für B21 angegebene Sulfatkonzentration von  $[\text{SO}_4^{2-}] \approx 500 \text{ ppb}$  die Wasserstoffionenkonzentration von B26, für den im Bereich des Vulkanhorizonts keine direkten Daten vorliegen, zu  $[\text{H}^+] = 12 \frac{\mu\text{mol}}{\text{l}}$  ab. Da keine Abschätzungen für Schwefelsäure ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) vorliegen, greift man auf die eben referierten Ergebnisse für eine um eine Größenordnung höhere Kochsalzkonzentration ( $\text{NaCl}$ ) zurück und nimmt an, daß diese für die Betrachtung qualitativ gültig bleiben könnte. Die Volumenleitfähigkeit  $\sigma_B$  wird sich mit zunehmender Konzentration höchstens erhöhen, so daß die im Oberflächen- zu Volumenleitfähigkeitsverhältnis eingesetzte Volumenleitfähigkeit ebenfalls eine Abschätzung ist. Caranti und Illingworth [1983] finden in hochdotiertem Eis bei hohen Frequenzen nur eine um 20 % erhöhte Oberflächenleitfähigkeit, d.h. realistische Fehler durch Oberflächenströme für die oben angegebenen Werte sind eher  $\frac{\Delta^S \varepsilon_i^{\times''}}{\varepsilon_i^{\times''}} = \frac{|I_S|}{|I_B|} \approx \frac{(1+0.2) \times 1.4 \times 10^{-7} \text{ S}}{8.9 \times 10^{-5} \text{ S m}^{-1}} 2.03 \frac{1}{\text{m}} \lesssim 4 \%$  bzw.  $\frac{\Delta^S \varepsilon_i^{\times'}}{\varepsilon_i^{\times'}} = \frac{\varepsilon_i^{\times''}}{\varepsilon_i^{\times'}} \frac{|I_S|}{|I_B|} \approx 6.7 \%$ .

### 3.2.4 Elektrodendurchmesser

Der Elektrodennendurchmesser von  $2a = 100 \text{ mm}$  wurde in der vorangegangenen Diskussion bereits mehrfach gemeinsam mit dem Eiskernendurchmesser von  $2b = 98 \text{ mm}$  betrachtet. Die strikt durchzuhaltende Minimierung von Luftspalten wird im folgenden kurz diskutiert und mit Zahlenwerten unterlegt. Luftspalte lassen sich aus technischen Gründen nicht vermeiden und deshalb ist auf Luftspalte zu korrigieren bzw. sind sie als Fehlerquelle zu berücksichtigen.

Zur Unterstützung bei der Dimensionierung einer Apparatur wurde ein Skript `epsdev` in Anhang B bereitgestellt, das das Programm `epsgrid.c` (Anhang B) aufruft und die effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^*$  mit ihren Ableitungen bei vorgegebenem Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi$  und den Eigenschaften des Kerns und der Isolierschicht  $\varepsilon_{i/a}$  grafisch gegen das Radienverhältnis  $v$  darstellt. Die Ableitungen der aus der Umkehrung bestimmten Eigenschaften der inneren Schicht  $\varepsilon_i^{\times}$  werden ebenfalls vom Skript berechnet und dargestellt.

Der verbleibende Luftspalt von 1 mm um den Kern ist bereits möglichst klein gewählt, denn besonders bei Messungen im niederfrequenten Bereich mit hohen Di-

elektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i$  ist die effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon^*$ , wie in Abbildung 3.1 für die hier gewählten geometrischen Abmessungen aufgetragen, teilweise um Größenordnungen niedriger als die Dielektrizitätskonstante des Kerns. Für den konkreten Fall transparenter wird dieser Sachverhalt mit der in Abbildung 3.3c & 3.3d von `epsdev` erzeugten Ausgabe. Für die gezeigte Kurve ist der gemessene Realteil  $\text{Re}(\varepsilon_m^*)$  bei einem Radienverhältnis von  $v = 0.98$  im Vergleich zum Sollwert  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  auf 58 % verkleinert. Diese starke Abhängigkeit von Isolierschicht- zu Proben dicke für hohe Dielektrizitätskonstanten wurde bereits von Auty und Cole [1952] für Parallelplattenkondensatoranordnungen diskutiert.

Für hochfrequente Messungen hingegen ist die Korrektur nach der Theorie für zwei Schichten für Radienverhältnisse  $v = 0.98$  nur im Bereich von 4 ‰ für den Realteil, während sie für die an NGRIP [Dahl-Jensen et al., 1997] eingesetzte Apparatur mit einem Elektrodenradius von  $a = 55$  mm für einen Eiskern mit einem Sollradius von  $b = 49$  mm, also  $v \approx 0.89$  schon eine Verkleinerung der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\text{Re}(\varepsilon_m^*)$  um 10.4 % vom Sollwert  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  bewirkt. Drastischer ist das Bild für die relative Abweichung des Imaginärteils, der direkt als relative Abweichung der Leitfähigkeit des Eiskerns  $\sigma_i$  von der gemessenen effektiven Leitfähigkeit gesehen werden kann. Für die an NGRIP eingesetzte Apparatur ergibt sich sogar eine Verkleinerung des gemessenen Imaginärteils  $\text{Im}(\varepsilon_m^*)$  um 32 % vom Sollwert  $\text{Im}(\varepsilon_i^x)$ . Dies unterstreicht die Notwendigkeit einer Korrektur der Radien bei der angestrebten Meßgenauigkeit im Prozentbereich.

Besonders bei niedrigen Frequenzen erreicht die Brücke ihre Meßgrenze zu hohen Impedanzen  $Z$ , da der Betrag der Impedanz  $Z$  antiproportional der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Kapazität  $C$  ist, sollte die gemessene effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^*$  zur Vergrößerung der Kapazität  $C = \varepsilon_m^* C_0$  besonders bei niedrigen Frequenzen möglichst groß sein. Der verbleibende Luftspalt muß dann minimiert werden.

Bei der Diskussion von Oberflächenströmen wurde die Abhängigkeit vom Elektrodendurchmesser nicht weiter diskutiert. Berechnet man aber z.B. den Einfluß von Oberflächenströmen mit denselben Eingangsparametern im hochfrequenten Bereich, aber einem Elektrodenradius von  $a = 0.055$  m anstatt mit einem Elektrodenradius von  $a = 0.050$  m, so ist der Einfluß von Oberflächenströmen um einen Faktor 4 größer. Auch dies zeigt eine strikte Minimierung des Luftspalts auf das Unerläßliche an.

Die Abhängigkeit der axialen Auflösung vom Radienverhältnis wurde bereits in Abschnitt 2.3.6 diskutiert. Abbildung 2.14 zeigt eine um einen Faktor 4 geringere axiale Auflösung nach dem Plattenkondensatormodell zur Behandlung des Einflusses der Nachbarschicht 2.3.6.3 für den von  $a = 50$  mm auf  $a = 55$  mm vergrößerten Elektrodenradius.

Quantitativ diskutiert man die Fehleranfälligkeit der Messung auf die verschiedenen Eingangsparameter mit den partiellen Ableitungen der Meßgröße  $\varepsilon_i^x$  nach den jeweiligen Eingangsparametern. Abbildung 3.4 zeigt Real- bzw. Imaginärteil der Ableitungen nach den verschiedenen Apparaturparametern in Abhängigkeit vom Radienverhältnis  $v$  für einen Luftspalt  $\varepsilon_a = 1$  und einer für Messungen bei einer Meßfrequenz von  $f = 250$  kHz typischen Dielektrizitätskonstanten von Eis  $\varepsilon_i^x = 3.2 - 1.29i$ .

Berücksichtigt man die negativen Werte der Imaginärteile, die einen am oberen Rand

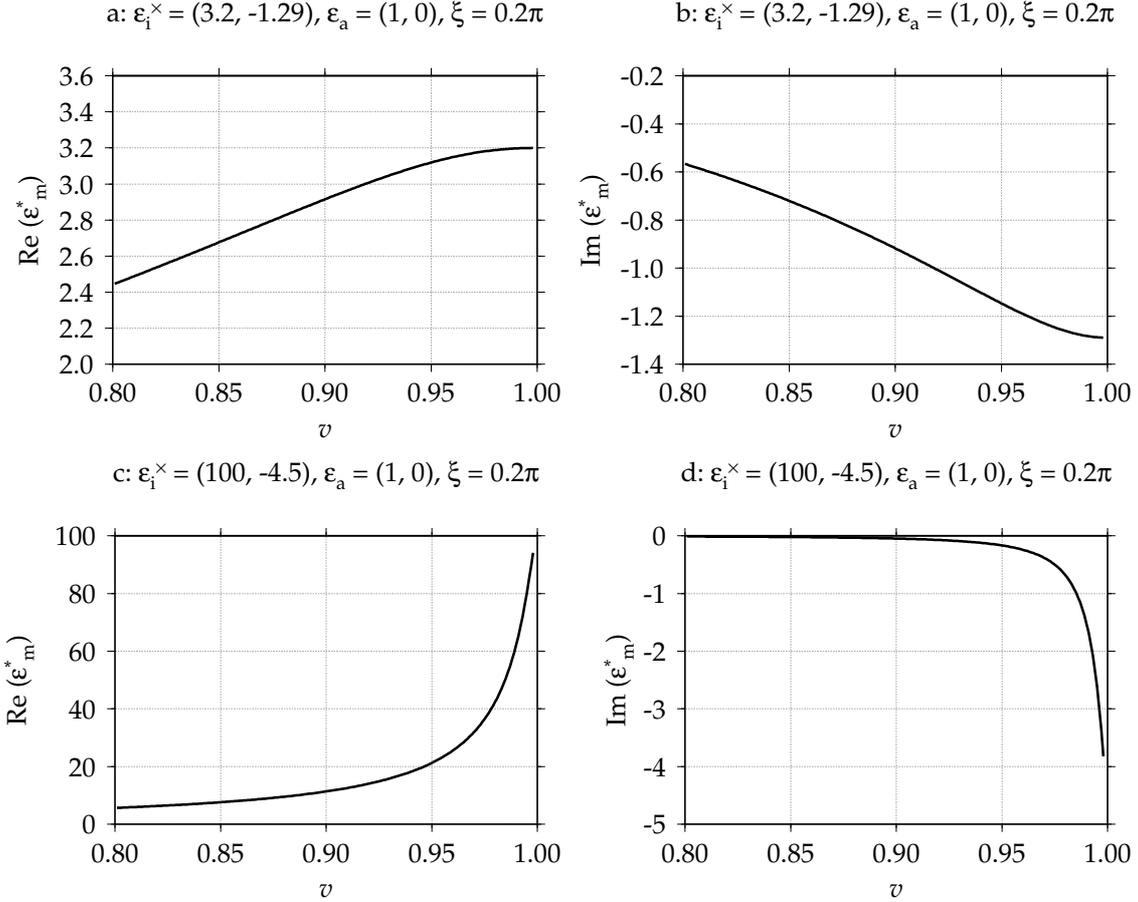


Abbildung 3.3: Real- und Imaginärteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten für Eis bei hohen und niedrigen Frequenzen in Abhängigkeit vom Radienverhältnis. Für das dielektrische Verhalten des Eiskerns wurden aus Petrenko [1993, Abb. 2 & 5] entnommene jeweils für hohe bzw. niedrige Frequenzen repräsentative Werte  $\varepsilon_i^\times$  eingesetzt. Der verbleibende Spalt ist mit Luft  $\varepsilon_a = 1$  gefüllt. Vergleicht man die zu erwartenden Meßwerte  $\varepsilon_m^*$  einer niederfrequenten (c: und d:) und einer hochfrequenten (a: und b:) Messung, so springt die unterschiedliche Krümmungsrichtung und Steigung der aufgetragenen Kurven als qualitativer Unterschied ins Auge. Bei hohen Frequenzen (a: und b:) ist die Variation bei Radienverhältnissen nahe bei  $v \lesssim 1$  klein und die Kurven für Real- und Imaginärteil laufen fast abszissenparallel. D.h. die Messungen sind bezüglich Geometriefehlern relativ unkritisch. Bei niedrigen Frequenzen (c: und d:) ist eine sehr starke Variation der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  mit dem Radienverhältnis  $v$  gegeben. Bei relativ kleinen Radienverhältnissen ist die effektive Dielektrizitätskonstante klein, mit relativ flacher Steigung. In diesem Bereich verliert man mit ihr als Meßgröße Auflösung. Bei Radienverhältnissen nahe bei  $v \lesssim 1$  hat sie eine große Steigung und die Messung wird stark anfällig auf Fehler in der Geometrie.

des Graphen liegenden Ordinatenursprung bedingen, und zieht dann in Betracht, daß bei einer Fehlerrechnung die quadrierten Größen eingehen, so zeigt Abbildung 3.4 eine Minimierung der Fehleranfälligkeit der Messung bei Radienverhältnissen nahe  $v \lesssim 1$  für alle Apparaturparameter. Qualitativ denselben in Abbildung 3.5 dargestellten Befund findet man für eine Messung bei einer relativ niedrigen Meßfrequenz von  $f = 100$  Hz mit der typischen Dielektrizitätskonstanten von Eis  $\varepsilon_i^\times = 100 - 4.5i$ .

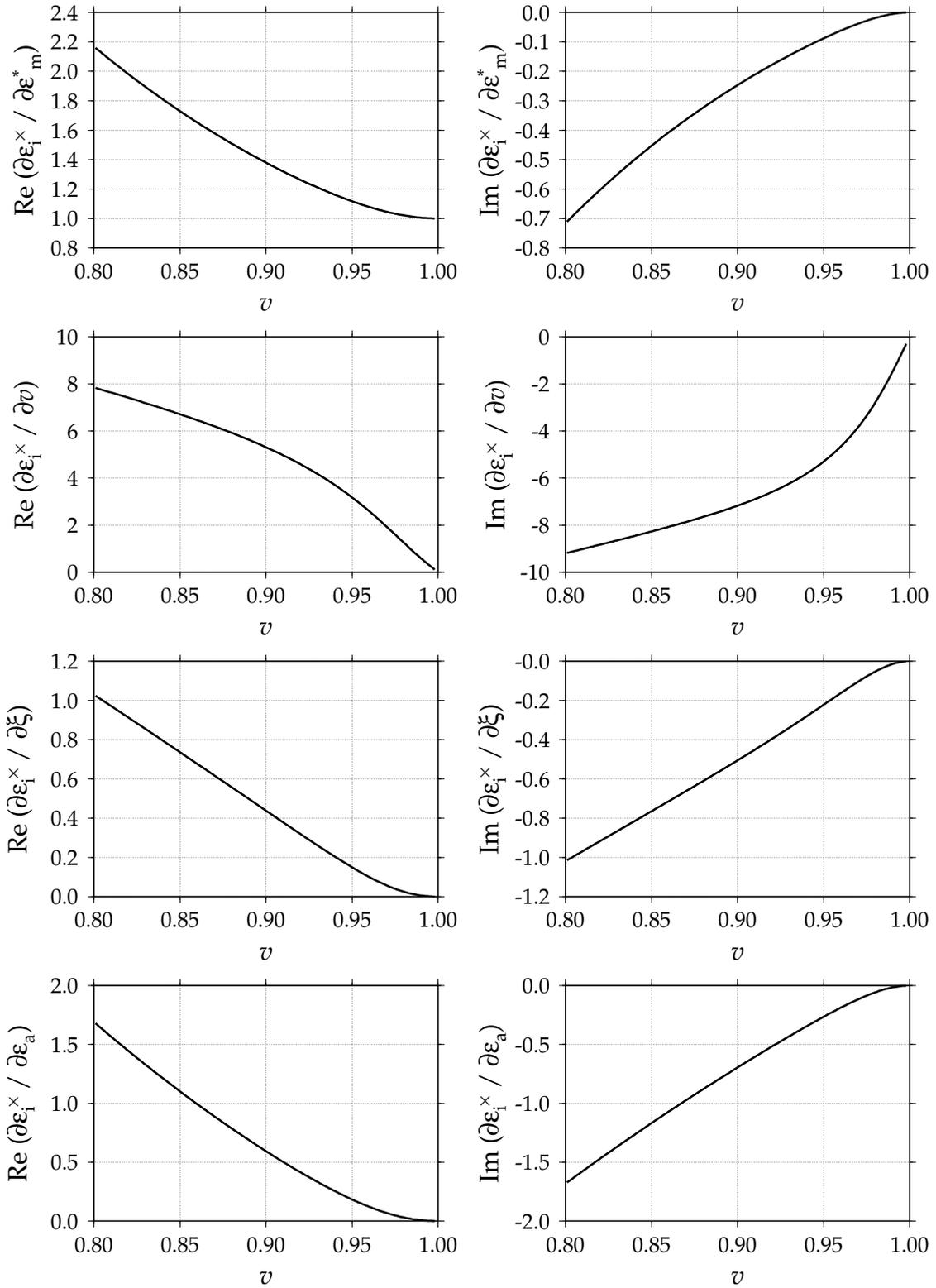


Abbildung 3.4: Real- und Imaginärteile der Ableitungen nach den Parametern der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns gegen das Radienverhältnis für hohe Frequenzen

Die Ableitungen der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns  $\epsilon_i^x$  sind für eine Standardapparatur mit einem Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi = \frac{\pi}{5}$  in Abhängigkeit vom Radienverhältnis  $\nu$  aufgetragen. Zur Repräsentation eines Eiskerns bei einer Meßfrequenz  $f = 250$  kHz wurden die bereits aus Petrenko [1993, Abb. 2 & 5] abgelesenen Dielektrizitätskonstanten von künstlich hergestelltem Eis  $\epsilon_1' = 3.2$ ,  $\epsilon_1'' = 1.29$  mit Luft als Isolierschicht  $\epsilon_a = 1$  eingesetzt.

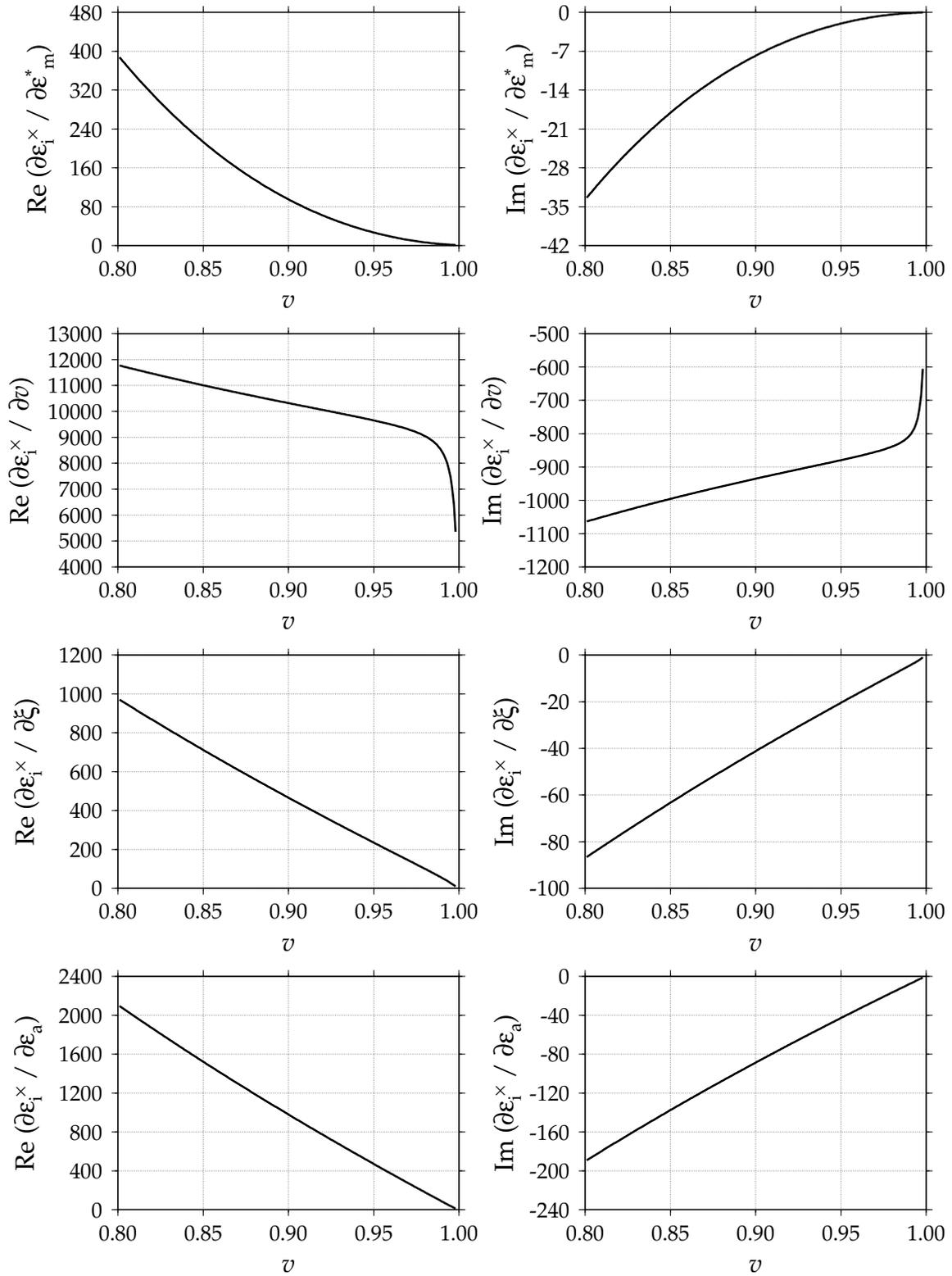


Abbildung 3.5: Real- und Imaginärteile der Ableitungen nach den Parametern der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns gegen das Radienverhältnis für niedrige Frequenzen

Die Ableitungen der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns  $\epsilon_i^x$  sind für eine Standardapparatur mit einem Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi = \frac{\pi}{5}$  in Abhängigkeit vom Radienverhältnis  $v$  aufgetragen. Zur Repräsentation eines Eiskerns bei einer Meßfrequenz  $f = 100$  Hz wurden die bereits aus Petrenko [1993, Abb. 2 & 5] abgelesenen Dielektrizitätskonstanten von künstlich hergestelltem Eis  $\epsilon_1' = 100$ ,  $\epsilon_1'' = 4.5$  mit Luft als Isolierschicht  $\epsilon_a = 1$  eingesetzt.

Quantitativ unterscheidet sich die Messung bei niedrigen Frequenzen durch die wesentlich höheren Zahlenwerte der partiellen Ableitungen, die durch den wesentlich höheren Eingangswert der vermessenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^\times$  wieder relativiert werden. Trotzdem bleiben die hier nicht explizit berechneten relativen Fehler bei niedrigen Frequenzen wesentlich größer. Weiter auffällig ist die extrem starke Abhängigkeit für niedrige Frequenzen vom Radienverhältnis und die enorme Zunahme dem Betrag nach genommen von Radienverhältnissen nahe  $v \lesssim 1$  zu kleinen Radienverhältnissen hin.

Niederfrequente Messungen sind diffizil und werden in dieser Arbeit auch nur exemplarisch behandelt werden. Für hochfrequente Messungen kann man aber allgemein den Fehler der Radienverhältnisvariation abschätzen. Nimmt man als relativen Fehler des Radienverhältnisses die volle Isolierschichtbreite von  $2(a - b) = 2$  mm für einen Elektrodendurchmesser von  $2a = 100$  mm, so ergibt sich ein absoluter Fehler von  $\Delta^S v = 0.02$ . Für  $\varepsilon_i^\times = 3.2 - 1.29i$  berechnet man mit `epsgrid.c` die Ableitung  $\partial\varepsilon_i^\times/\partial v$ . Die Fehlerabschätzung für rein reellwertige Apparaturparameter ergibt im Spezialfall von Gleichung (3.17) für den Beitrag des relativen Fehlers zum Realteil  $\Delta^S \varepsilon_i^{\times'}/\varepsilon_i^{\times'} = |\operatorname{Re}(\partial\varepsilon_i^\times/\partial v)| \Delta^S v/\varepsilon_i^{\times'} \approx 1.26 \frac{0.02}{3.2} \approx 8\%$ . Die Abschätzung für den Beitrag zum Fehler des Imaginärteils als Spezialfall von Gleichung (3.18) ergibt  $\Delta^S \varepsilon_i^{\times''}/\varepsilon_i^{\times''} = |\operatorname{Im}(\partial\varepsilon_i^\times/\partial v)| \Delta^S v/\varepsilon_i^{\times''} \approx 2.79 \frac{0.02}{1.29} \approx 4.3\%$ . Der Fehler kann im einzelnen stark in Abhängigkeit von der Dielektrizitätskonstanten variieren. Im zur Auswertung der Messung benutzten Programm `depmeas.c` sind die allgemeinen Fehlerformeln für Real- (3.17) und Imaginärteil (3.18) sowie ihre Kovarianz (3.19) implementiert.

Für das Radienverhältnis  $v = \frac{b}{a}$  berechnet sich der Fehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta^S v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 (\Delta^S a)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2 (\Delta^S b)^2} = \sqrt{\left(\frac{b\Delta^S a}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^S b}{a}\right)^2} = v \sqrt{\left(\frac{\Delta^S a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta^S b}{b}\right)^2}. \quad (3.22)$$

Die Genauigkeit des mit einem Meßschieber gemessenen Elektrodendurchmessers wird zu  $\Delta^S a = 0.1$  mm geschätzt. Der Eiskernradius wurde ebenfalls mit einem Meßschieber vermessen und ein Fehler des interpolierten Durchmessers von 0.5 mm geschätzt. Addiert man hierzu einen weiteren halben Millimeter für die ungenaue Positionierung, so ergibt sich ein Eiskernradiusfehler  $\Delta^S b = 0.5$  mm. Bei der Auswertung wird damit für einen Nennelektrodenradius  $a = 50$  mm und den Nenneiskernradius  $b = 49$  mm ein Fehler von  $\Delta^S v = 0.0104$  eingesetzt.

Die führenden Fehlerquellen sind von der jeweiligen Anwendung abhängig. Der Meßelektrodenbegrenzungswinkel sollte i.a. genau zu bestimmen sein, so daß bei Luft als nicht fehlerbehaftetes Isolierschichtdielektrikum die Radienfehler leicht führend werden können. Im Bohrloch kann eine inhomogene, in ihren dielektrischen Eigenschaften unzureichend bekannte Bohrflüssigkeit zu einem führenden Fehlerbeitrag werden. Neben geometrischen Fehlern ist aber auch die Kapazitäts-/Leitfähigkeitsmessung mit der Meßbrücke als wesentliche Fehlerquelle in Betracht zu ziehen.

### 3.2.5 Meßelektrodenlänge

Die Meßelektrodenlänge ist nicht fehlerrelevant, solange die Leerkapazität aus Eichung oder Messung bestimmt wird. In der vorliegenden Arbeit wird die vorgenommene Eichung in Abschnitt 3.2.7 diskutiert.

Bei Verwendung einer berechneten Leerkapazität wäre die Meßelektrodenlänge fehlerrelevant. Wegen der Proportionalität der Leerkapazität  $C_0^\infty$  zur Meßelektrodenlänge  $l$  nach der definierenden Gleichung (2.20) ist der relative Fehler der Meßelektrodenlänge auch der Fehlerbeitrag zum relativen Fehler der Leerkapazität. Bei der Diskussion der Halbschalen in Abschnitt 3.2.2 wurde die Leerkapazität pro Meßelektrodenlänge bereits mit  $\frac{C_0^\infty}{l} = 6.337 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$  angegeben. Bei Messungen mit hohen Frequenzen ist die Kapazität  $C_0^\infty = 63.37 \text{ fF}$  einer  $l = 10 \text{ mm}$  langen Meßelektrode etwas niedriger als der empfohlene Anwendungsbereich des Meßkondensators HP16451B [HPDTF, 1989, Abb. B-2]. Dieser Meßkondensator ist spezifiziertes Zubehör der verwendeten Meßbrücken HP4284A [HPLCR, 1994] bzw. HP4285A [HPLCR, 1996]. Die Brücke HP4284A [HPLCR, 1994, Abb. 9-4] ist für eine Leerkapazität von  $C_0^\infty = 63.37 \text{ fF}$  für Meßfrequenzen von  $f = 50\text{--}1000 \text{ kHz}$  spezifiziert. Die Brücke HP4285A [HPLCR, 1996, Abb. 1-2] im Bereich von  $f = 0.2\text{--}30 \text{ MHz}$ , wobei sinnvolle Messungen mit Aluminiumelektroden bei  $1 \text{ m}$  langen Zuleitungen bis zu einer Meßfrequenz von  $f \approx 7 \text{ MHz}$  möglich sind.

Für Messungen bei niedrigen Frequenzen unterhalb von  $f \lesssim 100 \text{ Hz}$  ist die Meßbrücke HP4284A streng genommen nur für Kapazitäten  $C \gtrsim 10 \text{ pF}$  spezifiziert. Nimmt man einen Realteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten von  $\text{Re}(\varepsilon_m^*) = 42.35$  für die oben für eine Frequenz von  $f = 100 \text{ Hz}$  abgelesene Dielektrizitätskonstante von künstlich hergestelltem Eis  $\varepsilon_i^x = 100 - 4.5i$  an, so berechnet sich für die benötigte Leerkapazität  $C_0^\infty = \frac{C}{\varepsilon_m^*} = \frac{10 \text{ pF}}{42.35} = 236 \text{ fF}$ . Berücksichtigt man dann noch eine Reserve für die Messung von Kernen mit geringerer Dielektrizitätskonstante, z.B. durch geringere Dichte, so ist eine  $l = 100 \text{ mm}$  lange Meßelektrode mit einer Leerkapazität von  $C_0^\infty = 633.7 \text{ fF}$  eine vertretbare Wahl. Zu Beachten ist hier, daß die Meßelektrodenlänge, anders als bei der hochfrequenten Messung, auf die Messung selbst ausgelegt wurde. Eine Leerkapazität von  $C_0^\infty \approx 10 \text{ pF}$  wäre nur mit einer  $1.6 \text{ m}$  langen Meßelektrode zu erreichen, was als räumliche Auflösung unzureichend wäre. Damit ist eine direkte Messung der zur Auswertung benötigten Leerkapazität  $C_0^\infty$  nicht möglich. Die Ableitung der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  aus den Meßdaten ist im Bereich niedriger Frequenzen nur noch mit der in Abschnitt 3.2.7 vorgestellten Eichung möglich.

Diese Meßelektrodenlängen passen auch zu den Anforderungen bei Bohrungen. So sind z.B. die Anforderungen bei Tiefbohrungen oft im Bereich von  $30 \text{ m}$  bis  $40 \text{ m}$  Tagesmeßleistung, d.h. für die eigentliche Messung bleiben maximal  $30 \text{ Minuten}$  pro Meter Eiskern. Auch bei flachen Eiskernbohrungen beträgt die Tagesproduktion des Bohrers mehr als  $30 \text{ m}$  pro Tag. Eine vorgegebene Meßgeschwindigkeit von weniger als  $30 \text{ min}$  Meßzeit pro Meter ist als Anforderung an eine feldtaugliche Methode sinnvoll. Mißt man nur eine hohe Frequenz von z.B.  $250 \text{ kHz}$  so ist  $1 \text{ m}$  Kern in  $5 \text{ mm}$  axialer Auflösung in  $10 \text{ min}$  zu bearbeiten. Besonders bei der Messung niedriger Frequenzen im Bereich von  $1 \text{ kHz}$  und darunter wird die für den Meßbrückenabgleich benötigte Zeit zunehmend größer und die  $30 \text{ min}$  Meßzeit pro Kernmeter sind schnell

erreicht. Damit ist die Mittelung durch die längere Elektrode hinnehmbar, da in einer Standardmeßmethode auch aus Anforderungen an die Tagesleistung eine längere Elektrode eingebaut würde.

### 3.2.6 Präzision der zur Auswertung verwendeten Theorie und Algorithmen, sowie Einfluß der Packfolie

Fehler bezüglich der Verwendung eines endlich langen Kondensators waren bereits in Abschnitt 3.2.2 als mit 1.5 ‰ vernachlässigbar diskutiert worden. Im Vergleich zu diesem hier vernachlässigbaren Fehler durch die Theorie an sich war die Präzision der implementierten Algorithmen in Abschnitt 3.1.3.3 als in keiner Weise limitierend nachgewiesen worden.

Wie bei der Diskussion der Elektrodenhalbschalen in Abschnitt 3.2.2 bereits erwähnt wird die Aufhängung der Kerne in einer dünnen Plastikfolie vorgenommen. Bei der Plastikfolie handelt es sich um eine sehr dünne Folie, die sonst zum Einwickeln von Transportgut auf Paletten benutzt wird. Sie ist wie im Haushalt gebrauchte Frischhaltefolie beschaffen. Die verwendete Polyäthylenfolie ist 17  $\mu\text{m}$  bzw. 20  $\mu\text{m}$  dick. Für eine Berechnung der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  mit der in Abschnitt 2.2.4 bereits vorgestellten Routine zur Behandlung beliebig vieler Schichten `nlayeps.c` wurde für die nach außen durch die Elektrode mit Radius  $\rho_1 = 50$  mm begrenzte Schicht die Dielektrizitätskonstante von Luft<sup>6</sup>  $\varepsilon_1 = 1$  eingesetzt. Daran schliesst sich innen die mit Radius  $\rho_2 = 49.02$  mm nach außen begrenzte Polyäthylenschicht mit einer Dielektrizitätskonstanten von  $\varepsilon_2 = 2.3$  [Kohlrausch, 1968a, Tab. 106] an. Der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten von Polyäthylen ist sowohl für hohe als auch für niedrige Frequenzen vernachlässigbar: Der in Kohlrausch [1968b, Abschn. 6.622] definierte Verlustfaktor  $\frac{\varepsilon_2''}{\varepsilon_2'}$  ist für eine Meßfrequenz von  $f = 50$  Hz kleiner 0.2 ‰ und für eine Meßfrequenz von  $f = 1$  MHz sogar kleiner 2 ppm [Kohlrausch, 1968a, Tab. 106]. Setzt man für den mit Radius  $\rho_1 = 49$  mm nach außen begrenzten Eiskern exemplarisch die Dielektrizitätskonstante von reinem künstlichem Eis  $\varepsilon_1 = 3.2 - 1.29i$  für eine Meßfrequenz von  $f = 250$  kHz ein, so berechnet sich eine relative Abweichung der berechneten effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^* = 3.1882 - 1.2619i$  von der nach dem Algorithmus für zwei Schichten berechneten  $\varepsilon^* = 3.1877 - 1.2613i$  um 0.15 ‰ im Realteil und 0.53 ‰ im Imaginärteil. Die Abweichung ist für hohe Frequenzen also unterhalb der Größenordnung für die Näherung des endlich ausgedehnten Meßkondensators. Die Abweichung durch Verwendung einer angenäherten Theorie zur Umkehrung der effektiv gemessenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  in die Dielektrizitätskonstante des Eiskerns  $\varepsilon_1^x$  kann für hohe Frequenzen gegen die eine Größenordnung größere Fehlerschranke im wenige Prozentbereich für andere Fehlerquellen vernachlässigt werden.

Setzt man die für eine Meßfrequenz  $f = 100$  Hz typische Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_1 = 100 - 4.5i$  für künstliches reines Eis ein, so berechnet man für drei Schichten eine effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon^* = 42.66 - 0.691i$  und mit der nach dem Algorithmus für zwei Schichten berechneten  $\varepsilon^* = 42.35 - 0.681i$ . Dies ist eine

---

<sup>6</sup>Gerthsen et al. [1989, Tab. 6.1] geben für die Dielektrizitätskonstante von Luft unter Normaldruck bei 0 °C lediglich einen um 0.6 ‰ größeren Wert als für das Vakuum an.

relative Abweichung von 7.3 ‰ im Real- und 1.5 ‰ im Imaginärteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten. Fehler niederfrequenter Messungen sind wesentlich größer als bei hochfrequenten Messungen. Die Abweichungen bleiben im Bereich der angestrebten Genauigkeit von wenigen Prozent, sind gegen die tatsächlichen Fehler bei einer Messung in diesem Frequenzbereich aber zu vernachlässigen. Sollten die Fehler durch Verwendung einer Packfolie in einer zukünftigen Anwendung tatsächlich zu führenden Termen werden, so können aus den Formeln für beliebig viele Schichten eines konzentrischen Dielektrikums nach Abschnitt 2.2 mit verhältnismäßig geringem Aufwand entsprechende Algorithmen abgeleitet werden.

### 3.2.7 Eichung

Nach Durchführung aller Meßgerätekorrekturen kann man der Fehlerrechnung nach Spezifikation für die verwendeten Meßbrücken HP4284A [HPLCR, 1994] bzw. HP4285 [HPLCR, 1996] folgen. Setzt man eine Leerkapazität von  $C_0^\infty = 63$  fF bei einer Meßfrequenz von  $f = 250$  kHz ein, so ergibt sich allein für die Impedanzmessung ein relativer Fehler  $\Delta^S Z/Z \approx 9$  ‰. Die Erfahrung und Eichung in Wilhelms [1996, Abschn. 2.1.3.3] zeigt, daß die Brücke in etwa eine Größenordnung genauer mißt. Bei der offensichtlich vorsichtig vorgenommenen Spezifikation wurden systematische Fehler anscheinend überschätzt. Diese systematischen Fehler können mit der hier beschriebenen Eichung reduziert werden.

Zunächst ist die in Wilhelms [1996, Abschn. 2.1.3.2] beschriebene OPEN-/SHORT-Korrektur auszuführen. Bei der OPEN-Korrektur wird analog zur Messung mit dem Kondensator HP16451B [HPDTF, 1989] eine geerdete Metallplatte zwischen die Elektroden gebracht und die entsprechende Korrekturroutine der Meßbrücke ausgeführt. Vor Ausführung der SHORT-Korrekturroutine werden die Meßelektrode und die Gegenelektrode (Bezeichnungsweise entsprechend Abbildung 2.1) kurzgeschlossen. Wilhelms [1996, Abschn. 2.1.3.3] verwendete zur Eichung den von Hewlett Packard als Zubehör zu den Meßbrücken gelieferten Plattenkondensator HP16451B [HPDTF, 1989] und veränderte die Eichkapazität durch Variation des Plattenabstands. Im folgenden wird hier eine Eichung der zur Messung fertig verkabelten Anordnung beschrieben. Anstelle des Eiskerns werden Metallrohre in das Meßvolumen gebracht und die Eichkapazität über Durchmesservariation verändert.

In den Abschnitten 2.2.1 und 3.1.2.2 wurde bereits diskutiert, daß Metalle sich wie Materialien mit unendlich hoher Dielektrizitätskonstante verhalten. Die im Quellcode `eps2lay.c` (Anhang B) implementierte Routine `calcepsdev` behandelt die Anordnung des Elektrodenpaars mit einem mittenzentrierten Metallrohr. Im Meßprogramm `depmeas.c` (Anhang B) wurde eine Option implementiert, die den Eichstandard mit Fehler berechnet. Zur direkten Berechnung der Eichstandards und Erstellung eines Eichskripts wurde das Skript `caldev.gmt` (Anhang B) erstellt. Eine automatisch bei jeder Eichung erstellte Kalibriergrafik ist für den Eichdatensatz des Eiskerns B32 [Oerter et al., 2000] in Abbildung 3.6 exemplarisch dargestellt.

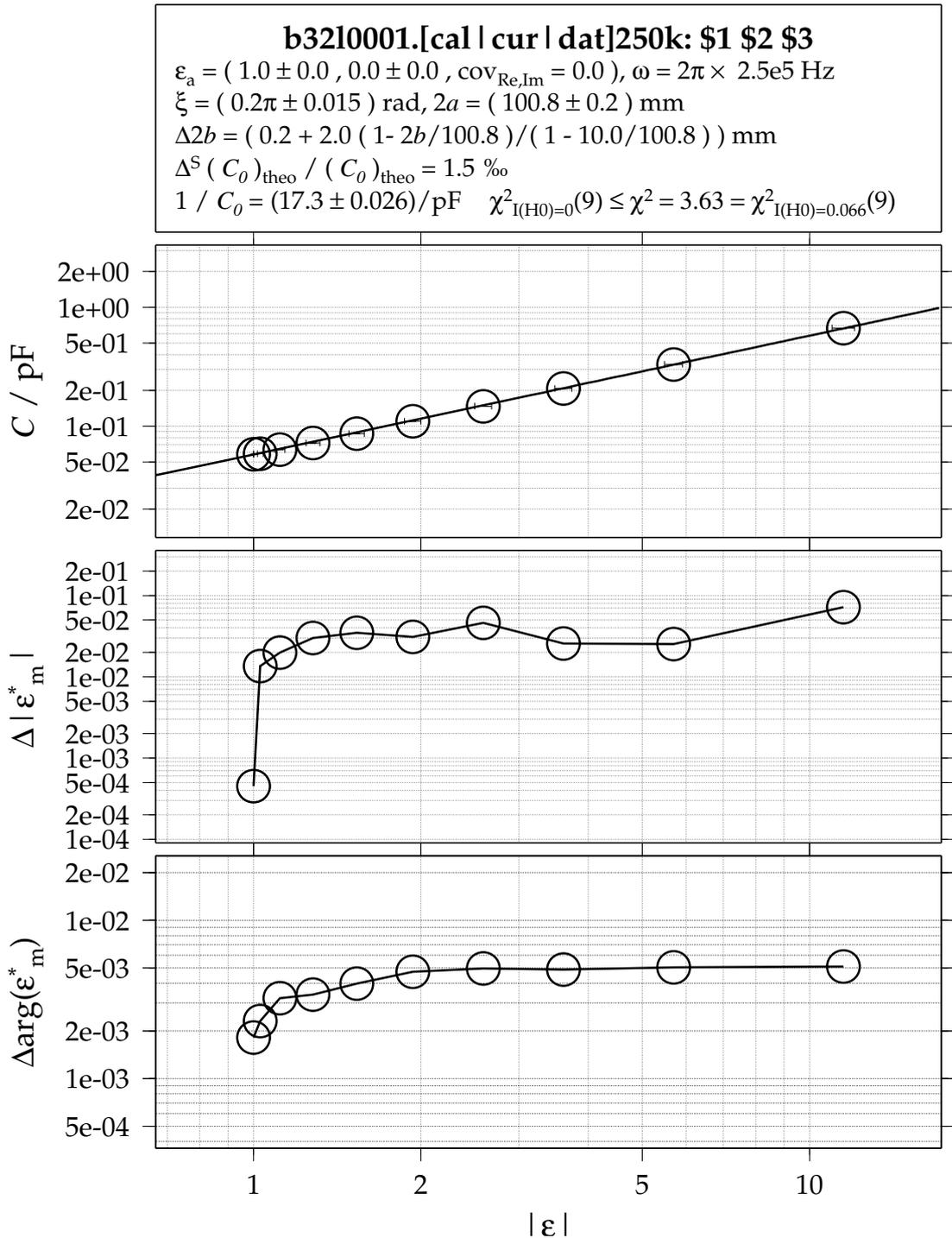


Abbildung 3.6: Beispiel für die Eichung bei einer Meßfrequenz von 250 kHz. Die Ausgabe des Skripts `caldev.gmt` für den Eichdatensatz des Eiskerns B32 [Oerter et al., 2000] ist gezeigt. Das bei der Anpassung des Parameters  $\frac{1}{C_0}$  berechnete  $\chi^2$  und der zum Signifikanzniveau gehörige kritische Wert sind angegeben. Das Signifikanzniveau folgt der in der Standardliteratur der Statistik üblichen Konvention [Storch und Zwiers, 1999, Abschn. 4.1.10]. Ein kleines Signifikanzniveau unterstützt die Annahme, daß die Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$ : “Die vorgenommene proportionale Anpassung ist im Rahmen der Fehler nicht erlaubt” getrost abgelehnt werden kann. Entscheidet man sich im Beispiel hier beim Test der Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  einen Fehler erster Art, d.h. eine wahre Nullhypothese abzulehnen, mit 10 % Wahrscheinlichkeit zu riskieren, so wird man die Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  getrost ablehnen. Das berechnete  $\chi^2 = 3.63 = \chi^2_{0.066}(9) \leq \chi^2_{0.1}(9)$  ist kleiner als das Kritische, da höher signifikante Tests die weniger signifikanten umfassen [Barlow, 1989, Abschn. 8.1.3].

### 3.2.7.1 Ausmessung eines Eichdatensatzes

Zur Gewinnung eines Eichdatensatzes wurden nach der Durchführung der Meßgerätekorrekturroutinen Aluminiumrohre in etwa 10 mm Inkrementen mittenzentriert in den Kondensator eingebracht und jeweils  $N = 11$  Messungen der Kapazität  $C$  und des Leitwerts  $G$  genommen. Die aus diesen Messungen bestimmten Schätzwerte des Erwartungswerts  $\langle C \rangle$  und  $\langle G \rangle$  mit ihren Fehlern  $\Delta^R \langle C \rangle = \Delta^R C / \sqrt{N}$  und  $\Delta^R \langle G \rangle = \Delta^R G / \sqrt{N}$  der Mittelwerte [Barlow, 1989, Abschn. 4.2.1] bilden gemeinsam mit der Leermessung den Eichdatensatz. Dieser Eichdatensatz wird bei der Eichung mit dem nun zu diskutierenden Eichstandard verglichen.

### 3.2.7.2 Berechnung der Eichstandards

Den Eichstandard bilden die  $|\varepsilon| C_0$ . In den Kondensator mit der Leerkapazität  $C_0$  werden Metallrohre eingebracht, die die Leerkapazität um den Faktor der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $|\varepsilon|$  erhöhen. Der relative Fehler der Leerkapazität war in Abschnitt 3.2.2 bereits zu  $\Delta^S C_0 / C_0 = 1.5 \text{ ‰}$  abgeschätzt worden. In die berechneten Dielektrizitätskonstanten gehen weitere geometrische Fehler ein, die im Kopf des jeweiligen Eichstandards (Beispiel siehe Abbildung 3.6) aufgeführt sind. So ist z.B. der Durchmesserfehler des Meßelektrodenpaars auf  $\Delta^S(2a) = 0.2 \text{ mm}$  geschätzt. Fehlerbeiträge  $\Delta^S(2b)$  für das innere Aluminiumrohr sind die Summe aus dem Fehler für die Durchmesser messung von 0.2 mm und die für das kleinste Rohr angenommene stärkste geometrische Abweichung (z.B. Exzentrizität und Durchbiegung) von 2 mm linear abnehmend auf 0 mm auf der Elektrodenoberfläche. Der Fehler des Meßelektrodenbegrenzungswinkels  $\Delta^S \xi$  ist die Fortpflanzung der Fehler bei der Fertigung der Elektroden auf einer Fräsbank. Aus den Fehlern von  $a$ ,  $b$  und  $\xi$  ergibt sich durch Fortpflanzung mit den Ableitungen der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^*$  für  $\varepsilon_i = \infty$  und eine nicht fehlerbehaftete Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht<sup>7</sup>  $\varepsilon_a = 1$  der Fehlerbeitrag zum Eichstandard

$$\Delta^S(|\varepsilon| C_0) = \sqrt{(\Delta^S|\varepsilon|)^2 (C_0)^2 + |\varepsilon|^2 (\Delta^S C_0)^2} . \quad (3.23)$$

Da  $\varepsilon$  aus der gemessenen Kapazität  $C$  zu bestimmen ist, passt man nun mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Proportionalität  $|\varepsilon| C_0 = C$  zwischen dem durch die Leerkapazität  $C_0$  geteilten Eichstandard  $|\varepsilon|$  und den Meßwerten der Kapazität  $C$  mit dem Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{C_0}$  an. Diese Vorgehensweise nimmt ein proportionales Verhalten der Meßbrücke an. Zur praktischen Ausführung wurde die ungefähr mit einem Zahlenwert 1 erwartete Eichkonstante zwischen Eichstandard und Eichmessung durch die Leerkapazität  $C_0$  geteilt und zu einer Konstante  $\frac{1}{C_0}$  zusammengefaßt. Ein statistisches Standardverfahren zur Behandlung dieser Problemstellung ist die  $\chi^2$ -Anpassung einer einfachen Proportionalität.

<sup>7</sup>Bei der in dieser Arbeit vorgestellten Anwendung ist die Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht aus Luft  $\varepsilon_a = 1$  nicht fehlerbehaftet. Im allgemeinen, z.B. bei Verwendung einer Bohrflüssigkeit, sind die Fehlerabhängigkeiten in den Algorithmen implementiert, so daß die Algorithmen unmittelbar übernommen werden können.

### 3.2.7.3 $\chi^2$ -Anpassung für die Leerkapazität

Die  $\chi^2$ -Anpassung ist eine wichtige Methode zur Bestimmung eines unbekanntes Parameters, hier die inverse Leerkapazität  $\frac{1}{C_0}$ , in einer von diesem Parameter abhängigen funktionalen Zuordnung, hier  $|\varepsilon| = \frac{1}{C_0} C$ , zwischen einer vom Eingangsdatensatz repräsentierten Meßgröße, hier die gemessene Kapazität  $C$ , und einer zugeordneten Größe, hier die effektive Dielektrizitätskonstante  $|\varepsilon|$  der Anordnung aus Kondensator mit eingebrachtem Aluminiumrohr. Der zugeordnete Datensatz hat nach Gleichung (3.23) eine rein systematisch bestimmte Gesamtfehlergenauigkeit

$$\Delta|\varepsilon| = \frac{\Delta^S(|\varepsilon|C_0)}{C_0} = \frac{\sqrt{(\Delta^S|\varepsilon|)^2(C_0)^2 + |\varepsilon|^2(\Delta^S C_0)^2}}{C_0} = \sqrt{(\Delta^S|\varepsilon|)^2 + |\varepsilon|^2\left(\frac{\Delta^S C_0}{C_0}\right)^2}, \quad (3.24)$$

die als Wichtung verwendet wird [Barlow, 1989, Kap. 6]. Im hier diskutierten Eichdatensatz sind sowohl die Eingangskapazitäten  $C$  mit einem Fehler  $\Delta^R C$  als auch die zugeordneten Daten  $|\varepsilon|$  mit einem Fehler  $\Delta|\varepsilon|$  behaftet. Für diesen Fall gibt Leo [1994, Abschn. 4.7.3], in den hier diskutierten Größen entsprechend formuliert, eine Berechnung der Wichtung für die  $\chi^2$ -Anpassung als Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$(\Delta^W|\varepsilon|)^2 = (\Delta|\varepsilon|)^2 + \left(\frac{\partial|\varepsilon|}{\partial C}\right)^2 (\Delta C)^2 = (\Delta^S|\varepsilon|)^2 + |\varepsilon|^2\left(\frac{\Delta^S C_0}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{C_0}\right)^2 (\Delta^R C)^2 \quad (3.25)$$

an. Das gleiche Ergebnis würde die in Barlow [1989, Abschn. 6.6] beschriebene Behandlung mit Kovarianzmatrizen liefern. Der mittlere Term mit dem relativen Fehler der theoretisch berechneten Leerkapazität  $\frac{\Delta^S C_0}{C_0}$  ist bei der Luftmessung führend für den Fehler des Standards, da der sonst dominierende Fehler für den Eichstandard  $\Delta^S|\varepsilon|$  bei der Luftmessung verschwindet.

Das  $\chi^2$  einer Meßreihe ist die Summe aller mit dem Fehler der Meßgröße gewichteten quadratischen Abweichungen des vorausgesagten Meßergebnisses vom Meßwert [Barlow, 1989, Abschn. 6.1]. Im hier behandelten Fall berechnet man für eine mit  $n = 1, \dots, N$  durchnummerierte Meßreihe:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{|\varepsilon|_n - \frac{C_n}{C_0}}{\Delta^W|\varepsilon|_n} \right)^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(|\varepsilon|_n - \frac{1}{C_0} C_n)^2}{(\Delta^S|\varepsilon|_n)^2 + (|\varepsilon|_n)^2 \left(\frac{\Delta^S C_0}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{C_0}\right)^2 (\Delta^R C_n)^2}. \quad (3.26)$$

$\chi^2$  ist ein Maß für die Repräsentanz der Meßdaten durch die angenommene funktionale Abhängigkeit zwischen den Eingangsdaten und den zugeordneten Daten im Rahmen der Fehler. Zur optimalen Anpassung eines Laufparameters ist  $\chi^2$  zu minimieren. Wegen des Auftretens des Parameters  $\frac{1}{C_0}$  im Zähler und im Nenner ist  $\chi^2$  als Funktion des anzupassenden Parameters nichtlinear. Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums ist das Verschwinden der ersten Ableitung  $\frac{\partial \chi^2}{\partial (1/C_0)} \stackrel{!}{=} 0$  [Heuser, 1990a, Satz 46.2], die man mit dem Newtonschen Verfahren [Heuser, 1990a, Kap. 70] (vgl. Abschnitt 3.1.3) löst. Die bei der Fehlerfortpflanzung benötigten Ableitungen

$$\frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial |\varepsilon|_n} = \frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}} \frac{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}}{\partial |\varepsilon|_n} = \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\left(\partial \frac{1}{C_0}\right)^2} \right)^{-1} \frac{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}}{\partial |\varepsilon|_n} \quad \text{und} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial C_n} = \frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}} \frac{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}}{\partial C_n} = \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\left(\partial \frac{1}{C_0}\right)^2} \right)^{-1} \frac{\partial \frac{\partial \chi^2}{\partial \frac{1}{C_0}}}{\partial C_n} \quad (3.28)$$

berechnet man über die Kettenregel [Heuser, 1990a, Satz 47.2] und die Relation für die Ableitung der Umkehrfunktion [Heuser, 1990a, Satz 47.3] (vgl. Abschnitt 3.1.4). Die Differentialrechnung wird hier nur als Hilfsmittel zum Auffinden eines Minimums verwendet, um eine gute Anpassung zu finden. Auf die Überprüfung der hinreichenden Bedingung für ein Minimum [Heuser, 1990a, Satz 49.6] von  $\chi^2$  kann verzichtet werden, da im folgenden Abschnitt die statistische Signifikanz der Anpassung getestet wird, die das für die Annahme der Anpassung heranzuziehende Kriterium ist. Entscheidet man sich, die Anpassung zu akzeptieren, so können die Ergebnisse im weiteren Auswertegang zur Eichung verwendet werden.

Zur Wahl des Startwerts im Newtonschen Verfahren eignen sich die durch eine geringfügige Näherung in der Fehlerwichtung gewonnenen linearen Abhängigkeiten mit analytischer Auflösung nach dem Parameter  $1/C_0$ . Denn setzt man in der Wichtung (3.25) im letzten Term  $C/C_0 \approx |\varepsilon|$  und für  $\Delta^R C/C$  die gemessenen Werte ein, so erhält man eine von  $1/C_0$  unabhängige Wichtung

$$(\Delta^W |\varepsilon|)^2 \approx (\Delta^S |\varepsilon|)^2 + |\varepsilon|^2 \left( \frac{\Delta^S C_0}{C_0} \right)^2 + |\varepsilon|^2 \left( \frac{\Delta^R C}{C} \right)^2. \quad (3.29)$$

Für die gewichtete Anpassung einer einfachen Proportionalität ergibt sich bei der analytischen Auswertung der notwendig verschwindenden ersten Ableitung der  $\chi^2$ -Verteilung, die in der Näherung der Wichtung nur noch im Zähler vom Parameter  $\frac{1}{C_0}$  abhängt [Barlow, 1989, Abschn. 6.1.1 & 6.2.3], für den Proportionalitätsfaktor:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{\sum_{n=1}^N \frac{|\varepsilon|_n C_n}{(\Delta^W |\varepsilon|_n)^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{(C_n)^2}{(\Delta^W |\varepsilon|_n)^2}}. \quad (3.30)$$

Bei der Durchführung der Eichung wird der Parameter  $\frac{1}{C_0}$  mit den Ergebnissen der Näherung analytisch berechnet und dann als Startwert des üblicherweise in sehr wenigen Schritten konvergierenden Newtonschen Verfahrens verwendet. Das am Konvergenzpunkt für den Parameter  $\frac{1}{C_0}$  bestimmte  $\chi^2$  ist Ausgangspunkt für den Test der Hypothese, daß die Meßbrücke im Rahmen höchstens überschätzter systematischer Fehler ein proportionales Verhalten zeigt.

### 3.2.7.4 Test der Hypothese einer Proportionalmeßbrücke

Storch und Zwiers [1999, Abschn. 4.1.7] beschreiben die Methode des Hypothesentests als Konsistenzprüfung eines Datensatzes mit einem als Hypothese  $\mathfrak{H}$  formulierten Konzept. Die hier vorgenommene Eichung beruht auf der Hypothese  $\mathfrak{H}$ : “Die von der Meßbrücke bestimmte Kapazität  $C$  ist im Rahmen höchstens überschätzter Fehler mit dem Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{C_0}$  proportional der nach der Theorie bestimmten effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  für eine Anordnung aus Kern

und Kondensator". Eine vorsichtige Vorgehensweise ist, die Fehler eher leicht zu überschätzen, dabei nicht zuviel Information zu verlieren und so genügend Aussagekraft für die abgeleiteten Aussagen zu behalten. Wie im letzten Abschnitt diskutiert, stellt  $\chi^2$  zwischen Meßdaten, den Fehlern der Meßdaten und einer funktionalen Abhängigkeit zwischen den Meßdaten einen Zusammenhang her. Der Eichdatensatz enthält Messungen mit rein reellen effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  zur Konsistenzprüfung. Eichstandards mit komplexwertigen effektiven Dielektrizitätskonstanten in mit den Metallrohren vergleichbarer Präzision herzustellen erfordert noch weiteren Aufwand, da Materialien mit gut bekannten und temperaturstabilen dielektrischen Eigenschaften zu finden sind. Besonders Materialien mit einer sehr gut bekannten, stabilen, aber nicht verschwindenden Verlusttangente könnten problematisch zu finden sein. Eine Möglichkeit zur Festlegung eines Eichstandards mit definierten Verlusten wäre ein in der Trennebene, durch die das Feld wegen der Symmetrie senkrecht hindurchtritt, von den Elektroden isoliert eingebrachtes Metallplattenpaar, das über eine definierte Impedanz verbunden wird. Die Anordnung entspricht dann einer Reihenschaltung des Meßkondensators mit der Impedanz. Dabei muß jedoch die Verkabelung nicht geändert werden. Zur Variation der Kapazität ist eine Aufteilung der Metallrohre in zwei auf die Metallplatten aufgesetzte Halbschalen in Erwägung zu ziehen, da ein Luftkondensator mit berechneter Kapazität eine stabile lediglich durch die mechanische Präzision limitierte Eichkapazität darstellt. Auch bei dieser Möglichkeit ist die Variation des ohmschen Anteils der Impedanz mit der Temperatur zu berücksichtigen und der Widerstand zwischen den Halbschalen ist ggf. direkt zu messen. Das proportionale Verhalten der Meßbrücke bei der Kapazitätsmessung wird jedoch im wesentlichen von der Messung des Impedanzbetrages abhängen. Damit stellt die hier vorgenommene Eichmessung bereits einen vertrauenswürdigen Datensatz für den Konsistenztest dar. Die Konsistenz überprüft man anhand des berechneten  $\chi^2$ , denn für höchstens überschätzte Fehler formuliert man die Hypothese  $\mathfrak{H}$ , daß das  $\chi^2$  einen sogenannten kritischen Wert nicht überschreitet:

$$\mathfrak{H} : \chi^2 \leq \chi_p^2(\mathbf{n}) \quad (3.31)$$

Der kritische Wert  $\chi_p^2(\mathbf{n})$  ist von einem noch näher festzulegenden, als Wahrscheinlichkeit formulierten Risiko  $\mathbf{p}$  bestimmt. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Anzahl der Freiheitsgrade  $\mathbf{n} = N - 1$ , d.h. der Anzahl der Meßpunkte abzüglich der Anzahl der angepaßten Parameter abhängig [Barlow, 1989, Abschn. 8.3.1 & 8.1]. Der schwerwiegendste mögliche Fehler beim hier vorgenommenen Test ist, eine Eichkurve anzunehmen, die das Verhalten der Meßbrücke im Rahmen der angenommenen Fehler nur unzureichend beschreibt. Man wird also testen, ob man den Fall "die funktionale Abhängigkeit ist nicht proportional" getrost ausschließen kann. Dieses Konzept findet man in der statistischen Literatur als Test der zur Hypothese  $\mathfrak{H}$  alternativen Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  [Barlow, 1989, Abschn. 8.2.1]:

$$\mathfrak{H}_0 : \chi^2 > \chi_p^2(\mathbf{n}) . \quad (3.32)$$

Als Signifikanzniveau eines Tests  $\mathbf{p}$  bezeichnet man die über den Ablehnungsbereich der alternativen Hypothese  $\mathfrak{H}_0$  integrierte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bei dieser Definition bezeichnet das Signifikanzniveau  $\mathbf{p}$  eines Tests die Wahrscheinlichkeit einen Fehler 1. Art zu begehen, d.h. eine falsche Hypothese zu akzeptieren, wenn man die alternative Hypothese  $\mathfrak{H}_0$  ablehnt. Ein guter Test hat mit dieser Definition ein kleines Signifikanzniveau. Storch und Zwiers [1999, Abschn. 4.1.10] weisen auf

die oft von Klimatologen verwendete Signifikanzdefinition hin, die mit  $1 - p$  genau entgegengesetzt der Definition in der üblichen statistischen Literatur ist.

Im Kopf der Ausgabe des Eichskripts `caldev.gmt` (Anhang B, Abbildung 3.6) sind die benötigten Größen zur Durchführung eines  $\chi^2$  Tests angegeben. Entschließt man sich z.B. die Nullhypothese auf dem 10 % Signifikanzniveau abzulehnen, so wird man sie im in Abbildung 3.6 gezeigten Beispiel getrost ablehnen. Die Ablehnung der Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  bestärkt die Annahme, daß die Hypothese  $\mathfrak{H}$  richtig ist.

### 3.2.7.5 Die Eichfehler und ihre Fortpflanzung zum Fehler der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten

Hat man die Hypothese eines proportionalen Verhaltens der Meßbrücke akzeptiert, so berechnet sich der Fehler  $\Delta\left(\frac{1}{C_0}\right)$  des Proportionalitätsfaktors  $\frac{1}{C_0}$  aus der Fehlerfortpflanzung der Fehler der Eingangsgrößen  $|\varepsilon|_n$  und  $C_n$ . Für die numerische Berechnung des Fehlers des angepaßten Parameters  $\frac{1}{C_0}$  setzt man die bereits nach den Relationen (3.27) und (3.28) berechneten Ableitungen in die Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel ein:

$$\Delta\left(\frac{1}{C_0}\right) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial |\varepsilon|_n} \Delta|\varepsilon|_n\right)^2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \frac{1}{C_0}}{\partial C_n} \Delta^R C_n\right)^2}. \quad (3.33)$$

Mit der vom Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{C_0}$  unabhängigen Wichtung (3.29) berechnet sich der Fehler des Proportionalitätsfaktors zu:

$$\Delta\left(\frac{1}{C_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{(C_n)^2}{(\Delta^W |\varepsilon|_n)^2}}}. \quad (3.34)$$

Beachtet man, daß im in Abbildung 3.6 angegebenen Beispiel die Fehlerbalken für die Eichfehler  $\Delta|\varepsilon|$  erkennbar sind, während die Schwankungen der Meßwerte  $\Delta^R C$  nicht in der Grafik erkennbar sind, so ist die Näherung mit der vom Proportionalitätsfaktor  $\frac{1}{C_0}$  unabhängigen Wichtung nach Gleichung (3.30) mit ihrer Fehlerformel (3.34) zumindest im Meßfrequenzbereich  $f \approx 250$  kHz gültig. Im Skript `caldev.gmt` ist allerdings die allgemeine Formel implementiert, so daß auch getrost größere Schwankungen  $\Delta^R C$ , z.B. bei niedrigen Frequenzen  $f$  behandelt werden können.

Die vorgenommene proportionale Anpassung einer Eichkurve berücksichtigt mittlere Fehler des linearen Verhaltens, die wegen der Mittelung entsprechend klein sind. Bei der Einzelmessung tritt die Variabilität des einzelnen Meßwertes hinzu, die über den Meßbereich variieren kann. Ein Maß für die Variabilität ist die Abweichung vom Standard, die geschätzt werden muß, um evtl. statistisches Rauschen von Hand zu glätten. Abbildung 3.6 zeigt ein Beispiel mit hinreichend glatten Kurven, so daß sie in ihrer ursprünglichen Form belassen werden. Die größten Abweichungen nimmt man als Richtschnur und zu kleine Abweichungen korrigiert man als Ausreißer zu höheren Werten hin. Die Schätzung der Kovarianz von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl ist problematisch. Wählt man dagegen zur Schätzung Betrag

und Phase, so sind diese unabhängig und haben damit verschwindende Kovarianz. Auch für die verwendete Meßbrücke sind Impedanzbetrag und Impedanzphase unabhängige Größen, denn während für die aus Impedanzbetrag und Impedanzphase abgeleiteten Größen nach Spezifikation [HPLCR, 1994, Seite 9-5 & 9-6] abhängig vom Meßwert Korrekturen angegeben werden, sind die Fehler von Impedanzbetrag und Impedanzphase direkt anzuwenden. Die Varianz für den Betrag der relativen Dielektrizitätskonstanten berechnet sich aus quadratischer Addition der Abweichung vom Standard und des fortgepflanzten statistischen Fehlers. Aus den Meßdaten berechnet sich der Real- ( $\text{Re}(\varepsilon_m^*) = \frac{C}{C_0}$ ) und Imaginärteil ( $\text{Im}(\varepsilon_m^*) = -\frac{G}{\omega C_0}$ ) der relativen Dielektrizitätskonstanten nach Gleichung (2.27). Die Varianzen für Betrag  $|C^*| = |\varepsilon_m^*| C_0 = \sqrt{C^2 + (G/\omega)^2}$  und Phasenwinkel  $\arg C^* = \arg \varepsilon_m^* = -\arctan \frac{G}{\omega C}$  der komplexwertigen Kapazität  $C^*$  bzw. der effektiven gemessenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  sind:

$$\mathfrak{e}_{|C^*||C^*|} = \left( \sqrt{C^2 + \left(\frac{G}{\omega}\right)^2} - |\varepsilon| \right)^2 + (\Delta^R C)^2 + \left(\frac{\Delta^R G}{\omega}\right)^2 \quad (3.35)$$

$$\mathfrak{e}_{\arg C^* \arg C^*} = \left( \arctan \frac{G}{\omega C} \right)^2 + \frac{G^2 (\Delta^R C)^2 + C^2 (\Delta^R G)^2}{\omega^2 (C^2 + (\frac{G}{\omega})^2)} \quad (3.36)$$

Gemeinsam mit der Kovarianz  $\mathfrak{e}_{\frac{1}{C_0} \frac{1}{C_0}} = (\Delta \frac{1}{C_0})^2$  des Proportionalitätsfaktors  $\frac{1}{C_0}$  der Eichung bilden diese Größen eine diagonale Kovarianzmatrix:

$$\mathfrak{V}_{(|C^*|, \arg C^*, \frac{1}{C_0})} = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_{|C^*||C^*|} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{e}_{\arg C^* \arg C^*} & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{e}_{\frac{1}{C_0} \frac{1}{C_0}} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Den Fehler der Komponenten der effektiven gemessenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  bestimmt man aus der Fortpflanzung der Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(|C^*|, \arg C^*, \frac{1}{C_0})}$  mit der Jacobimatrix

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{(\text{Re}(\varepsilon_m^*), \text{Im}(\varepsilon_m^*))}(|C^*|, \arg C^*, \frac{1}{C_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\cos \arg C^*}{C_0} & -\frac{|C^*| \sin \arg C^*}{C_0} & |C^*| \cos \arg C^* \\ \frac{\sin \arg C^*}{C_0} & \frac{|C^*| \cos \arg C^*}{C_0} & |C^*| \sin \arg C^* \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

der vektorwertigen Abbildung

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(\varepsilon_m^*) \\ \text{Im}(\varepsilon_m^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\varepsilon_m^*| \cos \arg \varepsilon_m^* \\ |\varepsilon_m^*| \sin \arg \varepsilon_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|C^*|}{C_0} \cos \arg C^* \\ \frac{|C^*|}{C_0} \sin \arg C^* \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

zur Kovarianzmatrix von Real- und Imaginärteil:

$$\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_m^*), \text{Im}(\varepsilon_m^*))} = \mathcal{J} \circ \mathfrak{V}_{(|C^*|, \arg C^*, \frac{1}{C_0})} \circ \tilde{\mathcal{J}}. \quad (3.40)$$

Die Auswertung des Matrizenprodukts ergibt für die Varianzen von Real- und Imaginärteil und ihre Kovarianz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_m^*)\text{Re}(\varepsilon_m^*)} &= \left( \frac{\cos \arg C^*}{C_0} \right)^2 \mathfrak{C}_{|C^*||C^*|} + |C^*|^2 \left( \frac{\sin \arg C^*}{C_0} \right)^2 \mathfrak{C}_{\arg C^* \arg C^*} + \\ &+ |C^*|^2 (\cos \arg C^*)^2 \mathfrak{C}_{\frac{1}{C_0} \frac{1}{C_0}}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{Im}(\varepsilon_m^*)\text{Im}(\varepsilon_m^*)} &= \left( \frac{\sin \arg C^*}{C_0} \right)^2 \mathfrak{C}_{|C^*||C^*|} + |C^*|^2 \left( \frac{\cos \arg C^*}{C_0} \right)^2 \mathfrak{C}_{\arg C^* \arg C^*} + \\ &+ |C^*|^2 (\sin \arg C^*)^2 \mathfrak{C}_{\frac{1}{C_0} \frac{1}{C_0}} \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_m^*)\text{Im}(\varepsilon_m^*)} &= \frac{\sin \arg C^* \cos \arg C^*}{(C_0)^2} \times \\ &\times \left( \mathfrak{C}_{|C^*||C^*|} - |C^*|^2 (\mathfrak{C}_{\arg C^* \arg C^*} - (C_0)^2 \mathfrak{C}_{\frac{1}{C_0} \frac{1}{C_0}}) \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Diese Relationen verwendet das Skript `caldev.gmt` (siehe Anhang B) bei der Erzeugung eines Auswerteskripts aus den linear zwischen den Eichpunkten interpolierten Eichdaten nach Abbildung 3.6. Das Eichskript erzeugt aus dem zu einem Datensatz in Abhängigkeit der Tiefe zusammengeführten Rohdatensatz mit gemessener Kapazität  $C$  und Leitwert  $G$  einen Datenstrom der mit der Tiefe indizierten Komponenten der effektiven gemessenen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$ . Die Fehlerabhängigkeiten sind als Varianzen und Kovarianz im Datenstrom enthalten. Der vom Eichskript ausgegebene Datenstrom wird vom Programm `depmeas.c` (Anhang B) mit den in diesem Kapitel behandelten Fehlern der Eingangsparameter entsprechend den Abschnitten 3.2.2 bis 3.2.5 behandelt. Die Fehler der Eingangsparameter: Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht  $\varepsilon_a$ , Elektrodenradius  $a$ , Eiskernradius  $b$  und Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi$  werden mit der Fehlerfortpflanzung nach Abschnitt 3.2.1 zu einem Gesamtfehler aufaddiert. Bei Angabe einer entsprechenden Kommandozeilenoption im Programm `depmeas.c` werden auch die Fehler der Oberflächenströme entsprechend Abschnitt 3.2.3 berücksichtigt. Mit den an dieser Stelle bereitgestellten Programmen kann im nun folgenden Kapitel die verwendete Meßbank beschrieben, ihre mechanischen Fehler explizit geschätzt und die Fortpflanzung anhand eines Meßbeispiels diskutiert werden. Die gemessenen Daten bilden die Grundlage für die in dieser Arbeit nur kurz gestreifte glaziologische Standardauswertung und die eingehend diskutierte Betrachtung von polarem Firn und Eis als Mischung aus Luft und Eispartikeln mit Hilfe von dielektrischen Mischungsmodellen.

# Kapitel 4

## Meßdurchführung, Ergebnisse und Diskussion

Die Durchführung der zerstörungs- und berührungsfreien Messungen am Eiskern erfolgt auf einer kombinierten Eiskernmeßbank zur Messung der Dichte und der dielektrischen Eigenschaften. Einer allgemeinen einführenden Vorstellung der Meßbank folgt in Abschnitt 4.1.2 die Vorstellung des Meßkondensators zur Messung der Komponenten der komplexwertigen Dielektrizitätskonstanten. Typisch nimmt die Präzision ausgehend von zwei Prozent für beide Komponenten im oberen Kernabschnitt mit in tieferen Kernbereichen zunehmend verdichtet gefundenem Firn und Eis auf besser als ein Prozent zu. Die Dichte wird mit einem in Abschnitt 4.1.3 beschriebenen  $\gamma$ -Densimeter mit einer absoluten Präzision von  $0.01 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  gemessen. Eine Verbesserung der Meßstatistik durch ein schnelleres Multimeter wird, wie in der Diskussion der Ergebnisse (Abschnitt 4.1.5) aufgezeigt, die absolute Präzision bei zukünftigen Messungen auf  $0.006 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  nahezu verdoppeln. Die damit für alle auf der Bank gemessenen Parameter erreichten Genauigkeiten von zwei bis zu besser als ein Prozent machen die Meßbank im Vergleich zur früher benutzten DEP-Meßbank mit mehreren Prozent Fehler zu einer Präzisionsmeßbank. Auch die in Abschnitt 4.1.4 mit der in dieser Arbeit entwickelten Theorie implementierte umfassendere Fehlerrechnung und Radienkorrektur für die früher benutzte DEP-Meßbank läßt wegen der meßtechnischen Grenzen der Bank keine wesentliche Fehlerreduktion zu.

Die auf der kombinierten Meßbank prozessierten Eiskerne bilden die in Abschnitt 4.2 kurz beschriebene Datenbasis für über die glaziologische Standardinterpretation hinausgehende Betrachtungen der dielektrischen Eigenschaften polarer Eiskerne. Unter der glaziologischen Standardinterpretation hochfrequenter dielektrischer und Dichtemessungen versteht man die Datierung der Eiskerne mit anschließender Akkumulationsbestimmung, die nicht zentraler Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist, aber über Literaturverweise zum hier bearbeiteten Kernmaterial im angegebenen Abschnitt dokumentiert ist.

Über die Standardinterpretationen hinaus erlaubt die Messung mehrerer Parameter an einem Kern z.B. die eingehende Studie der dielektrischen Eigenschaften polaren Firns und Eises als Mischung der zwei Phasen Luft und Eis in einem durch die Dichte charakterisierten Volumenverhältnis. Die in Millimetergenauigkeit konsistent für beide Meßmethoden reproduzierte Positionierung des Eiskerns auf der

vorgestellten Bank verbessert die Datengrundlage für solche Studien. Bei angenommenem Mischungsmodell berechnet man z.B. die dielektrischen Eigenschaften der Eisphase aus den dielektrischen Eigenschaften der Mischung und der Dichte. Ist umgekehrt die Dichte nicht bekannt, so kann das angenommene Mischungsmodell mit dem Realteil der Dielektrizitätskonstanten als weitere Annahme zur Implementation eines hochpräzisen elektrischen Densimeters mit gleichzeitiger Bestimmung der Leitfähigkeit in der Eisphase (Abschnitt 4.3.4) verwendet werden. Nach der Vorstellung eines ersten vielversprechenden Meßbeispiels für niederfrequente Messungen in Abschnitt 4.4 ist die Brauchbarkeit der abgeleiteten Theorie in der Meßanwendung zu diskutieren (Abschnitt 4.5).

## 4.1 Kombinierte Kernmeßbank für Meßkondensator und $\gamma$ -Densimeter

In den Kapiteln 2 und 3 der vorliegenden Arbeit wurde die strikt quantitative Behandlung der neuen Apparatur zur Messung dielektrischer Eigenschaften bereits behandelt, und hier soll nur kurz die technische Realisierbarkeit einer auf der entwickelten Theorie beruhenden Meßapparatur vorgestellt werden. Ansätze am geschnittenen Kern [Moore, 1993] wurden bewußt nicht weiter verfolgt, da die einfache Anwendbarkeit unmittelbar nach der Bohrung und der für zerstörungsfreie Meßmethoden leichter gewährte Zugang zu Kernmaterial Vorteile bei der Eiskernanalyse gegenüber invasiven Methoden sind. Zur Einsparung von Feldlaborplatz wie Personal und um den Vergleich von Dichte und dielektrischen Eigenschaften auf einer konsistenten Tiefenskala zu studieren, wurde die in Abbildung 4.1 skizzierte Kernmeßbank gebaut, die die Anwendung des Meßkondensators und des  $\gamma$ -Densimeters auf einer Meßbank vereinigt.

### 4.1.1 Mechanische Ausführung und Meßdatenerfassung

Die Verwendung des Systems *Flexible Automation* der Firma *Bosch* vereinfachte die mechanische Ausführung der Meßbank. Als Grundeinheiten wurden 700 mm lange Rahmen aus Profilschienen gebaut, die in den Standardpackkisten der Firma *Zarges* mit einem Außenmaß von  $80 \times 60 \times 40 \text{ cm}^3$  transportiert werden können. Die Linearführung zum Transport des Schlittens mit der Eiskernaufhängung ist Zubehör im Programm *Flexible Automation*. Frühere Apparaturen [Wilhelms, 1996] verwenden einen Zahnriemenantrieb. Bei der hier beschriebenen Apparatur wurde ein direkter Antrieb über am Meßschlitten befestigte Zahnstangen mit einem Zahnrad (Firma *Güdel*) auf der Welle eines Schrittmotors (Firma *Physical Instruments (PI)*) gewählt. Dieser problemlos unter Feld- und Laborbedingungen funktionierende Antrieb erlaubt eine kontinuierlich fortlaufende Messung der Eiskerne ohne Meßschlittenrücklauf. Die mechanische Justierung ist wesentlich einfacher als beim Zahnriemenantrieb, und der um mehr als eine Größenordnung höhere thermische Längenausdehnungskoeffizient des Zahnriemengummis im Vergleich zum Aluminiumrahmen der Bank reduziert sich für den Stahlzahntrieb auf die gleiche Größen-

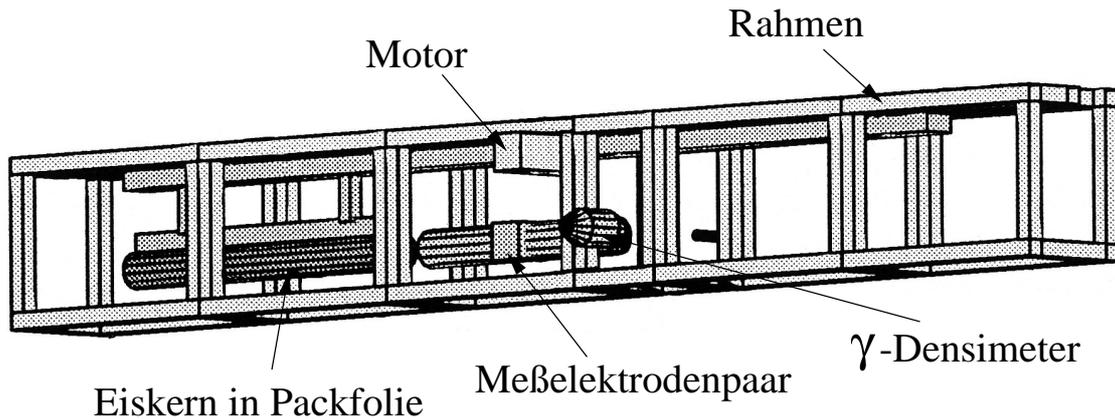


Abbildung 4.1: Prinzip der Meßbank

Der prinzipielle Aufbau der zerlegbaren Feldmeßbank ist gezeigt. Der Rahmen der Meßbank ist aus Profilschienengrundelementen zusammengeschraubt. Im Rahmen ist oben in der Mitte eine Linearführungsschiene angebracht. Die Eiskernprobe wird in Packfolie verpackt entlang der Linearführung an einem vom Schrittmotor angetriebenen Schlitten hängend an den Meßfühlern vorbeigeführt. Die in dieser Arbeit beschriebene Bank verfügt über einen aus dem Meßelektrodenpaar gebildeten Kondensator zur Messung der dielektrischen Eigenschaften sowie über ein  $\gamma$ -Densimeter. Der modulare Aufbau der Bank erlaubt noch weitere Meßfühler hinzuzufügen, sofern sie durch die Packfolie nicht zu stark beeinträchtigt werden.

ordnung wie für den Aluminiumrahmen [Lipsmeier und Teml, 1993, Tab. 4.4 & 2.4]. Selbst bei einer Temperatur von  $-30\text{ °C}$  traten keine mechanischen Probleme auf.

Eine Auslegung der Bank mit bewegtem  $\gamma$ -Densimeter schien nicht sinnvoll, insbesondere da zusätzliche in Abbildung 4.7 gekennzeichnete Bleiabschirmplatten zur Verfügung stehen. Eine Bank mit verfahrbarem etwa 100 kg schwerem  $\gamma$ -Densimeter erfordert eine wesentlich stärkere Auslegung der Linearführungskomponenten und des Motors. Die hier beschriebene Bank ist auf die Messung von relativ kurzen, 1 m langen geschnittenen Kernabschnitten ausgelegt, so daß die Verlängerung der Bank um eine Kernlänge im Vergleich zu einer Meßbank mit stationärem Kern unproblematisch ist. Beim Einsatz im Rahmen einer Tiefbohrung mit 2 m bis zu 4 m langen Kernen ist eine Bank mit bewegten Meßfühlern in Betracht zu ziehen, da der höhere Aufwand beim Aufbau der Meßbank durch eingesparten Laborplatz überkompensiert wird.

#### 4.1.1.1 Eiskernführung in Packfolie und Auswirkung auf die Messungen

Die von allen Seiten erforderte Zugänglichkeit des Kerns für die DEP Messung war bei früheren DEP-Apparaturen mit vollständig automatisierter Kernmessung technisch durch Beschaltung einer halbschalenförmigen Kernablage als Gegenelektrode gelöst worden. Die Vermeidung von Streukapazitäten durch Kabeldeformation [Wilhelms et al., 1998] oder im Schaltkreis eingebaute Relais [Moore und Paren, 1987]

war eine weitere technische Zielsetzung bei der Dimensionierung der hier vorgestellten Apparatur. Dies erfordert analog zum  $\gamma$ -Densimeter einen fest eingebauten Meßkondensator<sup>1</sup>. Eine technische Lösung für einen von praktisch allen Seiten für berührungsfreie Meßmethoden zugänglichen bewegbaren Eiskern ist die Verpackung in dünner Packfolie und Aufhängung an einem bewegten Schlitten. Das Prinzip der Eiskernverpackung ist in Abbildung 4.2 und der Packvorgang in Abbildung 4.3 gezeigt. Der um mehr als eine Größenordnung kleinere Einfluß der Packfolie auf die Messung der dielektrischen Eigenschaften im Vergleich zu anderen Fehlerquellen ist in Abschnitt 3.2.6 ausführlich diskutiert. Auch auf die Dichtemessung mittels  $\gamma$ -Streuung ist der Einfluß einer  $2 \times 20 \mu\text{m}$  dicken Polyäthylenfolie bezogen auf 100 mm Durchstrahlungslänge im Eiskern vernachlässigbar. Der relative Schichtdickenanteil von  $\approx 0.4 \text{ ‰}$  begrenzt den Fehler der durchstrahlten Dicke auf weniger als  $2 \text{ ‰}$ , da für die verwendete Strahlung der Compton-Effekt dominierend ist [Wilhelms, 1996, Abschn. 3.1.4.3]. Die Schwächung von Strahlung durch den Compton-Effekt ist proportional der Anzahl der Elektronen in einem Volumen. Nach Jaeger und Hübner [1974, Tab. 6–8] haben Polyäthylen und Wasser nur um wenige Prozent verschiedene Elektronenzahlen pro Masse. Wegen der höchstens um einen Faktor vier niedrigeren Dichte von Firn als Polyäthylen schätzt man die Polyäthylenschichtdicke zu maximal  $\approx 2 \text{ ‰}$  der Eiskernschichtdicke, was aber im Vergleich zum relativen Fehler der Durchmesser messung von  $5 \text{ ‰}$  Fehler praktisch vernachlässigbar ist.

#### 4.1.1.2 Meßdatenerfassungssystem

Das Meßdatenerfassungssystem ist ähnlich dem der “GRIP-Meßbank” [Wilhelms, 1996, Abschn. 1.3] und der AWI-DEP-Apparatur [Wilhelms, 1996, Abschn. 2.2.3.2]. Es ist in der Programmiersprache C [Kernighan und Ritchie, 1990] implementiert und verwendet die NI-488.2<sup>TM</sup> Bibliothek zur Ansteuerung der dem IEEE 488.2 Standard folgenden AT-GPIB/TNT-Schnittstellenkarte<sup>2</sup> der Firma National Instruments<sup>®</sup> unter DOS [GPIB, 1995; GPIB, 1996a; GPIB, 1996b]. Die Ansteuerung des Schrittmotors [PI, 1987] erfolgt in einer geräteeigenen Programmiersprache [PI, 1988] über die GPIB Schnittstelle. Die Meßbrücken zur Vermessung des Meßkondensators steuert man ebenfalls in einer gerätespezifischen Sprache [HPLCR, 1994; HPLCR, 1996] über die GPIB Schnittstelle. Zunächst wurde zur Erfassung der vom  $\gamma$ -Densimeter übergebenen strahlungsintensitäts- bzw. detektortemperaturproportionalen Spannungswerte das Keithley Digital Multimeter 199 [Keithley, 1988] über die GPIB Schnittstelle betrieben. Die Ersetzung des Multimeters durch ein modernes HP34970A Multimeter [HPDMM, 1997] der Firma Hewlett Packard beschleunigt die Meßdatenerfassung merklich und wird die Genauigkeit zukünftiger Messungen merklich verbessern.

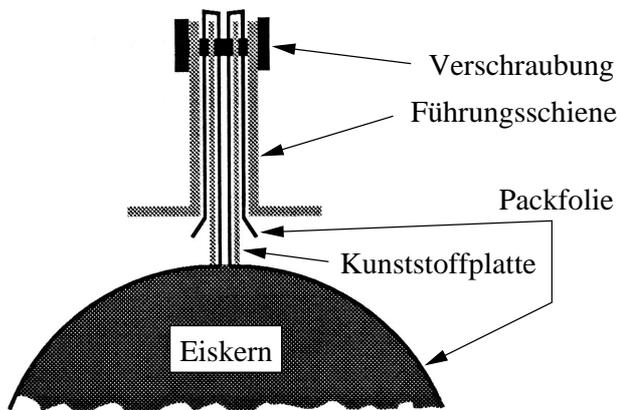
Zur Meßdurchführung wird der in Folie verpackte Eiskern unter den Schlitten gehängt und die Höhe der Kernmitte mit den Rändelschrauben der Aufhängung auf die Mitte des Meßkondensators justiert. Nach der Durchmesser messung mit einem

---

<sup>1</sup>Man kann auch die Meßbrücke synchron mit den Elektroden bewegen, dies war aber im engen Zeitrahmen beim Bau der Bank nicht durchführbar. Bei Bewegung der Meßbrücke in der Apparatur ergibt sich zwangsläufig eine weniger kompakte Dimensionierung und erfordert eine solidere mechanische Auslegung.

<sup>2</sup>GPIB ist eine Abkürzung für (*engl.*) General Purpose Interface Bus.

Abbildung 4.2: Packprinzip für Eiskerne



Der Eiskern wird mit einer  $\approx 17 \mu\text{m}$  starken Polyäthylenpackfolie einfach umschlagen. Die offenen Enden legt man mit leichtem Spiel zwischen zwei  $\approx 0.8 \text{ mm}$  starke glasfaserverstärkte Kunststoffplatten. Die außen um die Kunststoffplatten geführte Polyäthylenfolie klemmt man zwischen zwei L-Profile zur Erhöhung der Längsstabilität. Die straffe Spannung der Folie und damit gerade Führung des Eiskerns entlang der Kunststoffplatte erzielt man durch Anziehen der am Ende des Packvorgangs durch Vorbohrungen eingesetzten Verschraubung.



© Hans Oerter, Februar 1998

Abbildung 4.3: Einpacken eines Eiskerns im Feldeislabor

Das Photo zeigt das Verpacken eines Eiskerns in  $\approx 17 \mu\text{m}$  dicke Polyäthylenfolie im in den Schnee gegrabenen Feldeislabor. Die Klemmleisten klemmen die Folie locker, und auf die herausschauenden Klemmschrauben werden Muttern aufgesetzt. Beim Anziehen der Muttern wird der Eiskern fest in der Folie vorgespannt. Er folgt dann dem im Rahmen hängenden Eiskern unmittelbar an einem Schlitten aufgehängt. Im Hintergrund teilweise verdeckt sind die Kisten mit der Meßdatenerfassungselektronik zu erkennen.

Tabelle 4.1: Kenngrößen der Meßbank mit 100 mm Nenndurchmesser  
 Die Abmessungen der Elektroden mit 110 mm bzw. 80 mm Nenndurchmesser sind den Eichausdrucken zu entnehmen. Bei Bearbeitung entsprechender groß- bzw. kleindiameterischer Kerne wurde ebenfalls jeweils ein Fehler von 1 mm für den Kerndurchmesser angenommen.

| Kenngrößen des Kondensators mit 100 mm Nenndurchmesser |   |                       |           |
|--|---|-----------------------|-----------|
| Größe  | Symbol  | Wert                  | Fehler    |
| effektive Dielektrizitätskonstante                     | $\varepsilon_m^*$   | siehe Abschnitt 3.2.7 |           |
| Oberflächenströme                                      | $\frac{I_S}{I_B}$   | siehe Abschnitt 3.2.3 |           |
| Elektroden Durchmesser                                 | $2a$  | 100.8 mm              | 0.2 mm    |
| Eiskerndurchmesser                                     | $2b$  | $\approx 98$ mm       | 1.0 mm    |
| Meßelektrodenbegrenzungswinkel                         | $\xi$   | $\frac{\pi}{5}$ rad   | 0.015 rad |
| Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht            | $\varepsilon_a$   | •                     | •         |
| Realteil   | $\text{Re}(\varepsilon_a)$  | 1                     | 0         |
| Imaginärteil   | $\text{Im}(\varepsilon_a)$  | 0                     | 0         |
| Kovarianz  | $\mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_a)\text{Im}(\varepsilon_a)}$ | •                     | 0         |

Meßschieber und der Niederschrift von Absplitterungen und Brüchen im Protokoll zur während der Auswertung vorgenommenen Markierung unverlässlicher Kerntiefenbereiche wird der Schlitten mit dem Eiskern mittels des Schrittmotors bewegt und zur im folgenden beschriebenen Durchführung der Messungen mit dem Meßkondensator bzw. dem  $\gamma$ -Densimeter jeweils an der Meßposition angehalten.

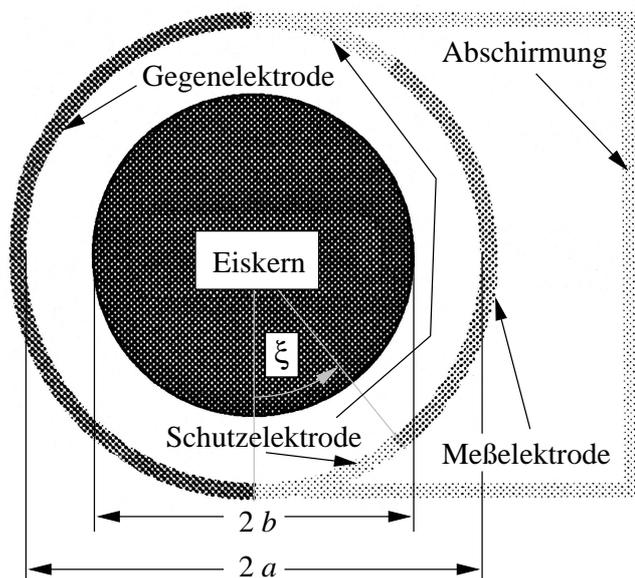
#### 4.1.2 Meßkondensator

Bei der technischen Umsetzung ist dem den theoretischen Betrachtungen in Kapitel 2 und 3 entsprechenden Kondensator noch eine Abschirmung zur Elimination der Kapazität im Außenraum hinzuzufügen. Abbildung 4.4 illustriert den prinzipiellen Aufbau der in Abbildung 4.5 in ihrer mechanischen Ausführung gezeigten Abschirmung.

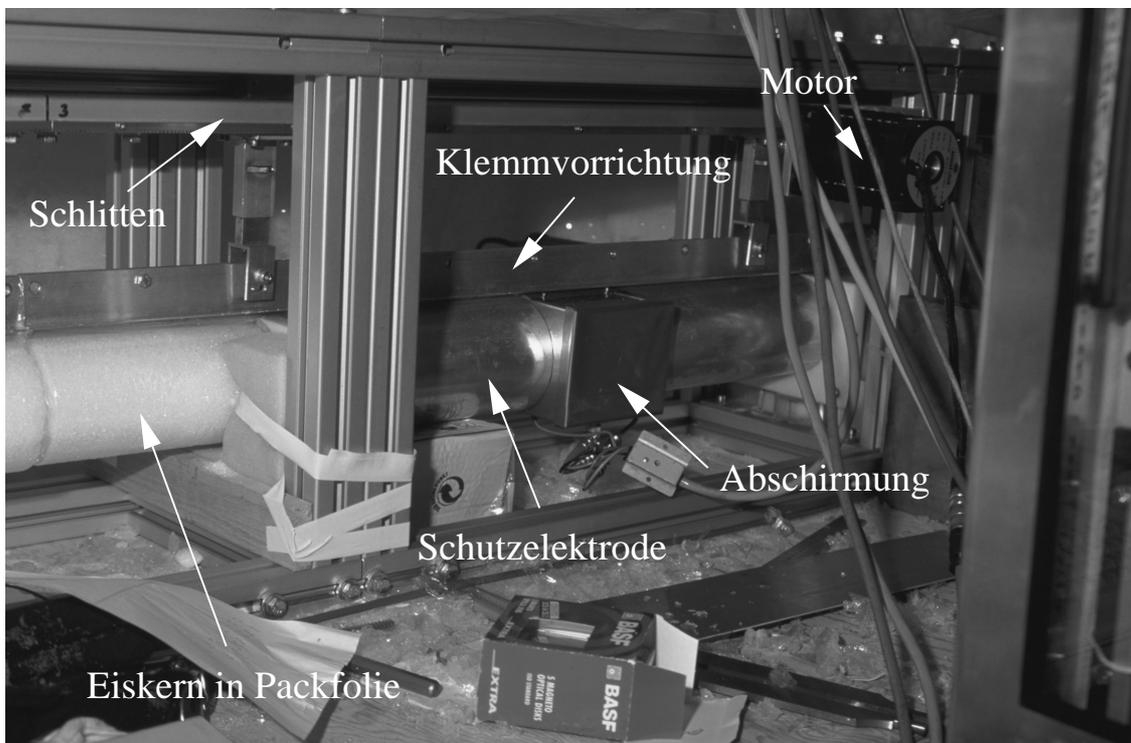
Der Auswertegang der Messungen wurde in Abschnitt 3.1.3 bereits beschrieben. Für die Durchführung einer Fehlerrechnung nach Abschnitt 3.2 benötigt man neben den bereits in Abschnitt 3.1.4 angegebenen partiellen Ableitungen der Dielektrizitätskonstanten des Eiskerns nach den Apparaturparametern  $\partial\varepsilon_i^x/\partial w$  die im folgenden kurz diskutierten und in Tabelle 4.1 aufgelisteten Fehler dieser Apparaturparameter.

Die Eichung nach Abschnitt 3.2.7 berechnet die effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  mit ihren Kovarianzen. Die Varianzen und Kovarianzen berechnen sich entsprechend der Fehlerfortpflanzung nach Abschnitt 3.2.1 aus den dem Kopf der Eichgrafik (Beispiel in Abbildung 3.6 auf Seite 78) entnommenen Fehlern. Die Fehler

Abbildung 4.4: Schnitt durch den Meßkondensator



Der gezeigte Schnitt ruht in einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse in Höhe der Meßelektrode. Der Luftspalt zwischen Eiskern und Elektrode ist nicht maßstabsgetreu. Aufhängung und Packfolie sind nicht eingezeichnet. Die Meßelektrode ist in einer Schutzelektrode gefaßt. Ein Beitrag der Kapazität zwischen Meß- und Gegenelektrode im Außenraum wird durch die unmittelbar an die Schutzelektrode angeschlossene Abschirmung verhindert. Der Elektrodendurchmesser  $2a$ , der Eiskerndurchmesser  $2b$  und der Meßelektrodenbegrenzungswinkel  $\xi$  sind eingetragen.



© Hans Oerter, Februar 1998

Abbildung 4.5: Meßelektrodenpaar im Einbaurahmen

für die Geometrie des Meßkondensators sind aus dem Kopf des Eichausdrucks (Abbildung 3.6) unmittelbar in Tabelle 4.1 übertragen. Der Durchmesser des Eiskerns  $2b$  wurde über nach Augenmaß geschätzte Intervalle gleichen Durchmessers  $2b$  mit einem Meßschieber gemessen, so daß für eine unter Zeitdruck durchgeführte Routinemessung ein Fehler von 0.5 mm zu veranschlagen ist. Da in die Kernmeßbank noch keine Kernpositionierung eingebaut ist, werden zu dem Durchmessermeßfehler noch weitere 0.5 mm Kernpositionierungsfehler hinzugenommen, so daß sich ein Gesamtfehler für den Kerndurchmesser von  $\Delta 2b = 1$  mm ergibt. Die hier angegebenen Fehler wurden ebenfalls bereits bei der allgemeinen Diskussion der Radienfehler in Abschnitt 3.2.4 behandelt. Die eben zusammengetragenen Fehler sind Eingangsgrößen für die weitere Auswertung mit dem Programm `depmeas.c`. Bei allen in der vorliegenden Arbeit behandelten Messungen wurden bei den Fehlern Beiträge zu den Oberflächenströmen nach Abschnitt 3.2.3 berücksichtigt.

### 4.1.3 $\gamma$ -Densimeter

Der Einsatz von  $\gamma$ -Strahlen ist ein bewährtes Verfahren zur Dichtemessung von Materialien [Fortescue et al., 1994]. Zahlreiche technische Anwendungen sind beschrieben [Löffel, 1979; Spindler et al., 1988; Löffel, 1989; Smith und Whiffin, 1952; Harris und Megill, 1953; Fritz und Löffel, 1990]. Geophysikalische Anwendungen an kristallinem Gestein [Bücker et al., 1990] und Eis [Bunker und Bradley, 1961] sind in der Literatur ebenfalls zu finden.

Messungen mit dem  $\gamma$ -Densimeter der Firma *Löffel* sind eine Standardmeßmethode auf der "GRIP"-Meßbank [Minikin und Kipfstuhl, 1992; Gerland et al., 1994; Gerland et al., 1996; Gerland et al., 1999]. Eine ausführliche Beschreibung mit Fehlerrechnung und Ableitung der Grundlagen findet man in Wilhelms [1996]. Ein in den wesentlichen Komponenten baugleiches  $\gamma$ -Densimeter mit einer Aktivität der  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle von  $0.7 \text{ Ci} = 26 \text{ GBq}$  (Referenzjahr 1990) war beim Aufbau der Meßbank von einer nicht mehr weiter betriebenen Sedimentkernanalysebank [Gerland, 1993; Gerland und Villinger, 1995] vorhanden. Die um etwa einen Faktor 4 geringere Aktivität als die  $3 \text{ Ci} = 111 \text{ GBq}$  (Referenzjahr 1991) der  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle auf der "GRIP"-Meßbank [Wilhelms, 1996] stellt keine prinzipielle technische Begrenzung dar, da man zur Erzielung vergleichbarer Fehler viermal solange messen kann, oder bei gleicher Meßzeit nach dem  $\sqrt{N}$ -Gesetz nur einen doppelt so großen Fehler hinnehmen muß. Abbildung 4.6 zeigt das stark vereinfachte Prinzip des  $\gamma$ -Densimeters. Abbildung 4.7 ist eine während des Betriebs in der Meßbank aufgenommene Photographie des Densimeters.

#### 4.1.3.1 Strahlenschutzmaßnahmen

Die  $\gamma$ -Strahlungsquelle wurde möglichst weit entfernt vom Arbeitsplatz des Bedieners am Anfang (in Abbildung 4.1 auf Höhe des Eiskerns) der Meßbank unmittelbar vor dem Kernentnahmebereich positioniert. Eine zusätzlich um die  $\gamma$ -Quelle angebrachte Bleiabschirmung (siehe Abbildung 4.7) und nur kurze Aufenthaltszeiten neben dem  $\gamma$ -Densimeter zum Entladen des Kerns tragen den Grundregeln des

Strahlenschutzes [Vogt und Schultz, 1992, Abschn. 9.1] Rechnung. Dosisleistungsmessungen im Feldlabor ergaben an allen ständigen Arbeitsplätzen, die wenigstens 2.5 m von der Quelle entfernt gehalten wurden, keine signifikante Erhöhung über die natürliche Ortsdosisleistung hinaus. Selbst unmittelbar an der Bleiabschirmung war die gemessene Ortsdosisleistung weniger als eine Größenordnung über die natürliche Ortsdosisleistung hinaus erhöht. Die Bank wurde im Feldlabor an der Schneewand positioniert, so daß niemand in den Strahl treten konnte. Der Meßbereich und rückwärtige Bankbereich in Strahlrichtung ist bei geöffnetem Strahler Kontroll- oder sogar Sperrbereich im Sinne der Strahlenschutzverordnung (StrlSchV) [Veith, 1993]! Dies ist bei der Positionierung der Bank im Labor zu berücksichtigen. Insbesondere wenn die Strahlrichtung in die Wand zu benachbarten Räumen gerichtet ist.

#### 4.1.3.2 Auswertung und Fehlerrechnung

Der Auswertegang folgt im wesentlichen dem in Wilhelms [1996, Abschn. 4.3.3] beschriebenen. Abweichend vom in Wilhelms [1996] beschriebenen Vorgehen wird bei den hier vorgenommenen Messungen der Tiefpaß [Tietze und Schenk, 1991] (*engl.* Lowpassfilter) zur Glättung des Signals statt auf 1 s auf die kürzest vorwählbare Zeitkonstante von 0.01 s eingestellt und mit einem Voltmeter in im Vergleich zur Zeitkonstanten großen Zeitabständen 5 Meßwerte genommen. Zur Auswertung wird der Mittelwert der Intensität  $I_{\mathfrak{d}}$  nach durchstrahlter Länge im Eis  $\mathfrak{d}$  und der Fehler des Mittelwerts  $\Delta^R I_{\mathfrak{d}}$  aus den 5 Messungen gespeichert<sup>3</sup>. Gegenüber der Messung eines Meßwertes mit einer analogen Mittelung über eine lange Zeitkonstante auf der "GRIP"-Meßbank hat diese Verfahrensweise den Vorteil, daß neben dem Mittelwert auch die statistische Schwankung bestimmt wird und keine Beeinflussung der Messung durch die unmittelbar vorher gemessene Meßposition durch zu lange Abklingzeiten des Filters stattfindet.

Die Intensitäten der Luftmessung werden auf die gleiche Weise täglich vor und nach den Eiskernmessungen aus 101 Meßwerten bestimmt. Bei den in dieser Arbeit vorgestellten Eiskernmessungen stimmen die Mittelwerte der Luftmessungen vor und nach der Eiskernmessung innerhalb von zwei Standardabweichungen der Mittelwerte, die in der Größenordnung der systematischen Verstärkungsdrift der Elektronik über 24 Stunden  $\frac{\Delta^S I}{I} = 2 \text{ ‰}$  nach Spezifikation [Löffel, 1989] liegen, überein. Deshalb kann die Intensität der Luftmessung  $I_0$  getrost als gewichteter Mittelwert der Meßreihe vor und nach der Messung mit entsprechend berechnetem Fehler  $\Delta^R I_0$  angesetzt werden. Sollte bei zukünftigen Messungen eine größere Diskrepanz der Intensitäten der Luftmessung vor und nach den Eiskernmessungen auftreten, so ist eine mögliche Ursache die Schwankung der bei jeder Messung routinemäßig erfaßten Detektortemperatur. Falls dann eine Korrektur der Intensitätsschwankungen über die Detektortemperatur nicht möglich ist, so sind häufiger Luftmessungen vorzunehmen.

Die Dichtebestimmung folgt dem Lambert-Beerschen-Gesetz, das eine exponentielle Schwächung der Ausgangsintensität  $I_0$  eines  $\gamma$ -Strahls mit der durchstrahlten Länge

---

<sup>3</sup>Der Schätzwert des Erwartungswertes ist nach Abschnitt 3.2.1 gerade der Mittelwert und der Fehler des Mittelwerts ist die durch die Wurzel der Anzahl der Messungen geteilte Quadratwurzel der empirischen Kovarianz [Barlow, 1989, Abschn. 4.2.1].

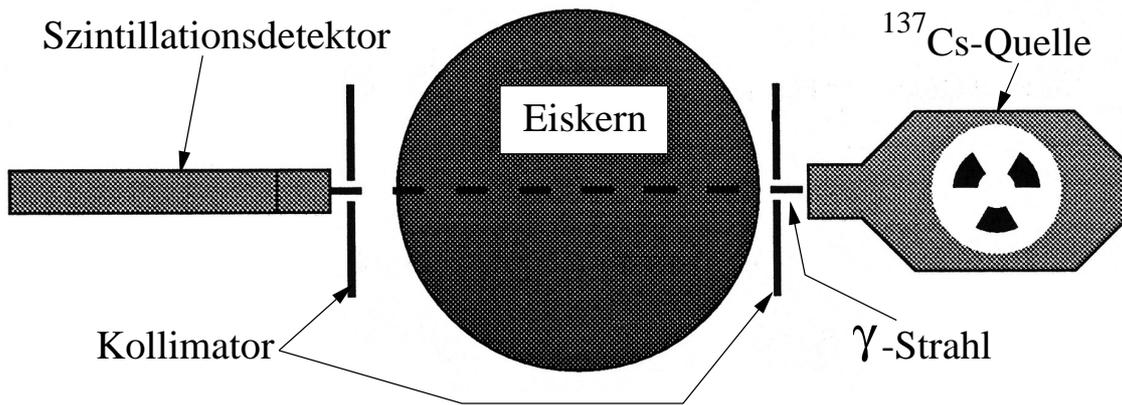
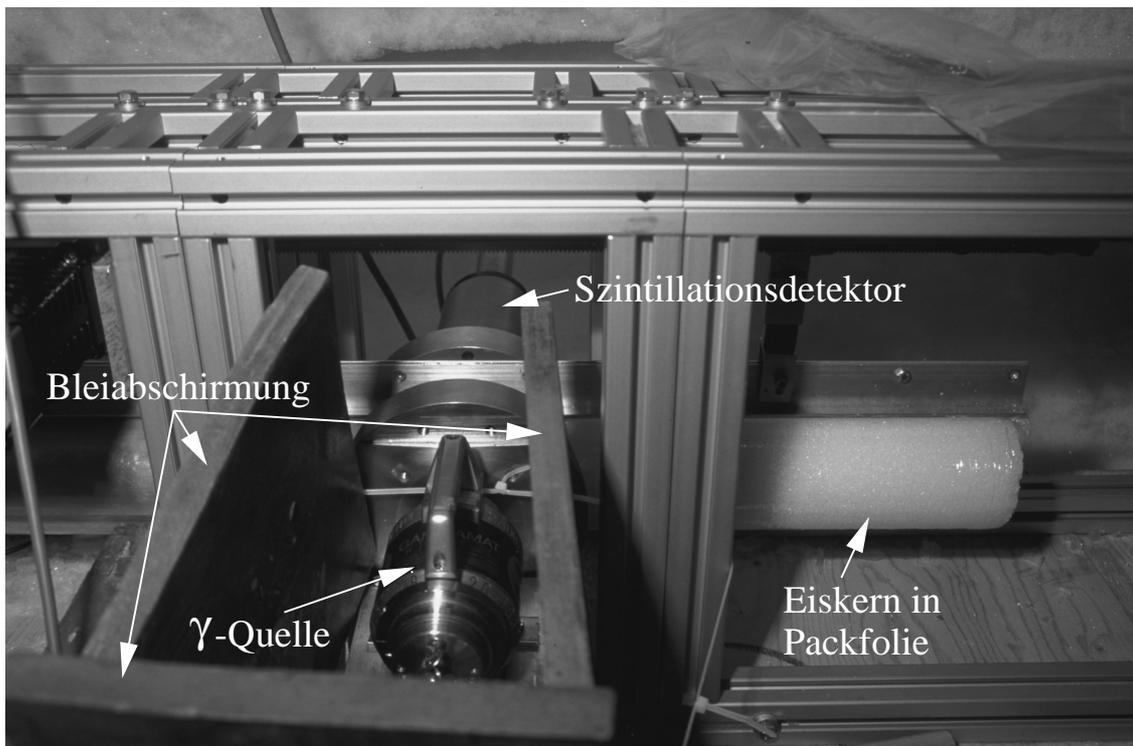


Abbildung 4.6: Prinzip des  $\gamma$ -Densimeters

Das  $\gamma$ -Densimeter besteht aus einem radioaktiven Strahler und einem Szintillationsdetektor. Der radioaktive Strahler ist ein Transportbehälter mit einem  $^{137}\text{Cs}$ -Präparat. Der Szintillationsdetektor ist ein Plastiksintillator mit einer Photomultiplieröhre. Im Strahlengang befinden sich zur Bündelung des Strahls Bleikollimatoren. Das Meßprinzip folgt der Anwendung des Lambert-Beerschen Gesetzes. Die in der Zeichnung nicht näher ange-deutete Strahlabschwächung durch den Eiskern wird im Vergleich zu einer Luftmessung betrachtet.



© Hans Oerter, Februar 1998

Abbildung 4.7:  $\gamma$ -Densimeter

Als  $\gamma$ -Quelle dient ein  $^{137}\text{Cs}$ -Präparat in einem Bauart geprüften Typ B(U) Abschirmbehälter Gammamat TI-F der Firma *Isotopentechnik Dr. Sauerwein*. Der aus einem Plastiksintillator mit nachgeschaltetem Photomultiplier aufgebaute Szintillationsdetektor befindet sich in einer wasserdichten Ummantelung.

im Material  $\mathfrak{d}$  auf eine Intensität  $I_{\mathfrak{d}}$  beschreibt:

$$\rho_{\gamma} = -\frac{1}{\alpha \mathfrak{d}} \ln \frac{I_{\mathfrak{d}}}{I_0}. \quad (4.1)$$

Die angegebene Form berücksichtigt die in dieser Arbeit verwendeten Größen und faßt die Streueigenschaften des Wassermoleküls im sogenannten Massenabsorptionskoeffizienten  $\alpha = 0.085645 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  mit einem relativen Fehler  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 1 \text{ ‰}$  [Wilhelms, 1996, Gln. (3.5) & (3.10)] zusammen.

Der Durchmesser des Eiskerns  $2b$  wurde, wie im vorangegangenen Abschnitt 4.1.2 beschrieben, mit einem Meßschieber gemessen und ein Meßfehler von  $\Delta 2b = 0.5 \text{ mm}$  angenommen. Da der Kern bezogen auf den Meßkondensator justiert wird, berücksichtigt die großzügige Schätzung der Strahlablage zu  $\eta = 5 \text{ mm}$  die geschätzte Ablage der Referenzmitten vom Meßkondensator zum  $\gamma$ -Densimeter. Die tatsächlich durchstrahlte Länge  $\mathfrak{d}$  eines Zylinders vom Radius  $b$  mit Strahlablage  $\eta$  berechnet man aus elementargeometrischen Betrachtungen zu  $\mathfrak{d} = 2\sqrt{b^2 - \eta^2}$  [Wilhelms, 1996, Abschn. 4.3.3.1]. Der Fehler  $\Delta\mathfrak{d}$  der durchstrahlten Solllänge  $\mathfrak{d} = 2b$  berechnet sich dann als quadratische Addition des Durchmesserfehlers  $\Delta 2b$  und der Längenänderung durch die Strahlablage:

$$\Delta\mathfrak{d} = \sqrt{(\Delta 2b)^2 + (2b - 2\sqrt{b^2 - \eta^2})^2}. \quad (4.2)$$

Bezogen auf die durchstrahlte Solllänge  $\mathfrak{d} = 2b$  berechnet man den relativen Fehler der durchstrahlten Länge:

$$\frac{\Delta\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta 2b}{2b}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}\right)^2}. \quad (4.3)$$

Die gemessenen relativen Fehler der Intensitäten der Luftmessung  $\Delta^R I_0/I_0$  und nach durchstrahltem Eiskern gemessenen Intensität  $\Delta^R I_{\mathfrak{d}}/I_{\mathfrak{d}}$  setzt man gemeinsam mit den eben diskutierten Fehlern in die Fehlerfortpflanzungsformel für den relativen Fehler der Dichte aus der Gammastreumessung ein [Wilhelms, 1996, Gl. (4.9)]:

$$\frac{\Delta\rho_{\gamma}}{\rho_{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ln \frac{I_0}{I_{\mathfrak{d}}}} \frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ln \frac{I_0}{I_{\mathfrak{d}}}} \frac{\Delta I_{\mathfrak{d}}}{I_{\mathfrak{d}}}\right)^2}. \quad (4.4)$$

Bevor die Präzision der auf diese Weise bestimmten Dichten aus  $\gamma$ -Streumessungen zu einem Relativfehler in der Größenordnung von 1 ‰ im übernächsten Abschnitt an einem Beispiel diskutiert wird, sei zunächst noch die Anwendung der in dieser Arbeit entwickelten Algorithmen auf die früher benutzte DEP-Meßbank kurz beschrieben.

#### 4.1.4 Meßanwendungen mit der früher beschriebenen DEP-Meßbank

Die Fehlerrechnung der früher beschriebenen DEP-Meßbank [Wilhelms et al., 1998] berücksichtigte keine Fehler durch Luftspalte, da kein mathematisches Modell zur

Berechnung der Abhängigkeit von Luftspalten vorhanden war und die im Vergleich zu Luft geringen Unterschiede der hochfrequenten Dielektrizitätskonstanten keinen nennenswerten Fehlerbeitrag erwarten ließen. Die Abschätzung in Wilhelms [1996, Abschn. 2.2.4] folgte einer Abschätzung mit den Auswertelgorithmen nach Gross et al. [1980]. Durch Anwendung der in den Kapiteln 2 und 3 dieser Arbeit abgeleiteten Theorie auf die früher beschriebene Meßbank wird die Radienkorrektur implementiert und der Fehler durch verbleibende Luftspalte in die Fehlerrechnung integriert. Da die Meßbank nicht über eine Kernpositionierung verfügt, nimmt man für den Durchmesserfehler abschätzend die Differenz aus Elektrodendurchmesser und Eiskerndurchmesser  $2a - 2b$  an, zu der man den 0.5 mm Fehler der Durchmessermessung quadratisch addiert.

Die Eichung der Meßbrücke erfolgt im wesentlichen wie bei Verwendung des Eichstandards in Abschnitt 3.2.7.5. Der Eichdatensatz wird aus der statistischen Auswertung einer Luftmessung gewonnen. Im Gegensatz zur Verwendung der Standardabweichungen der Mittelwerte bei der Eichung der fest verkabelten Elektroden in Abschnitt 3.2.7.1 berechnet man hier die statistischen Fehler der Erwartungswerte von Kapazität  $C$  und Leitwert  $G$  als Standardabweichungen  $\Delta^R C$  und  $\Delta^R G$ , da eine leichte Variation beider Größen entlang der Meßbank aufgrund von Kabeldeformation und leicht variierenden Kontakten zu erwarten ist. Deshalb ist die Luftmessung entlang der Meßbank keine wiederholte Messung derselben Größe und die Variabilität reduziert sich nicht durch Mittelung. Bei der Berechnung des Fehlers des Mittelwerts als durch die Wurzel der Meßpunktanzahl geteilte Standardabweichung [Barlow, 1989, Abschn. 4.2.1] ( $\sqrt{N}$ -Gesetz) nimmt man die Verkleinerung des Fehlers durch wiederholte Messung gerade an.

Bei der Anpassung einer einfachen Proportionalität zwischen dem Meß- und dem Eichdatensatz aus Metallrohren verschiedenen Durchmessers in Abschnitt 3.2.7.3 wurde der Fehler der Leerkapazität nach Annahme der Hypothese eines proportionalen Verhaltens der Meßbrücke aus der statistischen Auswertung direkt bestimmt. Eine statistische Auswertung macht mit dem einzelnen Meßpunkt der Luftmessung keinen Sinn. Zum relativen Fehler der Leerkapazität  $\Delta C_0/C_0 = \sqrt{(\Delta^S |Z|/|Z|)^2 + (\Delta^R C_0/C_0)^2}$  tragen die relative Abweichung des gemessenen Impedanzbetrags der Meßbrücke  $\Delta^S |Z|/|Z|$  als systematische Fehlerquelle und der relative Fehler  $\Delta^S C_0/C_0$  der Luftmessung zur Beschreibung der leichten Kapazitätsvariation entlang des von der Meßelektrode beschriebenen Weges um den bestimmten Mittelwert  $C_0$  bei.

Der um etwa eine Größenordnung größere Leitwert der Leermessung  $G$  der früher benutzten Apparatur hat seine Ursache wohl in größeren Masseschleifen durch die schlechteren Kontakte der verschraubten Aluminiumelemente und den nicht speziell auf die Brücke abgestimmten Standardkoaxialkabeln. Demgegenüber sind die Elektroden des in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Meßkondensators fest mit einem speziellen als Zubehör zur Meßbrücke gelieferten Kabel mit der Schutzelektrode als gemeinsamen eindeutig bestimmten Apparaturerdungspunkt an die Brücke angeschlossen. Der Leitwert der Leermessung  $G$  wird deshalb zunächst von den an der jeweiligen Kernposition gemessenen Leitwerten subtrahiert.

Die Fehler des Betrags der komplexwertigen Kapazität  $|C^*|$  des einzelnen Meßwertes berechnet man nun analog zum Fall der fest verkabelten Elektroden nach Ab-

Tabelle 4.2: Kenngrößen der früher beschriebenen DEP-Meßbank

Der Durchmesserfehler ist die quadratische Addition des Meßfehlers und der Differenz zwischen Elektroden- und Kerndurchmesser. Der Eichfehler ergibt sich aus der Spezifikation der Meßbrücke und aus an der Meßbank mit einem Eichstandard vorgenommenen Eichmessungen zur Schätzung des Impedanzbetragsfehlers.

| Kenngrößen des früher beschriebenen DEP-Kondensators |   |                       |           |
|--|---|-----------------------|-----------|
| Größe  | Symbol  | Wert                  | Fehler    |
| effektive Dielektrizitätskonstante                   | $\varepsilon_m^*$   | siehe Text            |           |
| Oberflächenströme                                    | $\frac{I_s}{I_B}$   | siehe Abschnitt 3.2.3 |           |
| Eiskerndurchmesser                                   | $2b$  | siehe Text            |           |
| relativer Impedanzfehler bei 250 kHz                 | $\frac{\Delta^S Z }{ Z }$   | siehe Text            | 0.03      |
| Elektrorendurchmesser                                | $2a$  | 100 mm                | 1.0 mm    |
| Meßelektrodenbegrenzungswinkel                       | $\xi$   | $\frac{\pi}{5}$ rad   | 0.015 rad |
| Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht          | $\varepsilon_a$   | •                     | •         |
| Realteil   | $\text{Re}(\varepsilon_a)$  | 1                     | 0         |
| Imaginärteil   | $\text{Im}(\varepsilon_a)$  | 0                     | 0         |
| Kovarianz  | $\mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_a)\text{Im}(\varepsilon_a)}$ | •                     | 0         |

schnitt 3.2.7.5 mit Relation (3.35) auf Seite 84. Bei der Berechnung der Varianz der Phase der komplexwertigen Kapazität  $\arg C^*$  berücksichtigt man hier den gemessenen Leitwert der Luftmessung  $G$  nicht, da er wie oben erwähnt gerade als Untergrund von den Meßdaten abgezogen wurde, d.h. die Varianz der Phase berechnet sich analog zum fest verkabelten Elektrodenpaar nach Relation (3.36) auf Seite 84 mit nicht berücksichtigtem arctan-Term. Die bei dieser Vorgehensweise vernachlässigte Variation des Einzelmeßwertes berücksichtigt man durch Einführung der von Wilhelms [1996, Tabelle 2.1] gefundenen relativen Abweichung des Impedanzbetrags  $\Delta^S|Z|/|Z| = 3\%$  für bei einer Meßfrequenz  $f = 250$  kHz gemessene Kapazitäten zwischen  $\approx 60 \dots 200$  fF in die Fehlerrechnung. Dazu addiert man zum Fehler des Betrages der komplexwertigen Kapazität quadratisch den zugeordneten Absolutfehler  $\Delta^S|Z|/|Z| \times |C^*|$ . Aus dem für den Impedanzbetrag angegebenen relativen Fehler  $\Delta^S|Z|/|Z|$  berechnet man den Absolutfehler des Phasenwinkels – der Spezifikation der Meßbrücke [HPLCR, 1994, S. 9-8 & 9-16] folgend – zu  $\Delta^S \arg |Z| = \Delta^S|Z|/|Z|$  rad.

Die Berechnung der gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  aus den Meßdaten und die Berechnung ihrer Fehler erfolgt nun vollkommen analog zu allen vorangegangenen Betrachtungen zu den fest verkabelten Elektroden. Tabelle 4.2 gibt einen Überblick über die im Anhang B im Eichskript `caldev.gmt` auf die eben beschriebene Weise implementierte Auswertung von auf der früher beschriebenen DEP-Meßbank vorgenommenen Messungen.

## 4.1.5 Diskussion und Vergleich mit früheren Messungen

Als Meßbeispiel werden nun exemplarisch auf der Meßbank am Eiskern B32 [Oerter et al., 2000] bei einer Meßfrequenz  $f = 250$  kHz im Feld gemessene dielektrische Eigenschaften und im Anschluß daran Dichtemessungen mittels  $\gamma$ -Streuung diskutiert. Die kurze Betrachtung der Messung des Firnkerns FB9707 [Oerter et al., 1999] auf der früher benutzten Bank dient als Beispiel der für die alte Bank analog im unmittelbar vorangegangenen Abschnitt implementierten Fehlerrechnung und zeigt den Sprung zur wesentlich verbesserten Meßgenauigkeiten mit der kombinierten Kernbank.

### 4.1.5.1 Eichung hochfrequenter dielektrischer Messungen

Der mit dem Eichskript aus den Rohdaten erzeugte Datensatz der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  ist im Prinzip noch kein direktes Abbild der Kerneigenschaften, da der Einfluß des Luftspalts noch nicht korrigiert ist. Der in Abbildung 4.11 gezeigte Datensatz der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  wird deshalb nur in Bezug auf Fehlerabhängigkeiten des Real- ( $\varepsilon_m^{*'}$ ) und negativen Imaginärteils ( $\varepsilon_m^{*''}$ ) von der Eichung diskutiert. Tiefenbereiche, für die der angegebene Fehler wegen schon vor der Messung identifizierter schlechter Kernqualität durch Brüche oder Absplitterungen nicht garantiert werden kann, sind im Gegensatz zum hier diskutierten schwarz eingetragenen Datensatz lediglich hellgrau unterlegt. Die relativen Fehler von Real- ( $\varepsilon_m^{*'}$ ) und negativem Imaginärteil ( $\varepsilon_m^{*''}$ )  $\Delta\varepsilon_m^{*'} / \varepsilon_m^{*'}$  bzw.  $\Delta\varepsilon_m^{*''} / \varepsilon_m^{*''}$  und ihr Korrelationskoeffizient  $\Re(\varepsilon_m^{*'}, \varepsilon_m^{*''})$  berechnen sich mit den Relationen (3.41) bis (3.43) auf Seite 85 aus dem Betrag  $|C^*|$  und der Phase  $\arg C^*$  der komplexwertigen Kapazität  $C^*$ , sowie der inversen Leerkapazität  $\frac{1}{C_0}$ . Zusätzlich gehen die Fehler dieser drei eben erwähnten Größen ein. Trotz der Abhängigkeit der fortgepflanzten Fehler von sechs Parametern treten in bestimmten Bereichen charakteristische Eigenschaften der ursprünglichen Eichung (Abbildung 3.6 auf Seite 78) in den Fehlerreihen nachvollziehbar auf.

Die aus Abbildung 4.8 abgelesenen ein bis zwei Prozent Relativfehler des Real- und des Imaginärteils liegen in der gleichen Größenordnung wie der Relativfehler des Kapazitätsbetrages  $\Delta|C^*|/|C^*| = \Delta|\varepsilon_m^*|/|\varepsilon_m^*| \approx \frac{3 \times 10^{-2}}{1 \dots 3} \approx 0.3 \dots 1$  %. Der absolute Fehler der Kapazitätsphase  $\arg C^* = \arg \varepsilon_m^* \approx 5 \times 10^{-3} = 0.5$  % tritt in den Summanden der Fehlerfortpflanzungsformeln nach den Relationen (3.41) bis (3.43) grundsätzlich mit dem Kapazitätsbetrag  $|C^*|$  gemeinsam auf und ist deshalb unmittelbar mit den Relativfehlern vergleichbar. Ausdruck dieses Sachverhaltes ist auch das schon im vorangegangenen Abschnitt erwähnte Einsetzen des Betragsrelativfehlers als Phasenabsolutfehler nach der Spezifikation der Meßbrücke [HPLCR, 1994, S. 9-8 & 9-16]. Der relative Fehler der Leerkapazität  $\frac{\Delta C_0}{C_0} = 0.15$  % ist im Vergleich zu den Fehlern der effektiven Kapazität  $C^*$  relativ klein. Die Konsistenz der gefundenen Fehlerabhängigkeiten mit der nach Spezifikation vorgegebenen Gleichheit von Impedanzbetragsrelativ- und Phasenabsolutfehler und eines im Vergleich dazu kleinen Leerkapazitätsfehlers, der als Fehler einer durch  $\chi^2$ -Anpassung gemittelten Größe klein zu erwarten ist, stärken das Vertrauen in die von der Eichung bestimmten ein bis zwei Prozent Relativfehler der Komponenten der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$ . Die Übereinstimmung des Zahlenwerts des Relativfehlers der

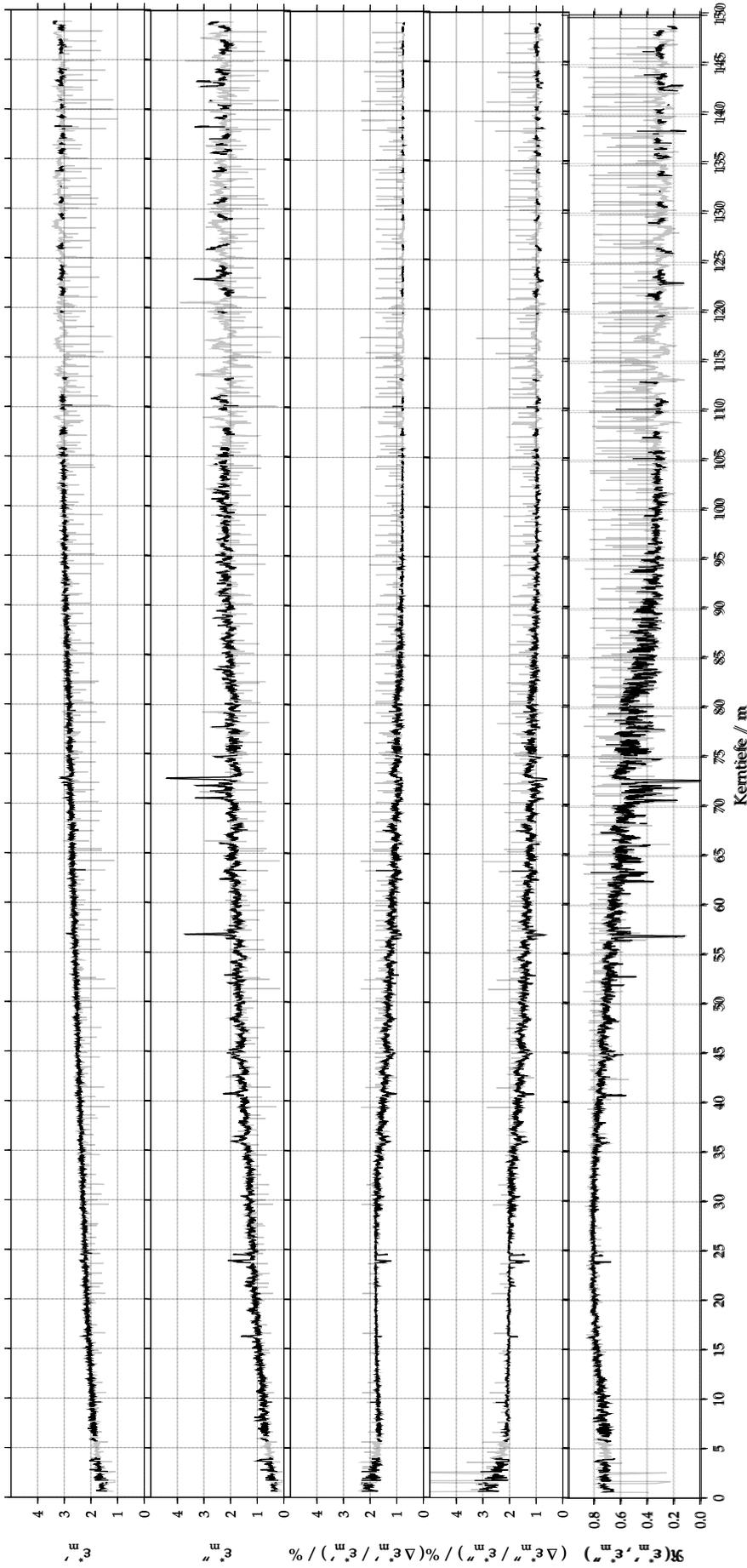


Abbildung 4.8: Beispiel für einen vom Eichskript ausgegebenen Datensatz bei einer Messfrequenz von 250 kHz

Die Ausgabe des auf die Rohdaten des Eiskerns B32 [Oerter et al., 2000] angewendeten mittels `caldev.gmt` erzeugten Eichskripts ist gezeigt. Die bei der Erstellung des Eichskripts erzeugte Grafik ist in Abbildung 3.6 (Seite 78) dargestellt. Während der Messung identifizierbare Bereiche mit schlechter Kernqualität sind grau dargestellt. Das Eichskript gibt den Real- ( $\epsilon_m^{*'} / \epsilon_m^*$ ) und Imaginärteil ( $-\epsilon_m^{*'} / \epsilon_m^*$ ) der effektiven relativen Dielektrizitätskonstanten mit ihren Varianzen ( $\mathcal{C}_{\epsilon_m^* / \epsilon_m^*}'$  &  $\mathcal{C}_{-\epsilon_m^{*'} / \epsilon_m^*}''$ ), sowie ihrer Kovarianz  $\mathcal{C}_{\epsilon_m^* / \epsilon_m^*}' / \epsilon_m^* / \epsilon_m^{*'}$  aus. Hier sind der besseren Übersichtlichkeit wegen die Relativfehler  $\Delta \epsilon_m^* / \epsilon_m^* = \sqrt{\mathcal{C}_{\epsilon_m^* / \epsilon_m^*}' / \epsilon_m^*}$  und  $\Delta \epsilon_m^{*'} / \epsilon_m^{*'}$  in Prozent, sowie der Korrelationskoeffizient  $\Re(\epsilon_m^*, \epsilon_m^{*'}) = -\mathcal{C}_{\epsilon_m^* / \epsilon_m^*}' / \epsilon_m^* / \epsilon_m^{*'}$  aufgetragen.

Leerkapazität  $\frac{\Delta C_0}{C_0} = \frac{\Delta(C_0)_{\text{theo}}}{(C_0)_{\text{theo}}}$  mit dem in die Eichung eingebrachten Relativfehler der theoretisch berechneten Leerkapazität ist Ausdruck des hohen Gewichts dieses Punktes bei der Anpassung der Eichproportionalität im Vergleich zum auf den eingebrachten Metallrohren basierenden Eichstandard mit noch verbesserungsfähigen mechanischen Toleranzen.

Die geringe Variabilität der beiden Relativfehler  $\Delta\varepsilon_m^*/\varepsilon_m^*$  und  $\Delta\varepsilon_m''/\varepsilon_m''$  im Tiefenbereich zwischen 5 m und 33 m – entsprechend Beträgen der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $|\varepsilon_m^*|$  zwischen 2 und 2.6 – korrespondiert mit dem parallelen Verlauf der Kapazität  $C$  und des Betragsfehlers der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\Delta|\varepsilon_m^*|$  in Abbildung 3.6. Damit ist das für den Kapazitätsbetrag bei der Bildung des Relativfehlers berechnete Verhältnis aus Absolutfehler zur Größe selbst nahezu  $\Delta|C^*|/|C^*|$  konstant. Die jeweils ersten vom Fehler des Kapazitätsbetrags abhängigen Summanden in den Relationen für die Fehler von Real- und Imaginärteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$  sind mit den eingesetzten Werten mit fast einer Größenordnung führend. Konsistent damit ist der in guter Näherung gleich große Relativfehler für Real- bzw. Imaginärteil, da die Phasenterme  $\cos \arg C^*$  bzw.  $\sin \arg C^*$  ebenfalls herausdividiert werden. Die drei im Tiefenbereich befindlichen Spitzen auf der Kurve überschreiten den Bereich des parallelen Verlaufs von Betragsfehler und Betrag in den Bereich mit leicht mit der Kapazität abnehmendem Betrag des Fehlers (siehe Abbildung 3.6). Der geringere Relativfehler ist mit dieser Beobachtung konsistent. Zu größeren Tiefen hin werden die Fehler von Betrag und Phase konstant und die Relativfehler verkleinern sich weiter durch die anhaltend mit der Kerntiefe betragsmäßig zunehmenden effektiven Dielektrizitätskonstanten. Ab einer Kerntiefe von etwa 95 m wachsen die effektiven Dielektrizitätskonstanten mit der Tiefe nur noch so schwach, daß die Relativfehler von diesem Punkt an quasi konstant bleiben.

Für den Korrelationskoeffizienten  $\Re(\varepsilon_m^*, \varepsilon_m'') = -\mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_m^*)\text{Im}(\varepsilon_m^*)}/(\Delta\varepsilon_m^* \Delta\varepsilon_m'')$ , mit nach Relation (3.43) berechneter Kovarianz  $\mathfrak{C}_{\text{Re}(\varepsilon_m^*)\text{Im}(\varepsilon_m^*)}$ , erwartet man bei zunächst führendem Fehler des Betrags  $\mathfrak{C}_{|C^*||C^*|}$  einen vom Vorfaktor  $\sin \arg C^* \cos \arg C^*$  mit Variation der Phase von  $\approx 0^\circ \dots -45^\circ$  beschriebenen Anstieg. Mit zunehmender Tiefe wächst mit wachsendem Betrag der Kapazität nach Abbildung 3.6 auch der Fehler der Phase und läßt insgesamt den Term  $|C^*|^2 \mathfrak{C}_{\arg C^* \arg C^*}$  in die gleiche Größenordnung wie  $\mathfrak{C}_{|C^*||C^*|}$  anwachsen. Beide Terme treten in Relation (3.43) in einer Differenz auf und die Kovarianz beschreibt einen leichten Abfall, der durch die Division mit den ebenfalls wachsenden Fehlern beim Korrelationskoeffizienten noch verstärkt wird, bis sich, wie bei den relativen Fehlern der effektiven Dielektrizitätskonstanten auch, ab etwa 95 m ein auch mit zunehmender Tiefe im Mittel konstantes Verhältnis einstellt.

#### 4.1.5.2 Dielektrische Eigenschaften des Eiskerns bei hohen Frequenzen

Die aus den effektiven Dielektrizitätskonstanten mit der Theorie bestimmten dielektrischen Eigenschaften des Kerns  $\varepsilon_1^\times$  zeigt Abbildung 4.9. Auf den ersten Blick sind zwischen den Datensätzen keine Unterschiede auszumachen. Auch die Fehler haben sich nicht merklich vergrößert. Dies zeigt, daß die schon in Abschnitt 3.2.4 erwähnte mögliche Dominanz der Fehler der Meßbrücke über geometrische Fehler gegeben ist.

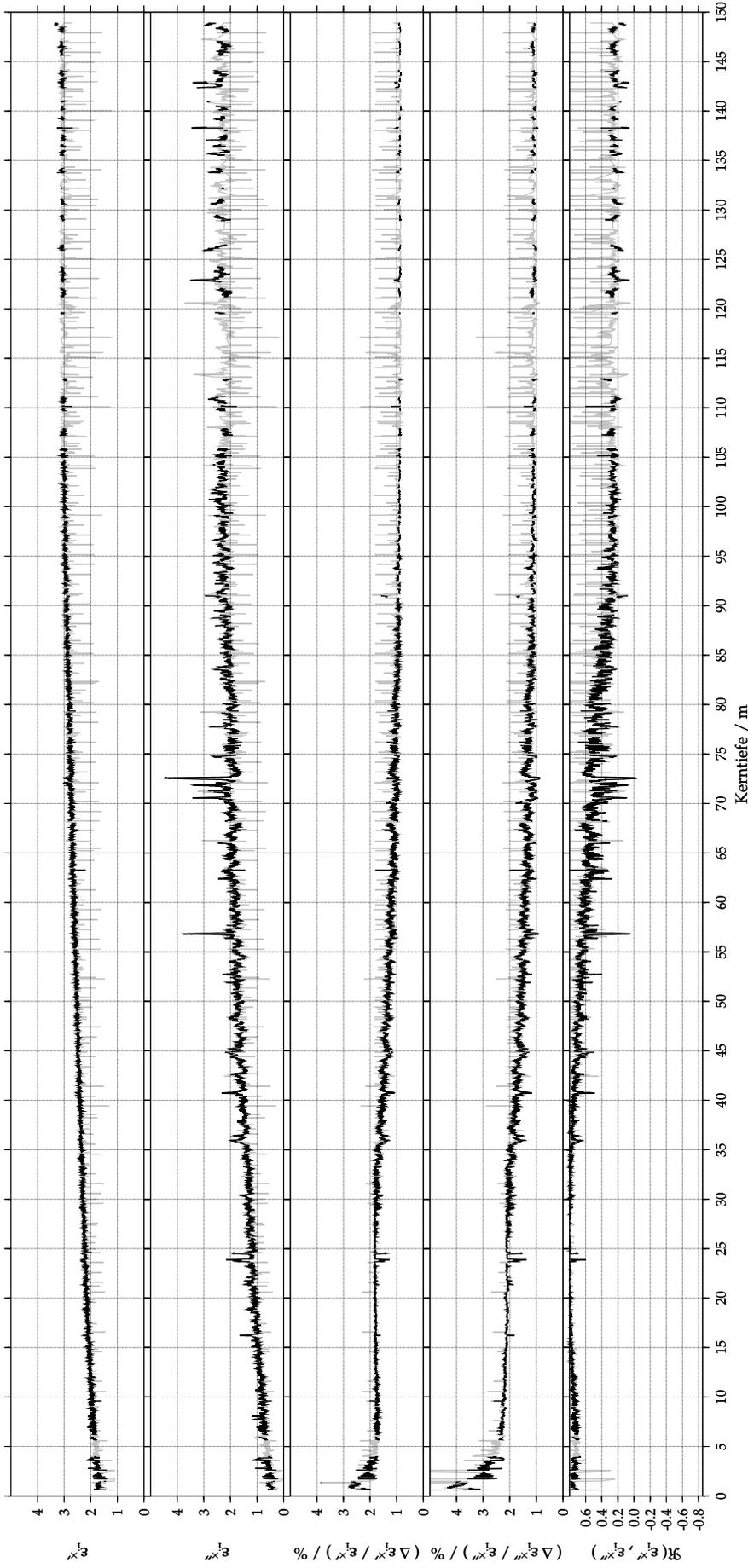


Abbildung 4.9: Beispiel für bei einer Meßfrequenz von 250 kHz gemessene Eiskerneigenschaften. Der gezeigte Datensatz der dielektrischen Eigenschaften des Kerns B32 [Oerter et al., 2000] wurde mit dem Programm depmeas.c (Anhang B) unter Berücksichtigung von Oberflächenströmen aus dem in Abbildung 4.8 gezeigten geeichteten Datensatz erzeugt. Das Programm depmeas.c gibt den Real- ( $\epsilon_i^{x'}$ ) und Imaginärteil ( $-\epsilon_i^{x''}$ ) der effektiven relativen Dielektrizitätskonstanten mit ihren Absolutfehlern  $\Delta \epsilon_i^{x'}$  und  $\Delta(-\epsilon_i^{x''}) = \Delta \epsilon_i^{x''}$ , sowie ihrer Korrelation  $\mathfrak{R}(\epsilon_i^{x'}, -\epsilon_i^{x''})$  aus. Hier sind der besseren Übersichtlichkeit wegen die Relativfehler  $\Delta \epsilon_i^{x'} / \epsilon_i^{x'}$  und  $\Delta \epsilon_i^{x''} / \epsilon_i^{x''} = \Delta(-\epsilon_i^{x''}) / (-\epsilon_i^{x''})$  in Prozent, sowie der Korrelationskoeffizient  $\mathfrak{R}(\epsilon_i^{x'}, \epsilon_i^{x''}) = -\mathfrak{R}(\epsilon_i^{x'}, -\epsilon_i^{x''})$  aufgetragen.

Die bei der Dimensionierung in Abschnitt 3.2 vorgegebene Fehlergenauigkeit im Bereich von wenigen Prozent bis zu unter ein Prozent in tieferen Kernbereichen wird vom gezeigten Datensatz demonstriert. Der aufgetragene negative Imaginärteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^{*''} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$  ist proportional der Leitfähigkeit  $\sigma$ . Die Spitzen mit um Faktor zwei oder mehr erhöhter Leitfähigkeit können vulkanogenem Eintrag zugeordnet werden [Oerter et al., 2000; Sommer et al., eingereicht a]. Die Studie der Akkumulationsrate und anderer Proxyparmater – teilweise bis in jahreszeitliche Auflösung [Sommer et al., eingereicht b] – sind nicht Gegenstand dieser Arbeit und, es sei lediglich auf die Zusammenstellung der bereits an den hier bearbeiteten Kernen veröffentlichten Studien in Abschnitt 4.2 verwiesen.

#### 4.1.5.3 Beitrag der Theorie zur Behandlung der Isolierschicht bei hochfrequenten Messungen

Obwohl die Korrekturen der Theorie zur Behandlung der Luftspalte klein sind, erreichen sie im Vergleich zur erreichten Fehlergenauigkeit die gleiche Größenordnung. Abbildung 4.10 zeigt die durch Anwendung der Theorie um mehrere Prozent zu höheren Werten hin korrigierte Leitfähigkeit  $\sigma$ . Die relative Korrektur der Leitfähigkeit ist wegen der oben erwähnten proportionalen Abhängigkeit vom negativen Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten die mit diesen Größen berechnete Korrektur  $(\varepsilon_i^{x''} - \varepsilon_m^{*''})/\varepsilon_m^{*''}$ . Die in der Korrektur der Leitfähigkeit in Abbildung 4.10 beobachteten Sprünge sind Ausdruck der vorgenommenen Radienkorrektur mit intervallweise gemessenen – ebenfalls in Abbildung 4.10 dargestellten – Eiskerndurchmessern.

Der Realteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^{*'}$  ist ab einer gewissen Tiefe von etwa 35 m größer als die Dielektrizitätskonstante des Kerns  $\varepsilon_i^{x'}$ . In Abbildung 3.1a (Seite 51) demonstriert der Schnitt der Konturlinien des Realteils der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\text{Re}(\varepsilon^*/\varepsilon_a)$  mit der reellen Achse  $\text{Re}(\varepsilon_i/\varepsilon_a)$  bei höchstens gleich großen Abszissenwerten, daß für rein reelle Dielektrizitätskonstanten die effektive Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_m^{*'}$  eines im Kondensator von einem Luftspalt  $\varepsilon_a$  umgebenen Kerns  $\varepsilon_i$  grundsätzlich kleiner als die Dielektrizitätskonstante des Kerns  $\varepsilon_i^{x'}$  ist<sup>4</sup>. Bewegt man sich in Abbildung 3.1a von der reellen Achse ausgehend parallel zur imaginären Achse, so wandert man zu Beginn entlang einer Konturlinie und erreicht beim Passieren eines bestimmten Imaginärteils einen Bereich mit höherer effektiver Dielektrizitätskonstante. Anschaulich überschreitet man dann eine höher gelegene Konturlinie. Die aus der Darstellung der Eiskerneigenschaften (Abbildung 4.9) für eine Tiefe der erstmalig deutlich erkennbaren Korrektur zu kleineren Werten des Realteils von 35 m grob abgeschätzten Werte der dielektrischen Kerneigenschaften  $\varepsilon_i^{x'} \approx 2.3$  bzw.  $\varepsilon_i^{x''} \approx 1.4$  sind in der in Abbildung 3.1 erreichten Ablesegenauigkeit die Koordinaten der Ablösung der Konturlinie für  $\varepsilon_m^{*'} = 2$  von ihrer auf der reellen Achse im Abszissenschnittpunkt  $\varepsilon_i^{x'} = 2$  senkrecht errichteten Tangente. Besonders auch im Bereich hoher Leitfähigkeit durch vulkanogenen Eintrag ergeben sich nach der Theorie Korrekturbeiträge zur Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{x'}$  von bis zu 5 %.

<sup>4</sup>Bei der Betrachtung der reellen Achse ist entsprechend über den in Abbildung 3.1a in logarithmischer Darstellung nicht darstellbaren Bereich um verschwindenden Imaginärteil  $\text{Im}(\varepsilon_i/\varepsilon_a) = -0.0001 \dots 0.0001$  zu interpolieren.

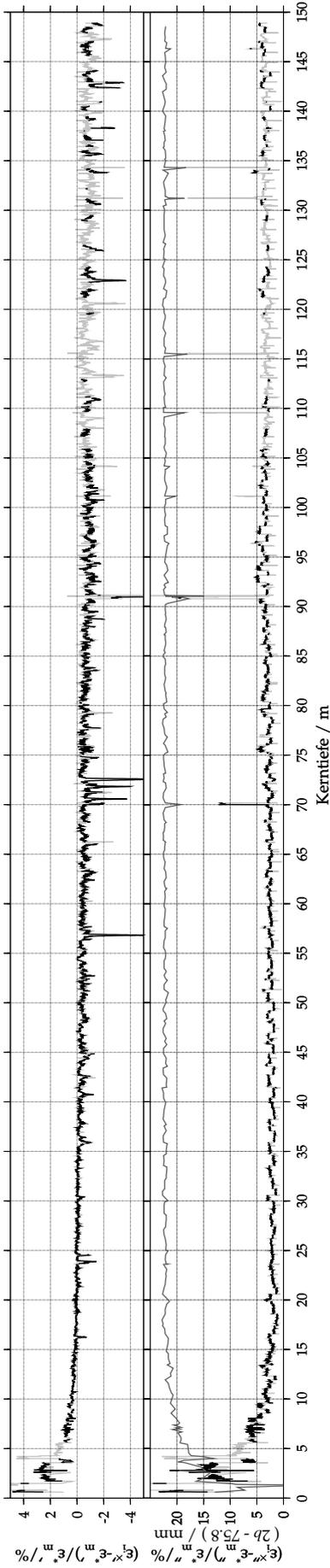


Abbildung 4.10: Nach der Theorie zur Behandlung der Isolierschicht am geichteten Datensatz vorgenommene Korrekturen

Die relative Abweichung des in Abbildung 4.9 gezeigten Datensatzes der Kerneigenschaften  $\epsilon_i^x$  vom in Abbildung 4.8 dargestellten Datensatz der effektiven relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_m^*$  ist für Real- und Imaginärteil getrennt in Prozent aufgetragen. Die relative Abweichung von mehreren Prozent des mit der Theorie zur Behandlung der Isolierschicht vom Einfluss des Luftspalts bereinigten Datensatzes  $\epsilon_i^x$  vom Ausgangsdatsatz  $\epsilon_m^*$  im Vergleich zu den relativen Fehlern der Komponenten von  $\epsilon_i^x$  in der Größenordnung von wenigen Prozent verdeutlicht den Beitrag der Theorie zur erzielten Präzision. Der Kerndurchmesser 2b ist grau aufgetragen. Der Ordinatenabschnitt ist so gewählt, daß der obere Rand des Graphen dem Elektrodendurchmesser entspricht.

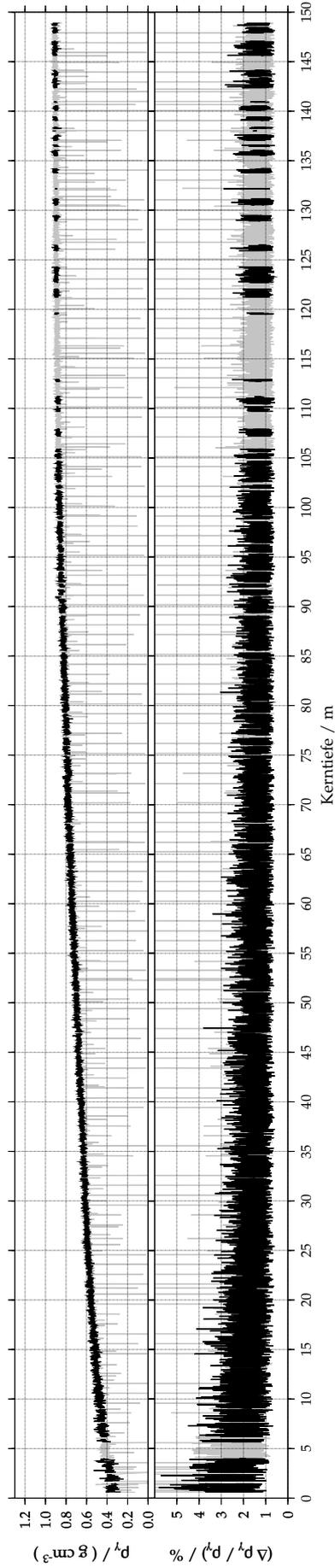


Abbildung 4.11: Beispiel für einen mittels  $\gamma$ -Streuung gemessenen Dichtedatensatz

Der Datensatz zeigt die mittels  $\gamma$ -Streuung bestimmte Dichte  $\rho_\gamma$  des Kerns B32 [Oerter et al., 2000]. Die starke Schwankung des relativen Fehlers  $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$  spiegelt die Fluktuation der Intensitätsmessung um einen mittleren Fehler von etwa 1 % wieder.

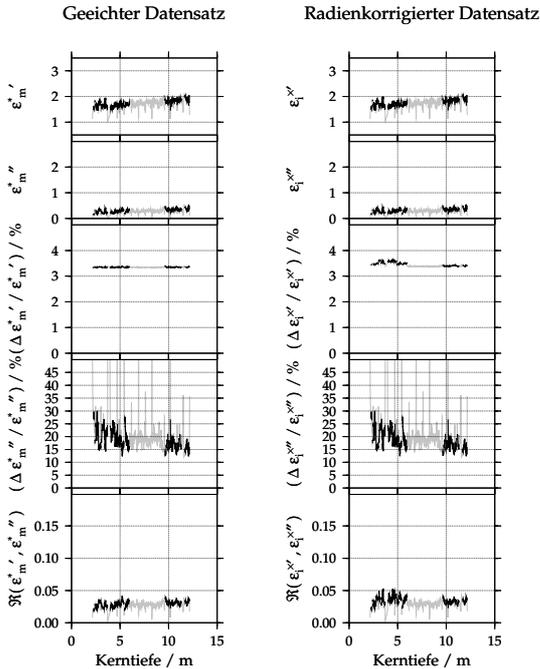
Setzt man die mit der Theorie vorgenommenen Korrekturen zur Leitfähigkeit von einigen Prozent und den Korrekturbeitrag zur Dielektrizitätskonstanten vom bis zu einem Prozent in Relation zu den über die gesamte Kernlänge gefundenen Meßfehlern von weniger als zwei Prozent, so ist der entscheidende Beitrag der theoretischen Betrachtungen in den vorangegangenen Kapiteln zur Erzielung der erreichten Genauigkeit demonstriert.

#### 4.1.5.4 Dichte des Eiskerns aus $\gamma$ -Streuung

Das in Abbildung 4.11 gezeigte Dichteprofil aus  $\gamma$ -Streumessungen bestätigt früher gefundene Ergebnisse [Gerland et al., 1999; Wilhelms, 1996]. Der von im Mittel 3 % auf etwa 1.5 % abfallende relative Fehler ist jeweils doppelt so groß wie die von Wilhelms [1996, Tabelle 4.1] in Abhängigkeit von der Tiefe für eine Strahlungsquelle mit vierfacher Aktivität gefundenen Fehler zwischen 1.65 % in den ersten Kernmetern abfallend auf 6.6 % in 100 m Kerntiefe und bestätigt die in Abschnitt 4.1.3 angegebene Prognose für den zu erwartenden doppelt so großen Fehler. Die beobachtete Schwankung des Relativfehlers  $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$  spiegelt die Meßstatistik des  $\gamma$ -Densimeters wieder. Der aus dem Durchmessermeßfehler  $\Delta 2b = 0.5$  mm und der maximalen Strahlablage  $\eta = 5$  mm für einen Eiskern mit einem Solldurchmesser  $2b = 98$  mm mit Fehlerfortpflanzung nach Relation (4.3) berechnete relative Fehler der durchstrahlten Länge im Eiskern  $\Delta\mathfrak{d}/\mathfrak{d} = 5$  ‰ und der relative Fehler des Massenabsorptionskoeffizienten  $\Delta\alpha/\alpha = 1$  ‰ [Wilhelms, 1996, Gln. (3.5) & (3.10)] können nicht führend zum relativen Dichtefehler  $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma \approx 1.5$  % beitragen. Bei der Berechnung des Dichtefehlers nach Relation (4.4) bleiben dann nur noch die Beiträge der Intensitätsmessung als Fehlerquellen übrig.

Eine statistische Auswertung der Absolutfehler liefert einen Mittelwert  $\langle\Delta^R\rho_\gamma\rangle = 0.01 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und eine Standardabweichung  $\Delta^R\langle\Delta\rho_\gamma\rangle = 0.0033 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  der Standardabweichung der Dichte  $\rho_\gamma$ , die mit dem für  $N = 5$  Messungen zu  $\langle\Delta^R\rho_\gamma\rangle/\sqrt{2(N-1)} = 0.01/\sqrt{2(5-1)} = 0.0035 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  berechneten Schätzwert einer ungerichtet abgeschätzten Standardabweichung der Standardabweichung [Barlow, 1989, Abschn. 5.2.3] gut übereinstimmt. Diese Beobachtung stützt ebenfalls die Feststellung einer von der Intensitätsmessung in führender Ordnung bestimmte Fehlerabhängigkeit der Dichtemessung. Andererseits ist die maximale systematische Verstärkungsdrift des  $\gamma$ -Densimeterdetektors mit  $\Delta^S I/I = 2$  ‰ angegeben [Löffel, 1989] und somit der Standardabweichung  $\Delta^R\langle\Delta^R I_\mathfrak{d}/I_\mathfrak{d}\rangle = 3$  ‰ des mittleren relativen Intensitätsfehlers  $\langle\Delta^R I_\mathfrak{d}/I_\mathfrak{d}\rangle = 8$  ‰ vergleichbar. Nach dem  $\sqrt{N}$ -Gesetz kann der die Messung der Dichte  $\rho_\gamma$  dominierende statistische Fehler durch mehr Meßpunkte weiter reduziert werden. Nimmt man z.B. 16 mal so viele Messungen an jeder Position wie bisher, so reduziert sich der mittlere relative Intensitätsfehler  $\langle\Delta^R I_\mathfrak{d}/I_\mathfrak{d}\rangle$  auf die gleiche Größe wie der systematische Fehler  $\Delta^S I/I$  und, eine Reduzierung des Gesamtfehlers der Intensitätsmessung um einen Faktor 2.5 ist möglich, falls man auch den Fehler der durchstrahlten Schichtdicke  $\Delta\mathfrak{d}$  auf 0.2 mm reduzieren kann. Der Durchmesser ist mit vertretbarem mechanischen Aufwand in der erforderlichen Präzision meßbar. Die zur angestrebten Verbesserung der Meßstatistik nötige Messung von 80 – 100 Meßwerten statt 5 an jeder Meßposition sollte durch den in Abschnitt 4.1.1.2 erwähnten Austausch des Multimeters gegen ein schnelleres und gleichzeitiger Datennahme für

Abbildung 4.12: Beispiel für eine Messung auf der früher beschriebenen DEP-Meßbank bei hoher Frequenz



Der geeichte Rohdatensatz  $\varepsilon_m^*$  und die mit der Theorie bestimmten dielektrischen Eigenschaften  $\varepsilon_i^x$  des beispielhaft gewählten Firnkerns FB9707 [Oerter et al., 1999] sind gezeigt. Das hier gezeigte Beispiel demonstriert die vollkommen analoge Anwendbarkeit der Auswerteskripte auf Messungen mit der früher beschriebenen DEP-Meßbank [Wilhelms, 1996; Wilhelms et al., 1998] bei der Standardmeßfrequenz von 250 kHz. Die Bezeichnungen sind entsprechend den Erläuterungen zu den Abbildungen 4.8 und 4.9.

die dielektrischen Messungen und die Intensitätsmessung ohne nennenswerten Zeitverlust gegenüber den hier ausgewerteten Messungen möglich sein. Die Messung wäre dann vergleichbar der in Wilhelms [1996] beschriebenen, d.h. bis auf nicht weiter reduzierbare systematische Fehlergrenzen hin optimiert. Der um einen Faktor 2.5 reduzierte Fehler der Intensitätsmessung wird insgesamt eine Reduzierung des Absolutfehlers der Dichtemessung um etwa einen Faktor zwei bewirken. Dann ist der erreichte Absolutfehler dem Absolutfehler von  $\Delta\rho_\gamma = 0.006 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  des mit einem Faktor vier höherer Aktivität betriebenen  $\gamma$ -Densimeters ebenbürtig.

#### 4.1.5.5 Messung dielektrischer Eigenschaften eines Firnkerns mit der früher beschriebenen DEP-Apparatur

Die auf der früher beschriebenen DEP-Meßbank [Wilhelms et al., 1998] gemessenen dielektrischen Eigenschaften eines exemplarisch ausgewählten Firnkerns FB9707 [Oerter et al., 1999] zeigt Abbildung 4.12.

Die für die früher beschriebene DEP-Apparatur angegebenen relativen Fehler der Leitfähigkeit von 8 – 15 % für Kernabschnitte unter- und oberhalb etwa 30 m Kerntiefe [Wilhelms et al., 1998] sind im betrachteten Tiefenbereich oberhalb 15 m mit einem Abfall des Relativfehlers des negativen Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten von etwa  $\Delta\varepsilon_i^{x''} / \varepsilon_i^{x''} = 30 - 15 \%$  gut repräsentiert, besonders wenn man bedenkt, daß die bei ca.  $-10 \text{ }^\circ\text{C}$  prozessierten Kerne von Wilhelms et al. [1998] im Vergleich zum hier vorgestellten bei  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$  bearbeiteten Kern eine wenigstens doppelt so hohe Leitfähigkeit hatten. Auch der Fehler des Realteils der Dielektrizitätskonstanten liegt mit  $\Delta\varepsilon_i^{x'} / \varepsilon_i^{x'} \approx 3.5 \%$  leicht unter dem in der Referenz angege-

benen Fehler von 4.5 %. Dies demonstriert die Verbesserung der Genauigkeit für die Messung der Dielektrizitätskonstanten um einen Faktor 2–4 und für die Leitfähigkeitsmessung um einen Faktor 8 bei Einsatz der neuen Meßbank im Vergleich zu früher beschriebenen.

## 4.2 Kernmaterial zur glaziologischen Interpretation und als Testdatenbasis zur Entwicklung neuer Meßmethoden

Die in diesem Kapitel beschriebene Meßbank wurde an 29 Eis- und Firnkernen aus unterschiedlichen glaziologischen Umfeldern mit einer aufsummierten Kernlänge von 1373.4 m getestet. Die größte erreichte Teufe unter diesen Eiskernen aus der Trockenschneezone [Paterson, 1994, Kap. 2] ist 148.9 m für den während der EPICA Dronning Maud Land Kampagnen 1997–99 [Oerter et al., 2000] gebohrten Eiskern B32. Der vollständige Datensatz umfaßt weitere mit FB9802–18 bezeichnete bis zu 40 m abgeteufte Kerne und die über 100 m langen Kerne B31–33. Neben einem beim Pegelfeld Süd an der deutschen Station Neumayer [Schlosser et al., 1999] gebohrten Eiskern FB9801 sind die mit SZ99 bezeichneten obersten 54 m der begonnenen Tiefbohrung auf der Eiskappe von Severnaya Zemlya [Fritzsche et al., 1999] und ein Firnkern SZ9902 Beispiele aus glaziologischen Umfeldern mit auftretender Perkolatation [Paterson, 1994, Kap. 2]. Mit den erreichten Teufen ist der Bereich der Verdichtung von Firn zu Eis [Paterson, 1994, Kap. 2] in dem Datensatz enthalten, und er bildet eine solide Datenbasis zum Studium von mit der Dichte parametrisierten elektrischen Mischungsmodellen in Abschnitt 4.3.4. Aufgetragene Ergebnisse der dielektrischen Messungen der in diesem Abschnitt erwähnten Eiskerne bei der höchsten verwendeten Frequenz von 250 kHz findet man in Anhang C. Die zum Vergleich ebenfalls in 5 mm Tiefeninkrementen genommenen Dichtemessungen mittels  $\gamma$ -Streuung sind in Anhang C aufgetragen. Die Eiskerne der SWEDARP 1997/98 Kampagne wurden an der Universität Stockholm bearbeitet, wodurch der organisatorische Aufwand zum Transport der zum  $\gamma$ -Densimeters gehörenden  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle zu hoch gewesen wäre. Das mit den Mischungsmodellen implementierte elektrische Densimeter wurde bei der Bestimmung der Akkumulationsrate an den Kernen von Camp Victoria [Karlöf et al., 2000] und Camp Maudheimvidda [Holmlund et al., 2000] bereits angewendet. Auch bei den im Blaueis gebohrten Kernen der SWEDARP 1997/98 Expedition [Bintanja et al., 1998] liefert das elektrische Densimeter realistische Dichtewerte. Meßbeispiele für Kerne mit etwa 3" Durchmesser sind der Firnkern H aus dem Einzugsgebiet von Jutulstraumen [Melvold et al., 1999, Kern N] und der Eiskern S29 vom temperierten nordschwedischen Storglaciären Gletscher, an dem die Modellierung von synthetischen Radargrammen geplant ist [pers. Mitteilung C. Richardson, 1998]. Weitere 10 während der EPICA Dronning Maud Land Kampagne 1996/97 gebohrte und auf der früher beschriebenen DEP-Meßbank nach Abschnitt 4.1.4 analysierte Firnkerne (Maximalteufe 12.2 m) mit einer aufaddierten Tiefe von 104.6 m [Oerter et al., 1999] bilden gemeinsam mit den oben erwähnten Kernen die Grundlage für die Interpolation eines auf einem Gitter repräsentierten Datensatzes der Akkumulationsverteilung zur Modellierung [Huybrechts et al., 2000; Ühnlein, 1999].

Zur in den Referenzen oben beschriebenen Akkumulationsratenbestimmung auf Basis der Verwendung von Schichten mit durch vulkanogenen Eintrag erhöhter Leitfähigkeit als Zeitmarken wurde der in Wilhelms [1996, Abschn. 4.4.3] angegebene Algorithmus zur Bestimmung der akkumulierten Schneemasse aus den hochaufgelösten Dichtedatensätzen weiterentwickelt. Datenlücken mit schlechter Kernqualität aufgrund von Absplitterungen oder Brüchen behandelt man durch Bildung von Schwerpunkten [Bronštein und Semendjajew, 1989, Abschn. 2.6.6.1] mit gleichem Gewicht aller Punkte aus Kerntiefenintervallen von jeweils 0.5 m Länge. Die bis zur jeweiligen Kerntiefe berechnete Akkumulation ist dann die mit der Trapezregel [Opfer, 1994, Abschn. 4.1] integrierte Kurve der Schwerpunkte. Die in Anhang C beispielhaft dargestellten Datensätze sind jeweils auf die Kerntiefe bezogen. Die bei Verfügbarkeit von Dichtemessungen aus  $\gamma$ -Streuung, ansonsten mit Dichten nach dem Looyengamodell, berechnete akkumulierte Masse ist für alle Datensätze berechnet worden und wird bei der geplanten Einbringung der Datensätze in die **PANGAEA** Datenbank dort ebenfalls verfügbar sein [Diepenbroek et al., 1998, 1999].

### **4.3 Beziehung zwischen der Dichte und den komplexwertigen dielektrischen Eigenschaften polaren Firns nach dem Looyengamischungsmodell**

Auf die Oberfläche eines Gletschers fallender Schnee ist der erste Schritt der Bildung von Gletschereis [Paterson, 1994, Abschn. 2]. Die Verdichtung variiert stark von der Temperatur abhängig je nach glaziologischem Umfeld. Die Beschreibung des Verdichtungsprozesses ist z.B. Grundlage für die Bestimmung der Akkumulation und ihrer Rate [Sorge, 1935; Bader, 1954] sowie die Datierung von im Eis eingeschlossenem Gas [Schwander und Stauffer, 1984].

Polarer Firn und Eis sind Mischungen der im weiteren mit “Luft” und “Eisphase” bezeichneten Phasen. Den Einfluß von in der Eisphase und an den Kornoberflächen befindlichen Spurenstoffen schreibt man bei Betrachtung der dielektrischen Eigenschaften den Eigenschaften der Eisphase zu. Nach einer ersten erfolgreichen Bestimmung der Dichte nach dem Looyengamodell [1965] aus dielektrischen Messungen mit einem relativen Fehler von etwa 15 % [Wilhelms et al., 1998] war die Bestimmung der dielektrischen Eigenschaften der Eisphase die anfängliche Motivation zur eingehenderen Studie von Mischungsmodellen. Bevor in Abschnitt 4.3.5 die Bestimmung der Eigenschaften der Eisphase zum Auffinden einer anhand der dielektrischen Eigenschaften des polaren Firns nicht identifizierbaren Schicht mit vulkanogenem Eintrag herangezogen wird, seien zunächst brauchbare Mischungsmodelle und ihre Anwendung als elektrisches Densimeter diskutiert.

### 4.3.1 Mischungsmodelle

Prinzipiell müßte die komplexe Textur der Kristalle in der Modellierung physikalischer Eigenschaften berücksichtigt werden [Arons und Colbeck, 1995]. Einfache auf den Volumenanteilen kugelförmiger Einschlüsse beruhende Modelle liefern bereits gute Ergebnisse [Fitzgerald und Paren, 1975].

Im Zusammenhang mit Radarmessungen werden das Looyenga [1965] und das Wiener [1910] Modell diskutiert [Bogorodskii et al., 1985]. Das empirische Modell von Wiener [1910] berücksichtigt die von Evans [1965] graphisch anschaulich illustrierte Formzahl zur Berücksichtigung der Korntextur. Versuche die Formzahl zur Anwendung des Wienermodells experimentell zu bestimmen lieferten Ergebnisse mit Schwankungsbreiten in der Größenordnung der Formzahl. Die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Eiskernmessungen wurden mit einer Meßfrequenz von 250 kHz vorgenommen. Berücksichtigt man, daß selbst bei um mehrere Größenordnungen höheren Frequenzen von 9.375 GHz mit entsprechend kleinen Wellenlängen von 3.2 cm in Luft so einfache Modelle wie das von Böttcher [1952] bereits eine gute Beschreibung der Eigenschaften der Mischung auf Basis des in das Modell eingesetzten Volumenanteils und den Eigenschaften der Eisphase [Cumming, 1952] liefern, so überrascht die Unspezifität auf die Formzahl nicht. Landau und Lifschitz [1982, §9] geben für die Dielektrizitätszahl einer Mischung isotroper Teilchen eine Additivität der dritten Wurzeln der Dielektrizitätskonstanten der Komponenten an. Dieser Grenzfall gilt bis zu Gliedern zweiter Ordnung für kleine Abweichungen der Dielektrizitätskonstanten der Komponenten im Vergleich zur mittleren Dielektrizitätskonstanten und ist gerade das Looyengamodell. Als weiteren Grenzfall behandeln sie die verdünnte Emulsion kugelförmiger Teilchen in einer Matrix mit beliebigem Unterschied der Dielektrizitätskonstanten. Sie erhalten das bis in erste Ordnung des Volumenanteils gültige Böttchermodell. Die von Landau und Lifschitz [1982] diskutierte Übereinstimmung beider Modelle bis zur ersten Ordnung im Volumenanteil und bis zu zweiter Ordnung in der relativen Abweichung der Dielektrizitätskonstanten beider Phasen wird für hochfrequente Messungen von Firn und polarem Eis von Glen und Paren [1975] bestätigt. Den Autoren zufolge liefern beide Modelle im wesentlichen die gleichen Voraussagen für die Dielektrizitätskonstante der Mischung, wobei das Looyengamodell einfacher zu handhaben ist, da keine gemischten Terme mit Eigenschaften der Mischung und der Phasen auftreten. Für die Eigenschaften polaren Firns und Eises bei hohen Frequenzen wird deshalb in der hier weiter geführten Diskussion nur noch das Looyengamodell behandelt. Shabtaie und Bentley [1995] diskutieren eine Reihe weiterer Mischungsmodelle zur Auswertung von die gesamte Dicke des Eisschildes bei Dome C – in der inneren Ostantarktis gelegen – sondierenden Vierpunktmessungen. Die meisten Modelle scheiden aufgrund ihrer Asymmetrie in der Abhängigkeit der Mischungseigenschaften von den Phasen aus. D.h. Vertauschen der Phasen im Modell liefert veränderte Aussage für die Eigenschaften der Mischung, was für die Rückwärtsmodellierung weitere Annahmen voraussetzt. Die Vierpunktsondierungen des Eisschildes mit Gleichstrom werden vom Looyengamodell ebenfalls am besten beschrieben.

### 4.3.2 Annahmen zur komplexwertigen Fortsetzung des Looyengamodells

Das Looyengamodell wurde für zahlreiche Anwendungen durch Näherungsformeln approximiert [Glen und Paren, 1975; Miners et al., 1997]. Diese Näherungsformeln weichen bereits um 3 % von der exakten Looyengaformel ab [Bogorodskiĭ et al., 1985, Abschn. 3.6]. Die von Glen und Paren [1975] geführte Diskussion über die höchstwahrscheinliche Gültigkeit der Looyengagleichung für komplexwertige Dielektrizitätskonstanten unter Berufung auf die von Hanai [1962] gezeigte Gültigkeit eines dem Looyengamodell ähnlichen Bruggeman [1935] Modells wird in der Ableitung von Landau und Lifschitz [1982, §9] mathematisch streng bestätigt. Die von Landau und Lifschitz verwendete Mittelung der elektrischen Felder über Volumenbereiche und die vorgenommene Reihenentwicklung sind keine auf rein reelle Betrachtungen beschränkte Annahmen.

Mit der in dieser Arbeit verwendeten Nomenklatur lautet die Looyengamischungsformel für polaren Firn ( $\varepsilon = \varepsilon_i^{\times}$ ) als Mischung aus Luft ( $\varepsilon = 1$ ) und Eisphase ( $\varepsilon = \varepsilon_i^{\text{L}}$ ):

$$\sqrt[3]{\varepsilon_i^{\times}} - 1 = \varpi_{\text{L}} \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{\text{L}}} - 1 \right) = \frac{\rho_{\text{L}}}{\rho_{\text{E}}} \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{\text{L}}} - 1 \right). \quad (4.5)$$

Die Ersetzung des Volumenanteils der Eisphase  $\varpi_{\text{L}} = \frac{\rho_{\text{L}}}{\rho_{\text{E}}}$  durch das Verhältnis der Dichte der Mischung  $\rho_{\text{L}}$  zur Dichte von reinem Eis  $\rho_{\text{E}}$  wurde dabei unter der Annahme einer verschwindenden Dichte von Luft gemacht<sup>5</sup>. Die n-ten Wurzeln der komplexen Zahlen  $\varepsilon_i^{\times}$  und  $\varepsilon_i^{\text{L}}$  sind dabei als die n-te Wurzel des Betrags und das durch n geteilte Argument der jeweiligen Zahl in Polarkoordinatendarstellung definiert [Fischer und Lieb, 1994, Kap. V, §2]. Wegen der Verträglichkeit mit rein reellen Betrachtungen ist der Wurzelast zu wählen, der  $\sqrt[3]{1} = 1$  bestimmt<sup>6</sup>.

Frühere Anwendungen des Looyengadichtemodells [Wilhelms, 1996, Abschn. 4.1.4] besitzen eine nicht aufgelöste Inkonsistenz. Der Volumenanteil  $\varpi_{\text{L}}$  wird durch direkte Berechnung der freigestellten Gleichung bestimmt. Oberhalb von 30 m Kerntiefe liefert das mit den eingesetzten Realteilen  $\varepsilon_i^{\times'}$  und  $\varepsilon_i^{\text{L}'}$  brauchbare Ergebnisse, da die Leitfähigkeit klein ist. Im Kernabschnitt unterhalb 30 m ist der Beitrag der Leitfähigkeit zu berücksichtigen und entsprechend werden die gemessene komplexwertige Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i^{\times}$  und die nach Literaturwerten für reines polares Eis  $\rho_{\text{E}}$  bestimmte Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i^{\text{L}}$  eingesetzt. Der berechnete Volumenanteil  $\varpi_{\text{L}}$  ist dann komplexwertig, allerdings ohne physikalisch motivierte Interpretation für den Imaginärteil. Zur Beseitigung dieser Inkonsistenz kommen die Betrachtung des Realteils oder des Betrags des Volumenanteils in Betracht. Beide Optionen

<sup>5</sup>Dies ist in sehr guter Näherung erfüllt. Das Volumen eines mol eines idealen Gases nimmt unter Normalbedingungen (0°C, 1013.25 hPa) ein Volumen von 22.414 l [Mortimer, 1987, Kap. 10, Abschn. 2] ein. Nach dem Gay-Lussacschen Gesetz [Mortimer, 1987, Kap. 10, Abschn. 3] nimmt es dann bei -50 °C 18.311 l ein. Ein mol Luft als Mischung von Stickstoff und Sauerstoff wiegt in guter Näherung 80 % × 28 g + 20 % × 32 g = 28.8 g. Die Dichte unter Normaldruck bei -50 °C ist dann 0.0016  $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Im Vergleich zur Dichte von reinem Eis  $\rho_{\text{E}} = 0.9197 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  bei -20 °C [Petrenko und Whitworth, 1999, Umschlag] sind das 1.9 ‰, die gegen den angenommenen Relativfehler der Dichte reinen Eises  $\Delta^{\text{S}} \rho_{\text{E}} / \rho_{\text{E}} = 3 \text{ ‰}$  vernachlässigbar sind.

<sup>6</sup>Die beiden weiteren möglichen Äste würden  $\sqrt[3]{1} = e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}$  berechnen und die Formeln nur durch unnötige Vorfaktoren verkomplizieren.

liefern große Fehler in der Größenordnung von bis zu 20 %, da die Leitfähigkeitsmessung mit der in Abschnitt 4.1.4 diskutierten früher benutzten Meßbank stärker mit systematischen Fehlern behaftet ist. Die Übereinstimmung der nach dem Looyengamodell berechneten Dichten mit aus  $\gamma$ -Streuung bestimmten kann für alle drei oben beschriebenen Optionen nicht schlüssig für den gesamten Kerntiefenbereich gelöst werden, wenn auch die Ergebnisse einzelner Optionen im Bereich ober- und unterhalb 30 m Kerntiefe wesentlich besser als aufgrund der Fehler zu erwarten übereinstimmen.

Im Rahmen der Bearbeitung der Firnkerne der EPICA Dronning Maud Land Kampagne 1996/97 (siehe Abschnitt 4.2) trat eine Fragestellung auf, deren Lösung gleichzeitig der Schlüssel zur Beseitigung der Inkonsistenz in der Anwendung des Looyengamischungsmodells war. Nach an Schneeschnitten bestimmten Akkumulationsraten war in 10 m tief abgeteufte Firnkernen ein Horizont mit erhöhter Leitfähigkeit durch vulkanogenen Eintrag zu erwarten. Die Bestimmung der Tiefe dieses Horizonts mit erhöhter Leitfähigkeit vereinfacht das Auffinden eines oft zur Datierung herangezogenen Bereichs mit erhöhter Tritiumkonzentration durch Eintrag aus Kernwaffentests [Graf et al., 1999], die zur Zeit des Ausbruchs des Vulkans Agung im Kalenderjahr 1963 [Newhall und Self, 1982] durchgeführt wurden. Kennt man grob die Tiefe mit dem Bombentritiumhorizont, so reduziert sich die Beprobung auf die Tiefenumgebung des Horizonts im Vergleich zum gesamten Kern.

Die erwartete Spitze erhöhter Leitfähigkeit war nicht in allen Profilen der dielektrischen Eigenschaften erkennbar, obwohl sie im Untersuchungsgebiet praktisch sicher zu erwarten ist. Die Nichterkennbarkeit der Spitze hat ihre Ursache in der starken Variabilität der Dichte in den oberen Firnmetern. Die Leitfähigkeitsschwankungen durch Dichtevariation können größer als die durch in die Eisphase eingetragene Spurenstoffe sein. Für die Anwendung des Looyengamischungsmodells bedeutet die Umsetzung dieser Erklärung zur Bestimmung der dielektrischen Eigenschaften der reinen Eisphase:

- Der Volumenanteil der Eisphase  $\varpi_L$  ist unbekannt. Er wurde in der bereits beschriebenen Anwendung des Looyengamodells am Eiskern [Wilhelms, 1996, Abschn. 4.1.4] bestimmt und mit der Dichte des reinen Eises in die Dichte der Mischung umgerechnet.
- Die Leitfähigkeit der Eisphase ist, wie im Einleitungskapitel 1 ausführlich mit Literaturangaben belegt, vom Spurenstoffgehalt abhängig. Der bisher fest mit einem Literaturwert besetzte Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $-\varepsilon_i^{L''}$  ist veränderlich und unbekannt.
- Der Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_i^{L'}$  ist konstant und scheint nicht mit den Spurenstoffen im Eis verknüpft zu sein [Gough, 1973]. Matsuoka et al. [1983] finden innerhalb einer Fehlerschranke von  $\pm 1$  % einen dotierungsunabhängigen Realteil der Dielektrizitätskonstanten. Die Messungen wurden bei einer Meßfrequenz von 5 GHz in Hohlleitern ausgeführt. Die Literaturwerte der relativen Dielektrizitätskonstanten [Petrenko und Whitworth, 1999, Abschn. 5.3.1] variieren im Frequenzbereich von 1 MHz – 39 GHz ebenfalls nur im Rahmen von 1.25 %, so daß die Ergebnisse auf die in dieser Arbeit vorgenommenen Messungen bei 250 kHz übertragbar sein sollten.

Matsuoka et al. [1983] betrachten Dotierungen mit Kochsalz (NaCl), Schwefelsäure (H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) und Salpetersäure (HNO<sub>3</sub>) in einer Konzentrationsgrößenordnung von 10  $\frac{\mu\text{g}}{\text{g}}$ , die an antarktischen Küstenstationen im Schnee gefundene Konzentrationen übersteigen. So sind z.B. bei der englischen Station Halley im Schnee für Nitrationen gefundene Konzentrationen von maximal 0.5  $\frac{\mu\text{g}}{\text{g}}$  [Mulvaney et al., 1998] mehr als eine Größenordnung kleiner, Chlorionen mit 9  $\frac{\mu\text{g}}{\text{g}}$  und Natriumionen mit 1.5  $\frac{\mu\text{g}}{\text{g}}$  [Wolff et al., 1998] liegen in vergleichbarer Größenordnung. Minikin [1994, Anhang A.4] gibt für den küstennah auf dem Filchner-Ronne-Schelfeis gelegenen Eiskern B13 einen Sulfatexzeß von 95 ppb bei einer Chloridionenkonzentration von 868 ppb an. Die aus der Beziehung für den Sulfatexzeß [Minikin et al., 1998] berechnete Sulfationenkonzentration von 95 ppb + 0.14 × 868 ppb = 0.2  $\frac{\mu\text{g}}{\text{g}}$  ist mehr als eine Größenordnung geringer als die von Matsuoka et al. [1983] betrachtete Konzentration. Der Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_i^{L'}$  wird in der Ableitung als von der Spurenstoffkonzentration unabhängig angenommen, bzw. Bereiche, in denen diese Annahme nicht stimmt, werden von der Betrachtung ausgeschlossen.

Gemeinsam mit der gemessenen Dielektrizitätskonstanten des Eiskerns  $\varepsilon_i^{\times}$  belegen die drei Prinzipien alle in der Looyengafomel (4.5) auftretenden Größen. Nun ist zu klären, ob der unbekannte Volumenanteil  $\varpi_L$  und der unbekannte Imaginärteil  $-\varepsilon_i^{L''}$  der Eisphase aus den Meßdaten bei angenommenem Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_i^{L'}$  eindeutig bestimmt werden können oder ob weitere Annahmen zur eindeutigen Festlegung nötig sind. Zur Betrachtung der Auflösbarkeit der Looyengagleichung (4.5) führt man eine zweidimensionale reelwertige Hilfsfunktion  $g$  aus der Differenz ihrer beiden Seiten ein. Die Auflösung der Looyengagleichung nach den gesuchten Parametern ist dann der Bestimmung der Nullstellen der Hilfsfunktion  $g$  äquivalent:

$$\begin{pmatrix} \text{Re } g(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''}) \\ \text{Im } g(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \text{Re} \left( \varpi_L \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{L'} - i \varepsilon_i^{L''}} - 1 \right) - \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{\times}} - 1 \right) \right) \\ \text{Im} \left( \varpi_L \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{L'} - i \varepsilon_i^{L''}} - 1 \right) - \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{\times}} - 1 \right) \right) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Einen Überblick über mögliche Lösungen geben graphische Darstellungen. Das in Anhang B aufgelistete Programm `epsgrid.c` berechnet die Eiskerndielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{\times}$  auf einem Gitter aus Einträgen des Volumenanteils  $\varpi_L$  und des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  der Eisphase in Abhängigkeit des als Kommandozeilenoption angegebenen Realteils der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Re}(\varepsilon_i^L)$ . Das Skript `loomap.gmt` (Anhang B) erzeugt aus der Ausgabe von `epsgrid.c` dem in Abbildung 4.13 für einen Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Re}(\varepsilon_i^L) = 3.12$  gezeigten Beispiel vergleichbare graphische Darstellungen.

Bei Betrachtung der Konturabbildungen in Abbildung 4.13 fällt zunächst die Symmetrie des Realteils  $\text{Re}(\varepsilon_i^{\times})$  und Antisymmetrie des Imaginärteils  $\text{Im}(\varepsilon_i^{\times})$  der Dielektrizitätskonstanten des Eiskerns unter Vorzeichenwechsel des Imaginärteils der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  auf. Entsprechend der Diskussion für die Abbildungseigenschaften der effektiven Dielektrizitätskonstanten in Abschnitt 3.1.2.1 sind diese Symmetrieeigenschaften Ausdruck der Freiheit in der Festlegung des Vorzeichens des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten (2.24) in Abschnitt 2.2.1. Die Verträglichkeit

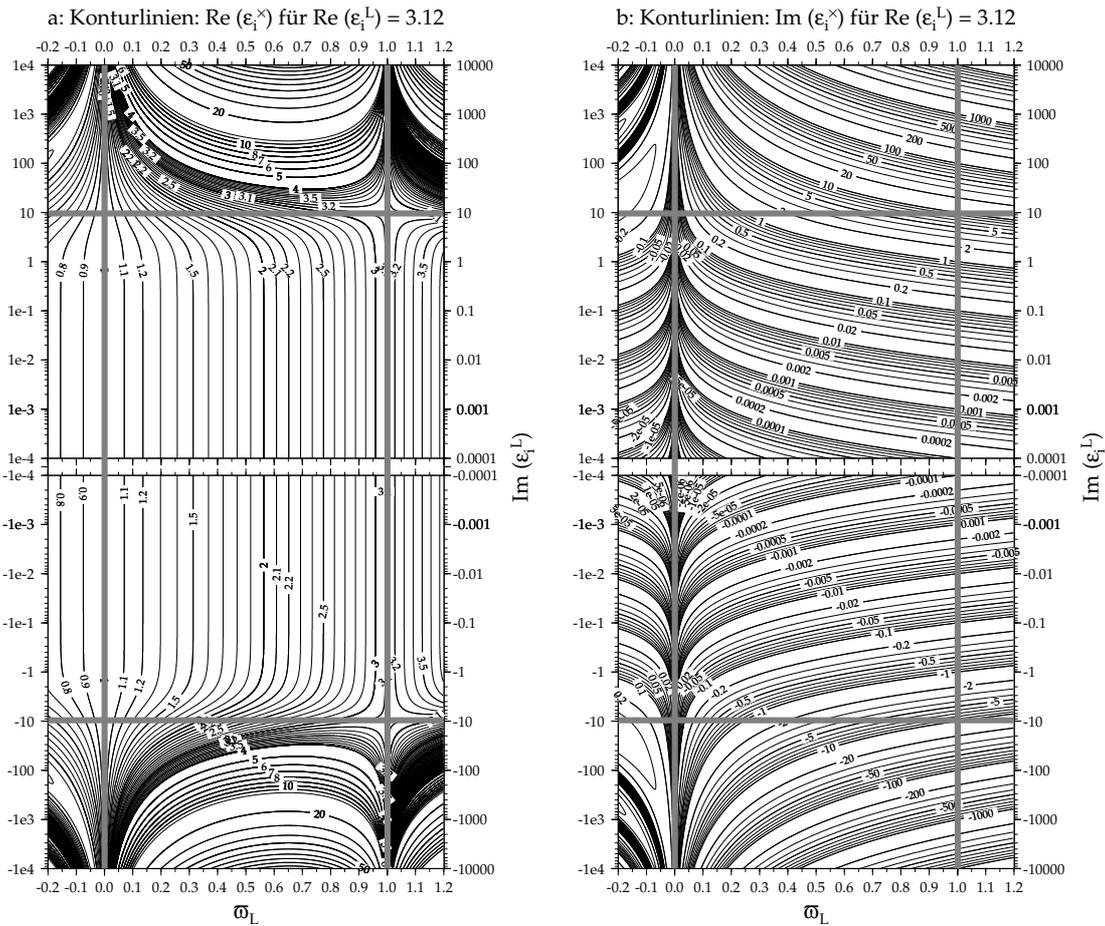


Abbildung 4.13: Abbildungseigenschaften der Looyengagleichung für festgehaltenen Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase in der Mischung mit Luft

Die mit dem Skript `loomap.gmt` erzeugte Ausgabe für Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^x$  der Mischung einer Eisphase mit Luft ist der Übersichtlichkeit wegen getrennt nach Real-  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  (a:) und Imaginärteil  $\text{Im}(\varepsilon_i^x)$  (b:) dargestellt. Bei festgehaltenem Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Re}(\varepsilon_i^L) = 3.12$  wurden der Volumenanteil  $\varpi_L$  und der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  variiert. Der aufgetragene Bereich wurde ein wenig über den physikalisch sinnvollen Definitionsbereich  $\varpi_L \in [0, 1]$  hinaus – durch die grauen vertikalen Balken abgeteilt – erweitert, um die mögliche Existenz mathematischer Lösungen zu unterstreichen, die physikalisch nicht sinnvoll sind. Positive und negative Werte von  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  sind zur graphischen Veranschaulichung der Symmetrie des Realteils  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  und der Antisymmetrie des Imaginärteils  $\text{Im}(\varepsilon_i^x)$  der Eiskerndielektrizitätskonstanten unter komplexer Konjugation aufgetragen. Die horizontalen Balken schneiden die obere Begrenzung des Definitionsbereichs  $\varpi_L = 1$  in einem Sattelpunkt von  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$ . Ab dem Sattelpunkt verändert sich zu größeren Beträgen von  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  hin das Verhalten von  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  qualitativ. Die bei fest gewähltem  $\text{Im}(\varepsilon_i^x)$  eindeutige Zuordnung eines Volumenanteils  $\varpi_L \in [0, 1]$  zu  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  findet man bei betragsmäßiger Beschränkung auf Imaginärteile der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  zwischen den horizontalen grauen Balken auch für fest gewählte Werte von  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$ . Für betragsmäßig größere  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  als der Koordinate des Sattelpunkts (jenseits der grauen Balken) findet man bei gegebenem  $\text{Re}(\varepsilon_i^x)$  zwei Zuordnungsmöglichkeiten für  $\varpi_L$  zu  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$ . Vergleicht man die Konturliniendarstellungen für Real- (a:) und Imaginärteil (b:), so finden sich bei Zulassung von die Koordinate des Sattelpunkts betragsmäßig überschreitenden Werten des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  für manche Konturlinien mehr als ein möglicher Schnittpunkt, so daß eine eindeutige Zuordnung von Urbildkoordinaten  $\varpi_L$  und  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  nicht ohne weitere Annahmen möglich ist.

der komplexen Fortsetzung des Looyengamodells mit der komplexen Fortsetzung der Materialeigenschaften ist damit gezeigt.

### 4.3.3 Numerische Umkehrung mit dem Newton-Verfahren

Die Auflösung nach den unbekanntenen Größen  $\varpi_L$  und  $\varepsilon_i^{L''}$  ist nicht mehr unmittelbar algebraisch möglich und erfolgt mit dem bereits in Abschnitt 3.1.3 für holomorphe Funktion beschriebenen und in Abschnitt 3.2.7.3 zur Bestimmung der Nullstelle einer reellen Funktion in einer Dimension verwendeten Newtonschen Verfahren. Die Diskussion der numerischen Stabilität und Eindeutigkeit der Lösungen wird zunächst zurückgestellt, da dazu die nun dargestellten analytischen Methoden herangezogen werden.

Die Newtonfolge zur Umkehrung der in Gleichung (4.6) definierten Hilfsfunktion  $g$  entsprechend Heuser [1990b, Kap. 189] formuliert man zu:

$$\left(\begin{array}{c} \varpi_L \\ \varepsilon_i^{L''} \end{array}\right)^{n+1} = \mathfrak{N}\left(\left(\begin{array}{c} \varpi_L \\ \varepsilon_i^{L''} \end{array}\right)^n\right) \equiv \left(\begin{array}{c} \varpi_L \\ \varepsilon_i^{L''} \end{array}\right)^n - \left(\mathcal{J}_{\left(\begin{array}{c} \text{Re } g \\ \text{Im } g \end{array}\right)}(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})\right)^{-1} \circ g\left(\left(\begin{array}{c} \varpi_L \\ \varepsilon_i^{L''} \end{array}\right)^n\right). \quad (4.7)$$

Das Inverse der Jacobi-Matrix  $\mathcal{J}^{-1}$  berechnet sich aus der Invertierung der in Gleichung (3.7) auf Seite 54 angegebenen Matrix mit partiellen Ableitungen der Hilfsfunktion  $g$  als Einträgen. Die reellwertigen Argumente  $\varpi_L$  und  $\varepsilon_i^{L''}$  der Hilfsfunktion  $g$  sind keine Komponenten einer komplexen Variablen und die vereinfachte Berechnung der Jacobimatrix aus einer holomorphen Abbildung nach Gleichung (3.7) ist nicht möglich. Die Berechnung der Einträge vereinfacht sich allerdings durch Benutzung der aus den Beziehungen zwischen den Ableitungen einer reell differenzierbaren Abbildung über den komplexen Zahlen [Remmert, 1995a, Kap. 1, §4, Abschn. 2] unmittelbar folgenden Verträglichkeit der Bildung des Real- bzw. Imaginärteils mit der partiellen Differentiation und Anwendung auf die eingesetzte Hilfsfunktion (4.6):

$$\frac{\partial}{\partial \varpi_L} \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} (g(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \frac{\partial g}{\partial \varpi_L} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \sqrt[3]{\varepsilon_i^{L'} - i \varepsilon_i^{L''} - 1} \right). \quad (4.8)$$

Bei der partiellen Differentiation nach dem Imaginärteil der Hilfsfunktion benutzt man die Kettenregel [Remmert, 1995a, Kap. 6, §1, Abschn. 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} (g(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})) &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \frac{\partial(\varpi_L (\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) - (\sqrt[3]{\varepsilon_i^X} - 1))}{\partial \varepsilon_i^L} \times \frac{\partial \varepsilon_i^L}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \frac{\varpi_L}{3 (\sqrt[3]{\varepsilon_i^L})^2} \times \frac{\partial(\varepsilon_i^{L'} - i \varepsilon_i^{L''})}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left( \frac{-i \varpi_L}{3 (\sqrt[3]{\varepsilon_i^L})^2} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Im} \\ -\text{Re} \end{array} \right\} \left( \frac{\varpi_L}{3 (\sqrt[3]{\varepsilon_i^{L'} - i \varepsilon_i^{L''}})^2} \right). \end{aligned}$$

Die letzte Umformung in der Gleichungskette ist geometrisch die Drehung um  $90^\circ$  in mathematisch negativer Richtung (Rechtsdrehung) bei Multiplikation mit dem

Negativen der imaginären Einheit  $-i$ . Dabei wird der Imaginärteil auf den Realteil und der Realteil auf den negativen Imaginärteil abgebildet. Die Anwendung des Newtonschen Verfahrens setzt die Invertierbarkeit der Jacobimatrix voraus. Die Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{(\text{Re } g, \text{Im } g)}(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})$  ist quadratisch und deshalb genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante verschwindet [Heuser, 1990b, Satz 172.1]. Die Nullstellenbestimmung der Determinante

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{J}_{\left(\begin{smallmatrix} \text{Re } g \\ \text{Im } g \end{smallmatrix}\right)}(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''}) \right| &= \tag{4.10} \\
&= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varpi_L} \text{Re}(g) & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \text{Re}(g) \\ \frac{\partial}{\partial \varpi_L} \text{Im}(g) & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \text{Im}(g) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \text{Re}(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) & \text{Im}\left(\frac{\varpi_L}{\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}^2}\right) \\ \text{Im}(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) & -\text{Re}\left(\frac{\varpi_L}{\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}^2}\right) \end{pmatrix} \right| = \\
&= -\text{Re}(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) \text{Re}\left(\frac{\varpi_L}{\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}^2}\right) - \text{Im}(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) \text{Im}\left(\frac{\varpi_L}{\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}^2}\right) = \\
&= -\frac{\varpi_L}{3} \text{Re}\left(\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1\right) \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}\right)^2}\right) = -\frac{\varpi_L}{3\left|\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}\right|^2} \text{Re}\left(\varepsilon_i^L - \left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}\right)^2\right) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

reduziert sich für einen nichtverschwindenden Volumenanteil der Eisphase  $\varpi_L$  auf die Lösung der Gleichung  $\text{Re}\left(\varepsilon_i^L - \left(\varepsilon_i^L\right)^{2/3}\right) \stackrel{!}{=} 0$ . Die Umformung von der vorletzten zur letzten Zeile ist die Zusammenfassung des euklidischen Skalarprodukts der als zweidimensionale Vektoren aufgefaßten Zahlen nach  $\text{Re}(w\bar{z}) = \text{Re}(w)\text{Re}(z) + \text{Im}(w)\text{Im}(z)$  [Remmert, 1995a, Kap. 0, §1, Abschn. 3]. Macht man den Nenner reell, so hebt sich die komplexe Konjugation im zweiten Faktor gerade auf und der reelle Betrag im Nenner kann zum Vorfaktor gezogen werden.

Die Koordinaten des in Abbildung 4.13 beobachteten Sattelpunkts für den aus Umformung der Looyengagleichung (4.5) berechneten Realteil der relativen Dielektrizitätskonstanten  $\text{Re}(\varepsilon_i^\times) = \text{Re}\left(\left(\varpi_L\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1\right) + 1\right)^3\right)$  des Eiskerns bei vollständiger Raumausfüllung mit der Eisphase ( $\varpi_L = 1$ ) findet man bei verschwindendem Gradienten dieser Funktion. Die partielle Ableitung nach dem Volumenanteil an der Sattelstelle

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varpi_L} \text{Re}\left(\varepsilon_i^\times\right) \right|_{\varpi_L=1} = \text{Re}\left(3\left(\varpi_L\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1\right) + 1\right)^2\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1\right)\right) \Big|_{\varpi_L=1} = 3 \text{Re}\left(\varepsilon_i^L - \left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}\right)^2\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.11}$$

liefert für die Koordinate die schon für das Verschwinden der Determinante der Jacobimatrix der Hilfsfunktion gefundene notwendige Bedingung (4.10). Die partielle Ableitung nach dem negativen Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  an der Sattelstelle

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^{L''}} \text{Re}\left(\varepsilon_i^\times\right) \right|_{\varpi_L=1} = \text{Re}\left(3\left(\varpi_L\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1\right) + 1\right)^2 \frac{\varpi_L}{\left(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L}\right)^2} (-i)\right) \Big|_{\varpi_L=1} = 3 \text{Re}(-i) = 0 \tag{4.12}$$

verschwindet und bestätigt, daß der bei  $\varpi_L = 1$  durch die Bedingung (4.11) bzw. (4.10) festgelegte Punkt tatsächlich eine sogenannte durch Verschwinden des Gradienten gekennzeichnete kritische Stelle [Heuser, 1990b, Kap. 173] ist.

Bei der Anwendung des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung des Volumenanteils  $\varpi_L$  und des negativen Imaginärteils der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  aus den gemessenen dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_i^\times$  wählt man z.B. Startwerte  $(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^0 =$

$(1/2, \varepsilon_i^{\times''})$  und iteriert die Newtonfolge bis ein sogenannter Fixpunkt  $(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^\times$  erreicht ist, d.h. die Iteration von  $\mathfrak{N}((\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^\times) = (\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^\times$  diesen Fixpunkt festhält. Die Implementation im in Anhang B aufgelisteten Quellcode `looyenga.c` beruht bzgl. der Abbruchbedingung auf denselben Prinzipien wie bei der Programmierung der in Abschnitt 3.1.3.3 (Seite 56 f.) beschriebenen Funktion `epsinv` zur Berechnung der dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_i^\times$  aus den gemessenen effektiven Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_m^*$ . Anders als bei der Behandlung der Isolierschicht an eben erwähnter Stelle besitzt das Newtonsche Verfahren bei der Rückwärtsmodellierung des Looyengamodells zwei voneinander getrennte Fixpunktbereiche. Die Trennlinie ist die durch die Bedingung für das Verschwinden der Determinante der Jacobimatrix der Hilfsfunktion  $g$  (4.10) festgelegte Gerade. In der Routine zur Durchführung des Newtonschen Verfahrens `inv100` (Quellcode `looyenga.c` in Anhang B) ist ein ebenfalls auf dem Newtonschen Verfahren basierender Algorithmus zur Bestimmung der Nullstelle der Bedingung (4.10) für das Verschwinden der Jacobimatrix der Hilfsfunktion in Abhängigkeit von  $\varepsilon_i^{L''}$  integriert. Die  $\varepsilon_i^{L''}$  Koordinate der grauen Trennlinie zur Kennzeichnung der Fixpunkteinzugsgebiete in Abbildung 4.14 ist auf diese Weise berechnet und damit ist auch gezeigt, daß die Linie den Sattelpunkt bei  $\varpi_L = 1$  (Bedingung (4.12)) schneidet, da die Bedingungen (4.11) und (4.10) an die  $\varepsilon_i^{L''}$  Koordinate identisch sind.

An der Trennlinie der Fixpunktattraktoren mit verschwindender Determinante der Jacobimatrix (4.10) ist das in die Newtonfolgenabbildung (4.7) eingesetzte Inverse der Jacobimatrix (explizite Berechnungsformel für das Inverse einer  $2 \times 2$ -Matrix z.B. in Fischer [1989, Abschn. 4.3.6]) nicht definiert.

Bei der Diskussion des Newtonschen Verfahrens zur Behandlung der Isolierschicht in Abschnitt 3.1.3.4 (Seite 57 ff.) wurde die Injektivität, d.h. die Eindeutigkeit der bestimmten Lösung, auf einem Gitter durch Nachrechnen gezeigt. Ein analoger Test für den hier diskutierten Fall ist die Berechnung von  $\varepsilon_i^\times$  und Vergleich des mit dem Newtonschen Verfahren aus dem Startwert  $(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^0 = (1/2, \varepsilon_i^{\times''})$  berechneten Fixpunkts  $(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})^\times$  mit dem zur Berechnung von  $\varepsilon_i^\times$  eingesetzten Urbild  $(\varpi_L, \varepsilon_i^{L''})$ . Das Testbeispiel für die in Abbildung 4.14 eingesetzten Werte ergibt keine signifikante Abweichung für Gitterpunkte mit betragsmäßig kleinerer  $\varepsilon_i^{L''}$  Koordinate als die durch die dunkelgraue Trennlinie für das Verschwinden der Determinante der Jacobimatrix angezeigte.

Eine vorsichtige Rückwärtsmodellierung wird alle Datenpunkte aussortieren, die nicht als verlässlich angesehen werden können. Ein möglicher Ansatz dazu ist, die äußere Grenze des Fixpunktbereichs um  $\varepsilon_i^{L''}$  als betragsmäßige Begrenzung für die erlaubten Lösungen anzusetzen. Überschreitet die tatsächlich im Eiskern gefundene Leitfähigkeit der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  die äußere Grenze des Fixpunktbereichs, so kann der zu denselben dielektrischen Eiskerneigenschaften  $\varepsilon_i^\times$  gefundene Urbildpunkt unterhalb der Fixpunktgrenze eine Fehlinterpretation sein. Für die im nächsten Abschnitt behandelte praktische Anwendung des Looyengamodells als Densimeter ist deshalb noch eine Schranke für die Leitfähigkeit, d.h. den negativen Imaginärteil der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  zu den Bedingungen zur Bestimmung der dielektrischen Eigenschaften der reinen Eisphase (Seite 111) hinzuzufügen, um nur eindeutige Lösungen für den Volumenanteil  $\varpi_L$  und den negativen Imaginärteil der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  zuzulassen:

- Der Betrag des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase

## Konturlinien: $\text{Re}/\text{Im} (\varepsilon_i^\times)$ für $\text{Re} (\varepsilon_i^L) = 3.12$

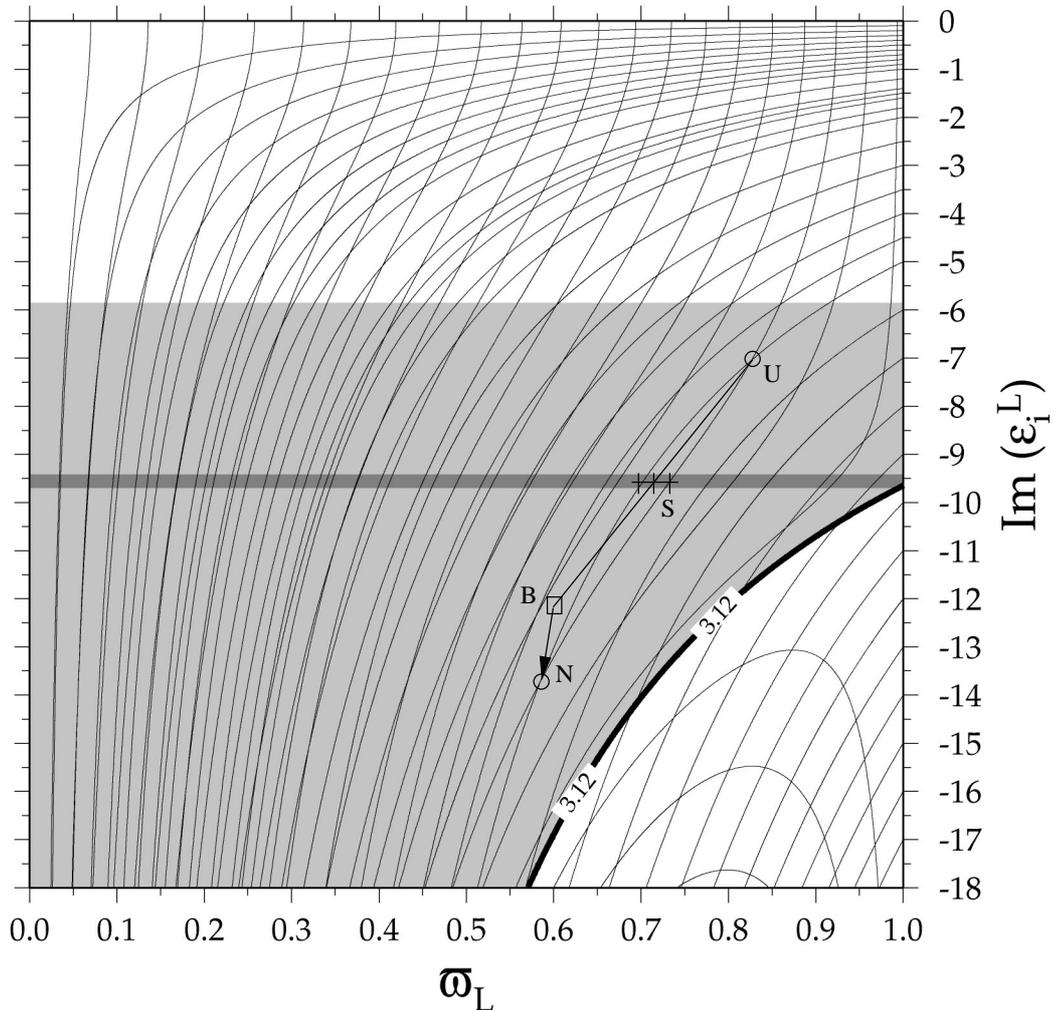


Abbildung 4.14: Nicht injektiver Bereich der Looyengaabbildung

Gezeigt ist der Bereich um die dunkelgrau eingetragene Trennlinie unterschiedlicher Fixpunktattraktionsbereiche. Die Konturlinien von  $\varepsilon_i^\times$  wurden nicht bezeichnet, um die doppelte Überschneidung von Linien jeweils beiderseits der Trennlinie klar hervorzuheben. Die doppelte Überschneidung von Konturlinien heißt, daß die Abbildung nicht injektiv sein kann, da es Bildpunkte mit zwei Urbildern gibt. Deshalb ist die Umkehrung nicht eindeutig. Zur Konstruktion des hellgrauen Bereichs wurde eine Routine `alternateloopoint` in `looyenga.c` (Anhang B) programmiert, die zu einer gegebenen Koordinate U einen Startpunkt B für das Newtonsche Verfahren jenseits der Trennlinie konstruiert. Dazu bestimmt man die Schnittpunkte S der Konturlinien durch das Urbild U mit der Trennlinie und spiegelt die Koordinate durch den Mittelpunkt der Schnittpunkte. Der gespiegelte Punkt B ist Startwert einer Newtonfolge. Der hellgraue Bereich setzt sich aus einzelnen engmaschigen Gitterpunkten zusammen, für die im gezeigten Ausschnitt zwei verschiedene Fixpunkte U und N mit oben beschriebener Startwertkonstruktion gefunden wurden. Vergleichbare Darstellungen können für andere Parameterübergaben an das Skript `loomap.gmt` (Anhang B) als Schnittstelle zum Programm `epsgrid.c` (Anhang B) erzeugt werden.

$|\text{Im}(\varepsilon_1^L)| = |\varepsilon_1^{L''}|$  ist beschränkt. Ist die Schranke unterhalb der Grenze der Fixpunktbereiche im Bereich um den verschwindenden Imaginärteil der Eisphase ( $\varepsilon_1^{L''} = 0$ ), so ist die Schranke direkt einzusetzen. Ist die Schranke größer als der Betrag der Fixpunktbereichsgrenze, so können Punkte innerhalb des Fixpunktbereichs um Null Fehlinterpretationen sein, und die Schranke der sicher identifizierten Lösungen liegt entsprechend innerhalb des Fixpunktbereichs. Eine mögliche Konstruktion dieser Schranke unterhalb der Bereichsgrenze ist das anhand Abbildung 4.14 beispielhaft demonstrierte Verfahren. Im dort angegebenen Beispiel ist die Grenze entsprechend der Berandung des aus korrespondierenden Fixpunkten konstruierten hellgrauen Bereichs zu wählen, zu gegebenem  $|\varepsilon_1^{L''}| = 18$  also eine Schranke  $\approx 6$ .

Andere Möglichkeiten zur eindeutigen Festlegung der Eigenschaften der Eisphase ist die annähernde Vorgabe ihres Volumenanteils zur Wahl des Startwerts in der Anwendung des Newtonschen Verfahrens. Dieses Vorgehen sollte aber eine Stabilitätsbetrachtung des jeweiligen Anwendungsfalls beinhalten und ist deshalb nicht für die automatisierte Betrachtung zur im nächsten Abschnitt folgenden hochaufgelösten Dichtebestimmung in Abhängigkeit von der Kerntiefe geeignet und sollte der Einzelbetrachtung z.B. von Horizonten mit vulkanogenen Spurenstoffen vorbehalten bleiben.

#### 4.3.4 Elektrisches Densimeter

Aus den gemessenen dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_1^{\times}$  bestimmt man mit der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Umkehrung des Looyengamodells den Volumenanteil  $\varpi_L$  und den Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\text{Im}(\varepsilon_1^L)$  der Eisphase. Die Umkehrung beruht auf der Annahme eines bekannten Realteils der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1^{L'}$ . Setzt man für den Realteil der Dielektrizitätskonstanten den Literaturwert für reines künstlich hergestelltes Eis  $\varepsilon_1^{L'} = 3.2$  [Petrenko, 1993, S. 6] ein, der mit der Mehrzahl der in Hobbs [1974, Tabelle 2.1] zusammengetragenen Werte übereinstimmt, so ergeben sich für die tieferen Bereiche mit größeren Dichten zu niedrige Volumenanteile nach dem Looyengamodell. Zur Abschätzung der einzusetzenden Dielektrizitätskonstanten betrachtet man zunächst die aus dielektrischen Messungen bei bekannter Dichte berechnete Dielektrizitätskonstante der Eisphase. Abbildung 4.15 zeigt die Variation der durch Schwerpunktbildung geglätteten Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_1^{L'}$  mit der Kerntiefe.

Der beobachtete Abfall der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1^{L'} = 3.2 \dots 3.1$  bis zu einer Dichte von  $0.55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und ein bei größeren Tiefen konstanter Wert  $\varepsilon_1^{L'} = 3.1$  sind typisch für die Kerne aus Dronning Maud Land [Oerter et al., 2000] und können auch an den Kernen B26 und B29 der Nordgrönlandtraverse [Schwager et al., 1996] beobachtet werden. Das hier beobachtete Verhalten ist deshalb zumindest für die Zone trockenen Schnees [Paterson, 1994, S. 10] als typisch anzusehen.

Der gefundene Wert von  $\varepsilon_1^{L'} = 3.1$  widerspricht zunächst dem oben angegebenen Wert von 3.2. Eine genauere Literaturstudie zeigt einerseits, daß für künstliches Eis Dielektrizitätskonstanten von 3.1 gefunden wurden [Auty und Cole, 1952]. Fitzgerald

## Looyengamodell an FB9817

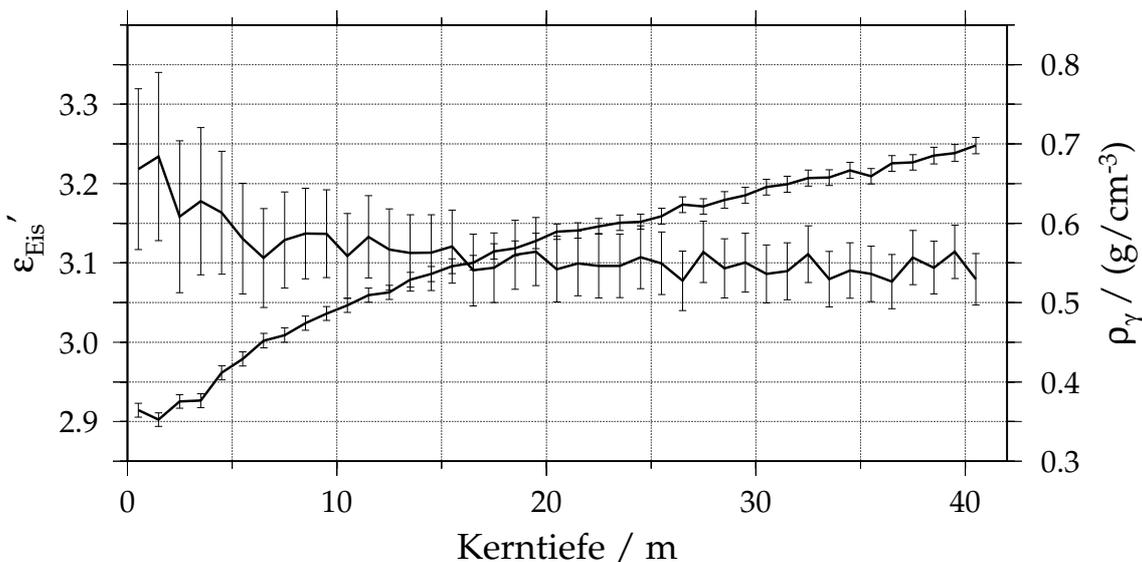


Abbildung 4.15: Berechnung dielektrischer Eigenschaften der Eisphase nach dem Looyengamodell aus geglätteten Datensätzen

Die dielektrischen Eigenschaften der Eisphase des Kerns FB9817 [Oerter et al., 2000] sind nach dem entsprechend aufgelösten Looyengamodell (4.5)  $\epsilon_1^L = (\rho_E/\rho_\gamma (\sqrt[3]{\epsilon_1^x} - 1) + 1)^3$  aus den dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns und der aus  $\gamma$ -Streuung bestimmten Dichte berechnet. Die Dichte von reinem Eis ist mit dem noch zu diskutierenden Wert  $\rho_E = 0.9197 \pm 0.003 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  angenommen. Die vor der Berechnung vorgenommene Schwerpunktbildung [Bronstein und Semendjajew, 1989, Abschn. 2.6.6.1] über 1 m lange Abschnitte reduziert durch Mittelung das Rauschen. Man beobachtet einen Abfall der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1^{L'} = 3.2 \dots 3.1$  in den oberen Kernmetern bis zur Tiefe, in der eine Dichte von  $0.55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  erreicht wird. Mit zunehmender Tiefe bleibt der Realteil der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1^{L'} = 3.1$  konstant. Die Ordinatenskala der mit der Kerntiefe wachsenden Dichte wurde so gewählt, daß eine Dichte von  $0.55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  einer Dielektrizitätskonstanten von  $\epsilon_1^{L'} = 3.1$  entspricht. Bei genannter Dichte von  $0.55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  geht der dominierende Prozeß der Verdichtung von der Setzung zur Rekristallisation und Verformung über [Paterson, 1994, S. 18].

und Paren [1975] berichten über grönländische Eisproben mit einer Dielektrizitätskonstanten von  $\epsilon_1^{L'} = 3.13 \pm 0.02$ . Aus Radarwellenausbreitungsgeschwindigkeiten gemessene Dielektrizitätskonstanten für gegründetes grönländisches und antarktisches Eis liegen zwischen  $3 \dots 3.11$  [Bogorodskii et al., 1985, Tabelle IX]. Wählt man nur die Messungen an Eisschilden über 1 km Dicke, was den Einfluß von weniger dichten Firnschichten mit niedriger Dielektrizitätskonstante minimiert, so ist für polares Eis  $\epsilon_1^{L'} = 3.08 \dots 3.11$ . Zum Einsetzen in das Looyengamodell wird deshalb hier  $\epsilon_1^{L'} = 3.12 \pm 0.04$  angenommen. Dieser Wert ist der Mittelwert der um den Literaturwert für reines Eis  $\epsilon_1^{L'} = 3.16$  bei  $-20 \text{ }^\circ\text{C}$  [Petrenko und Whitworth, 1999, Umschlag] ergänzten Spanne der in diesem Absatz angegebenen Dielektrizitätskonstanten für polares Eis. Die großzügig gewählte Fehlerspanne der halben Intervall-

breite trägt der Variation der in der Literatur gefundenen Werte und der Abnahme der Dielektrizitätskonstanten in den oberen Kernmetern Rechnung.

Auch die Dichte von Eis ist eine variierende Größe. So berichtet Dantl [1969] von Dichtefluktuationen von bis zu 3 ‰. Veranschlagt man für die Dichte den Wert von künstlich hergestelltem Eis  $\rho_E = 0.9197 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  [Petrenko und Whitworth, 1999, Umschlag] und nimmt einen Fehler von  $\Delta^S \rho_E = 0.003 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  an, so berücksichtigt dieser Fehler die Dichtefluktuationen und der von Feldglaziologen für polares Eis angegebene Wert von  $\rho_E = 0.917 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  [Paterson, 1994, Tabelle 2.1] ist im Fehlerintervall enthalten. Die Dichtevariation aufgrund thermischer Ausdehnung ist mit dem angenommenen Fehler für den Temperaturbereich zwischen  $-60 \dots 0$  °C [Hobbs, 1974, Tabelle 5.1] ebenfalls abgeschätzt.

Die Dichte  $\rho_L$  und der Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  kann bei der Berechnung der dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_i^{\times}$  mit dem Programm `depmeas.c` (Anhang B) optional berechnet werden. Die vom Programm ausgegebenen Fehler und der Korrelationskoeffizient der Dichte  $\rho_L$  und des Imaginärteils der Eisphase  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  berechnen sich aus der Fortpflanzung der Fehler der dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns. Die Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times}))}$  wurde nach den Betrachtungen in Abschnitt 3.2 mit den in Abschnitt 4.1.2 angegebenen Fehlern berechnet. Die Fortpflanzung dieser bekannten Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times}))}$  zur gesuchten Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}$  an der mit dem Newtonschen Verfahren bestimmten Lösungsstelle  $(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))$  nach der allgemeinen Fortpflanzungsformel (3.15) auf Seite 62 benötigt die Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times}))$ . Diese berechnet sich nach der Kettenregel [Heuser, 1990b, Satz 165.2]:

$$\mathcal{J}_{(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times})) = \mathcal{J}_{(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}(\text{Re } g, \text{Im } g) \circ \mathcal{J}_{(\text{Re } g, \text{Im } g)}(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times})) \quad (4.13)$$

Die erste Matrix im Produkt berechnet sich als das Inverse der in Gleichung (4.10) explizit angegebenen Matrix  $(\mathcal{J}_{(\text{Re } g, \text{Im } g)}(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L)))^{-1}$  mit wegen dem Bezug auf den Imaginärteil  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  hier mit  $-1$  multipliziertem zweiten Spaltenvektor. Die zweite Matrix im Produkt berechnet sich aus der Ableitung  $\partial g / \partial \varepsilon_i^{\times} = -\frac{1}{3}(\varepsilon_i^{\times})^{-\frac{2}{3}}$  der in Bezug auf die Variable  $\varepsilon_i^{\times}$  holomorphen Hilfsfunktion  $g = \varpi_L(\sqrt[3]{\varepsilon_i^L} - 1) - (\sqrt[3]{\varepsilon_i^{\times}} - 1)$  entsprechend der korrespondierenden komplexen Darstellung der definierenden Gleichung (4.6). Die Identifizierung der komplexen Ableitung  $\partial g / \partial \varepsilon_i^{\times}$  mit der Jakobimatrix  $\mathcal{J}_{(\text{Re } g, \text{Im } g)}(\text{Re}(\varepsilon_i^{\times}), \text{Im}(\varepsilon_i^{\times}))$  zur expliziten Berechnung erfolgt nach Relation (3.7) auf Seite 54.

Den Fehlerbeitrag  $\Delta^S \text{Re}(\varepsilon_i^L)$  des angenommenen Realteils der Dielektrizitätskonstanten  $\text{Re}(\varepsilon_i^L)$  berechnet man aus der Fortpflanzung der Kovarianzmatrix der dielektrischen Eigenschaften der Eisphase  $\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^L), \text{Im}(\varepsilon_i^L))}$  mit dem Inversen der Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^L), \text{Im}(\varepsilon_i^L))}(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))$ . Über den Imaginärteil  $\text{Im}(\varepsilon_i^L)$  wurde keine Annahme gemacht und der Fehler des Imaginärteils nebst der Kovarianz von Real- und Imaginärteil tragen hier nicht bei<sup>7</sup>. Die partiellen Ableitungen nach dem Volumenanteil der Eisphase  $\varpi_L$  berechnen sich dabei durch Ableitung der nach  $\varepsilon_i^L$  freigestellten

---

<sup>7</sup>Die Matrix besitzt nur einen nichtverschwindenden Eintrag:  $\mathfrak{V}_{(\text{Re}(\varepsilon_i^L), \text{Im}(\varepsilon_i^L))} = \begin{pmatrix} (\Delta^S \text{Re}(\varepsilon_i^L))^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Looyengagleichung (4.5)

$$\frac{\partial}{\partial \varpi_L} \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} (\varepsilon_i^L) = \frac{\partial}{\partial \varpi_L} \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} \left( \left( \frac{\sqrt[3]{\varepsilon_i^x - 1}}{\varpi_L} + 1 \right)^3 \right) = \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} \left( \frac{-3(\sqrt[3]{\varepsilon_i^x - 1})}{(\varpi_L)^2} \left( \frac{\sqrt[3]{\varepsilon_i^x - 1}}{\varpi_L} + 1 \right)^2 \right) \quad (4.14)$$

unter Benutzung der Verträglichkeit der reellwertigen partiellen Ableitung mit der Bildung von Real- bzw. Imaginärteil [Remmert, 1995a, Kap. 1, §4, Abschn. 2]. Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind unabhängige Größen, so daß die Ableitung von  $\varepsilon_i^L$  nach ihrem Imaginärteil  $\frac{\partial}{\partial \text{Im}(\varepsilon_i^L)} \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} (\varepsilon_i^L) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  ergibt.

Die Dichte eines Eiskerns  $\rho_L$  ist die mit den Volumenanteilen gewichtete Dichte seiner Phasen. Da die Dichte von Luft wie zu Beginn von Abschnitt 4.3.2 diskutiert in guter Näherung verschwindet, trägt nur die Eisphase zur Gesamtdichte  $\rho_L = \varpi_L \rho_E$  bei. Der Gesamtfehler mit Berücksichtigung des Fehlers der Dichte der Eisphase berechnet sich aus quadratischer Fehleraddition  $\Delta \rho_L = \sqrt{\mathfrak{C}_{\varpi_L \varpi_L} \rho_E^2 + (\varpi_L)^2 (\Delta^S \rho_E)^2}$ . Die auf den Volumenanteil bezogene Kovarianz ist dann auch entsprechend mit der Dichte zu multiplizieren  $\mathfrak{C}_{\rho_L \text{Im}(\varepsilon_i^L)} = \rho_E \mathfrak{C}_{\varpi_L \text{Im}(\varepsilon_i^L)}$ <sup>8</sup>. Ein Beispiel für die Anwendung des Looyengamodells zur Berechnung der Dichte und des Imaginärteils der Eisphase aus den dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns mit dem Programm `depmeas.c` (Anhang B) ist in Abbildung 4.16 gezeigt.

Berechnete Eigenschaften der Eisphase mit einem Betrag des Imaginärteils  $|\varepsilon_i^{L''}| \geq 6$  und unphysikalische Volumenanteile außerhalb des Intervalls  $\varpi_L \in [0, 1]$  wurden bei der hier vorgestellten Anwendung des Looyengamodells aussortiert. Entsprechend Abbildung 4.14 sind mit dieser Wahl Fehlinterpretationen nur für Imaginärteile der Dielektrizitätskonstanten  $|\varepsilon_i^{L''}| \geq 18$  möglich. Die höchste Leitfähigkeit unter allen betrachteten Eiskernen findet man in einer Kerntiefe von 44.56 m im Kern CM1 [Holmlund et al., 2000]. Der Betrag des Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten an dieser Stelle mit einer Dichte von  $\rho_L \approx 0.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  schätzt  $|\varepsilon_i^{x''}| \leq 5.5$  für alle Kerne ab. Den Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase schätzt man beim der Dichte entsprechenden Volumenverhältnis von  $\varpi_L \approx 0.87$  aus Abbildung 4.14 zu  $|\varepsilon_i^{L''}| \approx 6.5 \ll 18$  ab. Man findet die Konturlinien über ihren Schnittpunkt mit der Achse des Imaginärteils bei vollständiger Ausfüllung des Volumens mit der Eisphase  $\varpi_L = 1$ . Dort entspricht der Niveaufwert der Konturlinie für die Mischung den auf der Achse aufgetragenen Eigenschaften der Eisphase.

Die in Abschnitt 4.2 vorgestellte Datenbasis wird nun zur Abschätzung der Güte des Looyengamodells als Densimeter herangezogen. Dichtemessungen mittels  $\gamma$ -Streuung liegen für die der Trockenschneezone zugeordneten Kerne FB9802–18 und B31–3 vor. Hingegen sind die Kerne FB9801, SZ99 und SZ9902 bei der Beschreibung der Datenbasis dem Bereich mit auftretender Perkolation zugeordnet worden. Abbildung 4.17 zeigt die Streuverteilungen für die Trockenschneezone (a:) und den Perkulationsbereich (b:).

Die gefundenen Korrelationskoeffizienten  $\mathfrak{R}(\rho_L, \rho_\gamma) = 0.993$  für die Trockenschneezone bzw.  $\mathfrak{R}(\rho_L, \rho_\gamma) = 0.950$  für den Perkulationsbereich zeigen im Mittel gute Übereinstimmung der mit beiden Verfahren bestimmten Dichten. Die gute Korrelation ist wesentlich auf das Aussortieren unphysikalischer Lösungen beim Looyengamodell

<sup>8</sup>Formal ist die Fortpflanzung der Kovarianzmatrix  $\mathfrak{V}_{(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}$  mit der Jacobimatrix  $\mathcal{J}_{(\rho_L = \rho_E \varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))}(\varpi_L, \text{Im}(\varepsilon_i^L))$  zu betrachten.

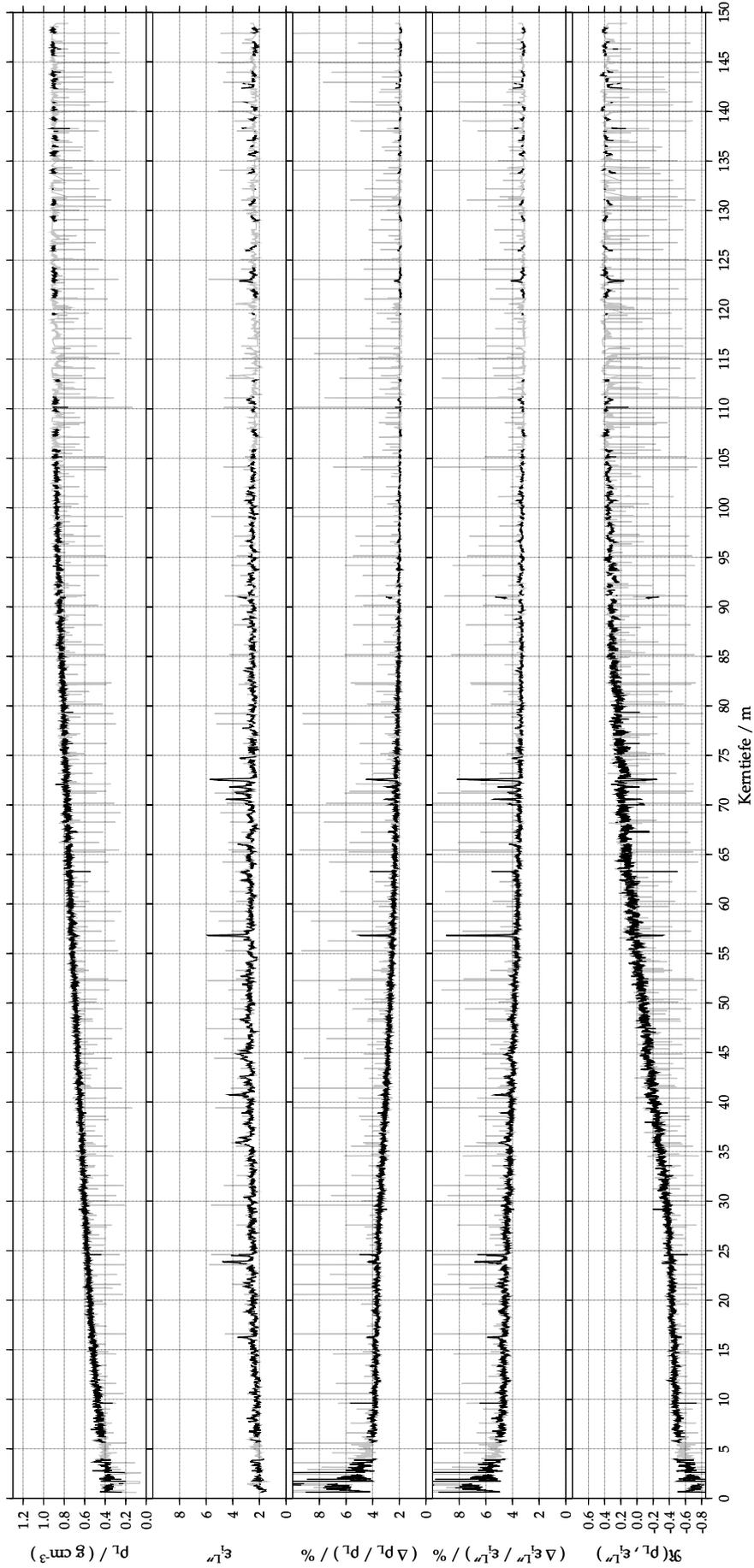


Abbildung 4.16: Beispiel für bei einer Meßfrequenz von 250 kHz gemessene Eigenschaften der Eisphase nach dem Looyengamodell. Der gezeigte Datensatz der dielektrischen Eigenschaften und der Dichte des Eiskerns B32 [Oerter et al., 2000] wurde aus dem in Abbildung 4.9 (Seite 102) gezeigten Datensatz der dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_i^x$  durch Anwendung des Looyengamodells erzeugt. Das Programm `depmeas.c` gibt die Dichte  $\rho_L$  und den Imaginärteil  $-\varepsilon_i^{L''}$  der effektiven relativen Dielektrizitätskonstanten der Eisphase mit ihren Absolutfehlern  $\Delta\rho_L$  und  $\Delta(-\varepsilon_i^{L''}) = \Delta\varepsilon_i^{L''}$ , sowie ihrer Korrelation  $\Re(\rho_L, -\varepsilon_i^{L''})$  aus. Hier sind der besseren Übersichtlichkeit wegen die Relativfehler  $\Delta\rho_L/\rho_L$  und  $\Delta\varepsilon_i^{L''}/\varepsilon_i^{L''} = \Delta(-\varepsilon_i^{L''})/(-\varepsilon_i^{L''})$  in Prozent, sowie der Korrelationskoeffizient  $\Re(\rho_L, \varepsilon_i^{L''}) = -\Re(\rho_L, -\varepsilon_i^{L''})$  aufgetragen. Eingesetzt wurden  $\rho_E = 0.9197 \pm 0.003 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  und  $\varepsilon_i^{L'} = 3.12 \pm 0.04$ . Die Akzeptanzbereiche sind  $\varpi_L \in [0, 1]$  und  $|\varepsilon_i^{L''}| \in [0, 6]$ .

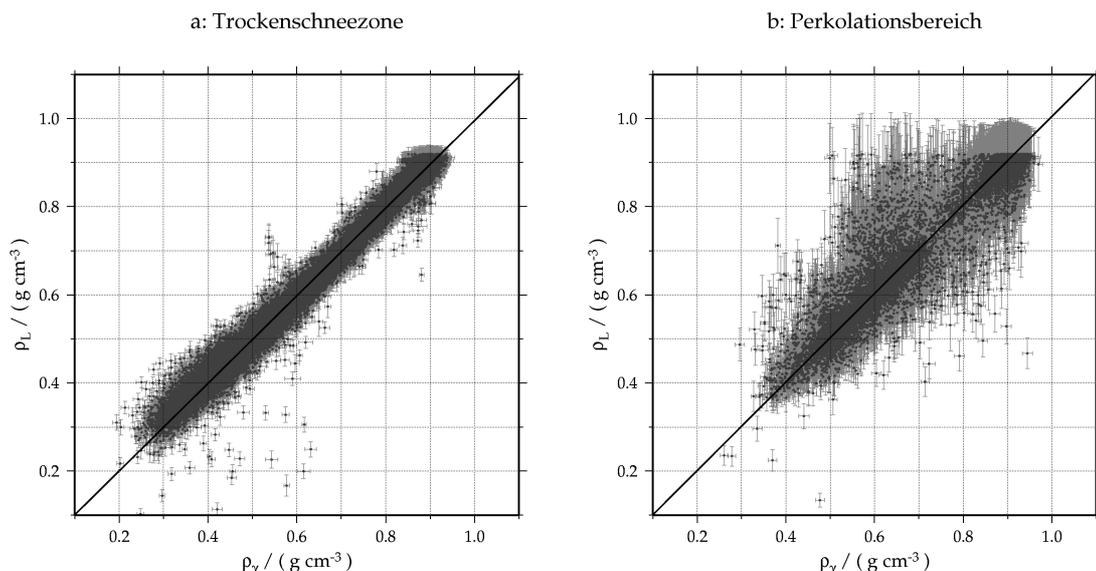


Abbildung 4.17: Vergleich der nach dem Looyengamodell bestimmten Dichte mit aus  $\gamma$ -Streuung bestimmten Dichten

Die Streuverteilungen der aus Anwendung des Looyengamodells  $\rho_L$  und  $\gamma$ -Streuung  $\rho_\gamma$  bestimmten Dichtemesswerte sind nach der Herkunft der Eiskerne aus dem Bereich trockenen Schnees (a:) und mit auftretender Perkolationsbereich (b:) getrennt aufgetragen. Für die Eiskerne aus dem Bereich trockenen Schnees (a:) wurde  $\varepsilon_1^{L'} = 3.12 \pm 0.04$  eingesetzt. Es ergibt sich ein Korrelationskoeffizient  $\mathfrak{R}(\rho_L, \rho_\gamma) = 0.993$  bei  $N = 129434$  Datenpunkten. Die eingetragene einfache Proportionalität aus einer ungewichteten Anpassung [Barlow, 1989, Abschn. 6.1.1] entspricht  $\rho_L = \mathfrak{C}_{\rho_L \rho_L} / \mathfrak{C}_{\rho_L \rho_\gamma} \times \rho_\gamma = 0.995 \times \rho_\gamma$ . Für die Eiskerne aus dem Bereich mit Perkolationsbereich (b:) ergibt sich für eingesetztes  $\varepsilon_1^{L'} = 3.12 \pm 0.2$  ein Korrelationskoeffizient  $\mathfrak{R}(\rho_L, \rho_\gamma) = 0.950$  bei  $N = 13170$  Datenpunkten. Im Perkolationsbereich wurde die eingetragene einfache Proportionalität zu  $\rho_L = \mathfrak{C}_{\rho_L \rho_L} / \mathfrak{C}_{\rho_L \rho_\gamma} \times \rho_\gamma = 1.004 \times \rho_\gamma$  bestimmt.

zurückzuführen. Die Ablehnung unphysikalischer Lösungen ist auch Ursache für das Fehlen von Lösungen mit einer Dichte von mehr als  $\rho_L > \rho_E = 0.9197 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Nach dem Aussortieren von Bereichen mit schlechter Kernqualität besteht der Datensatz für die Trockenschneezone aus  $N = 135665$  Datenpunkten. D.h. nur für 4.6 % der Datenpunkte kann keine Lösung nach dem Looyengamodell gefunden werden. Die Anwendung des Looyengamodells auf den Datensatz aus dem Perkolationsbereich findet für 16.3 % der ursprünglich  $N = 15738$  verfügbaren Datenpunkte keine Lösung. Dies ermöglicht auch bei auftretender Perkolationsbereich immer noch eine sinnvolle Anwendung des Looyengamodells als Densimeter. Die breite Streuung bei mittleren Dichten um  $0.7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  in Abbildung 4.17b ist wohl ein Artefakt der unterschiedlichen Tiefenauflösung des auf wenige Millimeter kollimierten  $\gamma$ -Strahls und der  $l = 1$  cm langen Meßelektrode. Der ebenfalls nicht auszuschließende Versatz zwischen den Referenzpunkten der Densimeter im Bereich weniger Millimeter kann bei den scharfen Dichtekontrasten von Eislinsen im Firn eine beträchtliche Streuung zwischen beiden

Verfahren hervorrufen. Die beiden deutlich getrennten Domänen bei hoher und geringer Dichte und die starke Streuung um den mit geringer Punktdichte besetzten Dichtebereich dazwischen stützen die Erklärung der Streuung als Resultat harter Dichtekontraste.

Zum Einsatz als Meßverfahren ist zusätzlich zu überprüfen, ob der Fehler des einzelnen Meßwertes richtig geschätzt wurde. Für Kerne aus dem Bereich trockenen Schnees entnimmt man Abbildung 4.16 einen relativen Dichtefehler  $\Delta\rho_L/\rho_L = 4 \dots 2 \%$  für Kerntiefen unterhalb 5 m. Dieser Fehler ist nur unwesentlich größer als der in Abschnitt 4.1.5.4 angegebene relative Fehler der Dichtemessungen mittels  $\gamma$ -Streuung  $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 3 \dots 1.5 \%$  der Dichtemessung mittels  $\gamma$ -Streuung. Ein Maß für die Übereinstimmung beider Dichtemeßverfahren ist die Verträglichkeit ihrer Differenz mit Null im Rahmen der Fehler. Der aus Gaußscher Fehlerfortpflanzung für die Differenz der Dichtewerte an einem Meßpunkt berechnete Fehler  $\Delta(\rho_L - \rho_\gamma) = \sqrt{(\Delta\rho_L)^2 + (\Delta\rho_\gamma)^2}$  entspricht gerade dem in Abschnitt 3.2.7.3 für die Wichtung einer  $\chi^2$ -Anpassung diskutierten Fehler. Berechnet man für die Differenz der mit  $n = 1, \dots, N$  durchnummerierten Meßdaten das gewichtete

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(\rho_{L_n} - \rho_{\gamma_n})^2}{(\Delta\rho_{L_n})^2 + (\Delta\rho_{\gamma_n})^2}, \quad (4.15)$$

so kann die Arbeitshypothese  $\mathfrak{H}$ : “Die Differenz der Dichtemeßwerte  $\rho_{L_n}$  und  $\rho_{\gamma_n}$  nach den unterschiedlichen Verfahren verschwindet im Mittel im Rahmen der höchstens überschätzten Fehler” statistisch getestet werden. In Abschnitt 3.2.7.4 wurde in einem analogen Fall die Hypothese als die Abschätzung des berechneten  $\chi^2$  durch einen kritischen Wert  $\chi_p^2(\mathbf{n})$  in die mathematische Sprache übersetzt:

$$\mathfrak{H} : \chi^2 \leq \chi_p^2(\mathbf{n}) \quad (4.16)$$

Die Annahme einer richtigen Hypothese wird, wie in Abschnitt 3.2.7.4 beschrieben, durch die Ablehnung der alternativen Nullhypothese

$$\mathfrak{H}_0 : \chi^2 > \chi_p^2(\mathbf{n}) \quad (4.17)$$

bestärkt. Man findet für den Trockenschneebereich mit  $\mathbf{n} = N = 129434$  Freiheitsgraden  $\chi^2 = 116585$ . Mathematica [Wolfram, 1996] berechnet mit den angegebenen Werten für die über den Ablehnungsbereich der alternativen Hypothese  $\mathfrak{H}_0$  integrierte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, d.h. die Wahrscheinlichkeit  $\mathbf{p} = 4.6 \times 10^{-152}$  für einen Fehler 1. Art bei Ablehnung der Nullhypothese. Wählt man z.B. ein hohes Signifikanzniveau von 1 ‰, so wird man die Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  wegen  $\chi^2 = 116585 = \chi_{4.6 \times 10^{-152}}^2(129434) \leq \chi_{0.001}^2(129434)$  getrost ablehnen und die Hypothese  $\mathfrak{H}$  akzeptieren. Ein anderer Ausgang des Tests wäre bei den großzügig geschätzten Fehlern auch ein Grund, die Modellannahmen des Looyengamodells grundsätzlich zu überprüfen.

Für den Perkulationsbereich wurde bereits eine größere Streuung diskutiert und führt man für die angegebenen Fehler einen analogen Konsistenztest aus, so wird man die Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  für das gefundene  $\chi^2 = 87578.2 > 13378.4 = \chi_{0.9}^2(13170)$  (Zahlenwert mit Mathematica [Wolfram, 1996, Abschn. 3.2.14] berechnet) sogar auf dem sehr schwachen  $\mathbf{p} = 0.9$  Signifikanzniveau annehmen und damit die Hypothese  $\mathfrak{H}$

ablehnen. Umgekehrt ist es möglich, einen unbekanntem Fehler aus der  $\chi^2$ -Verteilung zu bestimmen [Barlow, 1989, Abschn. 6.4]. Wegen der höheren Ortsauflösung der Dichtemessung mittels  $\gamma$ -Streuung ist eher von einer Fehlerbehaftung der Dichtemessung mit dem Looyengamodell auszugehen. Vergrößert man z.B. den Fehler des Realteils der Dielektrizitätskonstanten um einen Faktor 5 und setzt  $\varepsilon_i^{L'} = 3.12 \pm 0.2$  ein, so wird man für das analog zur Betrachtung im Trockenschneebereich mit dem berechneten  $\mathbf{p} = 9.5 \times 10^{-30}$  für ein  $\chi^2 = 11424.3$  die z.B. auf dem 1 %o Signifikanzniveau getestete Nullhypothese  $\mathfrak{H}_0$  ablehnen. Der vorgenommene Test ist allerdings kein Konsistenztest mehr, und die nach dem Looyengamodell bestimmten Dichten sind kritisch zu hinterfragen. Eine Etablierung des Looyengamodells als Dichtemessverfahren im Perkulationsbereich würde noch eine genauere Betrachtung der weit streuenden Punkte erfordern, z.B. ob sie tatsächlich im Übergangsbereich zwischen Firn und Eislinsen liegen. Eine auf dem um die Punkte im Übergangsbereich zwischen Firn und Eislinsen reduzierten Datensatz abgelehnte Nullhypothese würde die Hypothese der überschätzten Fehler für die Dichtebestimmung nach dem Looyengamodell stärken. Die dann im Bereich mit starken Dichtekontrasten gemessenen Werte könnten als Mittelwerte aufgefaßt werden und die Methode wäre in sich schlüssig. Die gefundenen Steigungen für eine ungewichtet angepaßte einfache Proportionalität [Barlow, 1989, Abschn. 6.1.1] mit 5 %o bzw. 4 %o Abweichung vom erwarteten Faktor 1 stützen die Wahl der angenommenen Konstanten  $\varepsilon_i^{L'} = 3.12$  und  $\rho_E = 0.9197$ . Auch die Erklärung des Versagens der Dichtebestimmung nach dem Looyengamodell im Perkulationsbereich als Auflösungsartefakt wird durch die im Mittel richtige Zuordnung der gemessenen Werte  $\rho_L = (1 \pm 5 \text{ %o}) \times \rho_\gamma$  – hier vereinheitlicht für den Bereich trockenen Schnees und Gebiete mit auftretender Perkulation geschrieben – gestützt.

### 4.3.5 Leitfähigkeit der Eisphase und Datenbeispiel in der Vulkanschichtkandidatenidentifizierung

Vergleicht man den negativen Imaginärteil der dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns  $\varepsilon_i^{x''}$  nach Abbildung 4.9 auf Seite 102 mit dem nach dem Looyengamodell bestimmten negativen Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$  nach Abbildung 4.16, so erkennt man eine deutliche Reduktion bis Eliminierung der Dichteabhängigkeit. Die mit zunehmender Kerntiefe, d.h. zunehmender Dichte, von  $\varepsilon_i^{x''} = 0.5 \dots > 2$  ansteigende Basislinie der Eigenschaften des Eiskerns ist für die gefundenen Eigenschaften der Eisphase praktisch konstant  $\varepsilon_i^{L''} \approx 2$ . Beachtet man die doppelt so großen dargestellten Ordinatenabschnitte bei der Darstellung von  $\varepsilon_i^{L''}$ , so findet man die Spitzen über der Basislinie vergrößert. Die relativen Höhen der Spitzen zueinander verändern sich wie bei der Elimination eines Verdichtungseffekts erwartet ebenfalls. Nimmt man zur Abschätzung des Spurenstoffgehalts eine zur Eigenleitung des Eises addierte dem Spurenstoffgehalt proportionale Leitfähigkeit an, so ist in der Darstellung von  $\varepsilon_i^{L''}$  bei gleichem Impuls des Spurenstoffflusses eine Zunahme der Höhe und Abnahme der Breite der Spitzen mit zunehmender Dichte zu erwarten. Neben einem geringeren Spurenstofffluß ist dies eine mögliche Erklärung der geringeren Höhe der Spitzen in den oberen Kernbereichen. Eine eingehendere Betrachtung der Spitzenform macht erst Sinn, wenn die noch nicht vorliegenden chemischen Analysen des Spurenstoffgehalts der Kerne verfügbar sind.

## FB9707

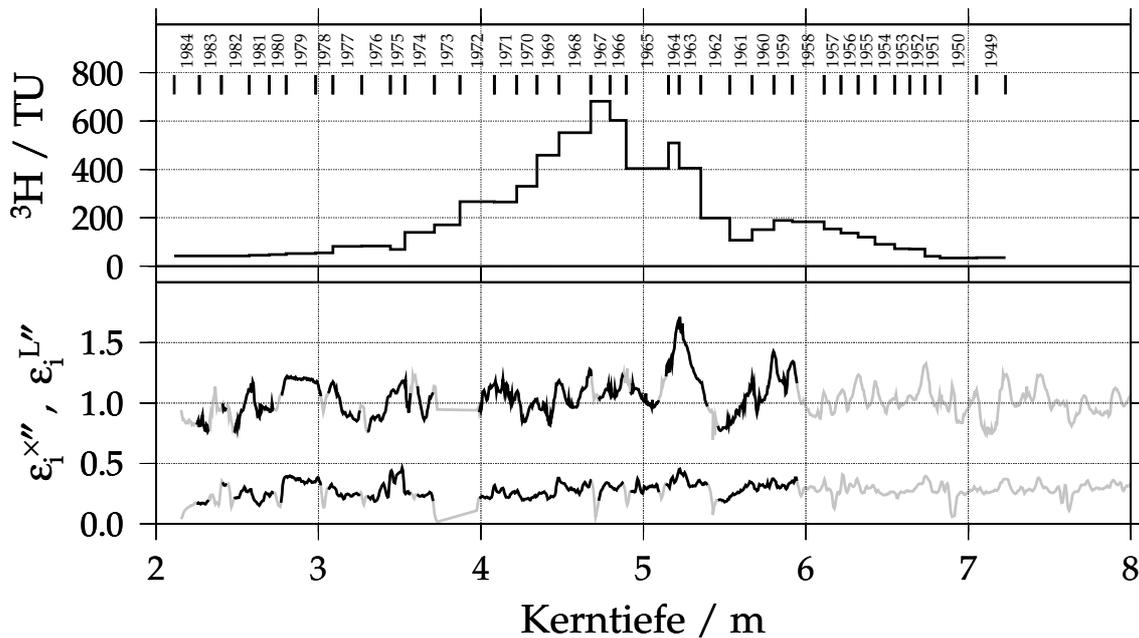


Abbildung 4.18: Vergleich der nach dem Looyengamodell bestimmten Eigenschaften der Eisphase mit den Eigenschaften der Mischung im Bereich mit wahrscheinlich vulkanogenem Eintrag

Die untere Grafik zeigt in der unteren Kurve den der Leitfähigkeit proportionalen negativen Imaginärteil  $\varepsilon_i^{x''}$  des Eiskerns FB9707 gegen die Kerntiefe. Im gezeigten Tiefenbereich erwartet man eine auf Eintrag von Spurenstoffen des Vulkanausbruchs Agung am 17. März 1963 [Newhall und Self, 1982] zurückzuführende Spitze erhöhter Leitfähigkeit. Ein Kandidat für die erwartete Spitze ist erst im oberen Profil der unteren Grafik dargestellten negativen Imaginärteil der Eigenschaften der Eisphase nach dem Looyengamodell  $\varepsilon_i^{L''}$  zu finden. Die obere Grafik zeigt zum Vergleich den deponierten Tritiumgehalt gegen die Tiefe und die in Oerter et al. [1999] festgelegte Datierung des Kerns, die die gefundene Spitze auf etwa das Jahr 1963/4 festlegen. Die für den Beweis von vulkanogenem Eintrag im Bereich der Leitfähigkeitsspitze notwendigen chemischen Messungen des Spurenstoffgehalts liegen noch nicht vor. Grau gezeichnete Bereiche der Kurven von  $\varepsilon_i^{x''}$  bzw.  $\varepsilon_i^{L''}$  sind evtl. von schlechter Kernqualität beeinflusst.

In den oberen Kernmetern ist der der Leitfähigkeit proportionale negative Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{x''}$  in führender Ordnung von starken Dichteschwankungen abhängig. In Abbildung 4.18 ist in der entsprechenden Auftragung kein Kandidat für eine Spitze durch vulkanogenen Eintrag zu identifizieren.

Betrachtet man hingegen den auf Dichteinfluß korrigierten negativen Imaginärteil der Eisphase  $\varepsilon_i^{L''}$ , so ist die Spitze mit fast doppelt so hoher Leitfähigkeit wie die gedachte Basislinie ein Kandidat für eine Schicht mit vulkanogenem Eintrag, die nach einer unabhängigen Datierungsmethode genau in der angetroffenen Tiefe zu erwarten ist. Der Nachweis einer auf vulkanogenen Eintrag zurückzuführenden Erhöhung

der Leitfähigkeit in der Kerntiefe der Spitze kann durch die noch nicht vorliegenden chemischen Analysen eindeutig bestätigt oder widerlegt werden.

### 4.3.6 Diskussion in der glaziologischen Anwendung

Die Bedeutung der vorliegenden komplexwertigen Fortsetzung des Looyengamodells ist primär in der Analyse von Eiskernen im Firnbereich zu sehen. Das Verständnis der in führender Ordnung von der Dichte bestimmten Leitfähigkeit des Kerns im oberen Firnbereich ist Grundlage für die Korrektur auf den Dichteinfluß und dann evtl. verbesserte Identifizierung von Kandidaten für Schichten mit vulkanogenem Eintrag. Deshalb ist, wie im vorangegangenen Abschnitt 4.3.5 demonstriert die Bedeutung des Modells besonders bei der Analyse von Firnkernen zur Bestimmung der rezenten räumlichen Akkumulationsverteilung zu sehen. Die mit der Kerntiefe abnehmenden relativen Fehler  $\Delta\varepsilon_i^{L''}/\varepsilon_i^{L''} = 5 \dots 3.5 \%$  des zur Leitfähigkeit der Eisphase proportionalen negativen Imaginärteils der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i^{L''}$  sind selbst bei dem relativ großzügig abgeschätzten Fehler des angenommenen Realteils der Eisphase  $\varepsilon_i^{L'} = 3.12 \pm 0.04 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  nur etwas mehr als doppelt so groß wie der Fehler der gemessenen Leitfähigkeit des Eiskerns  $\Delta\varepsilon_i^{X''}/\varepsilon_i^{X''}$ . Die Messung ist mit diesen Fehlern immer noch als Präzisionsmessung zu bezeichnen.

Die nach Abschnitt 4.3.4 in der Anwendung des Looyengamodells bestimmten Dichtemeßwerte sind mit ihrem mit zunehmender Kerntiefe abnehmenden relativen Fehlern  $\Delta\rho_L/\rho_L = 4 \dots 2 \%$  qualitativ mit der aus  $\gamma$ -Streuung bestimmten Dichtemessung vergleichbar. Werden die in Abschnitt 4.1.5.4 diskutierten Verbesserungen des  $\gamma$ -Densimeters umgesetzt so ist die aus  $\gamma$ -Streuung gemessene Dichte um einen Faktor zwei bis drei genauer als die nach dem Looyengamodell bestimmte. Das für mittels  $\gamma$ -Streuung gemessene Dichtereihen beschriebene Abzählen von Jahresschichten zur Datierung [Fischer et al., 1998] kann an den nach dem Looyengamodell bestimmten hochaufgelösten Dichtetiefenreihen ebenfalls vorgenommen werden. Zusammenfassend stellt man fest, daß die Dichte mittels einer elektrischen Anordnung bereits im Feld gemessen werden kann. Für den Bereich trockenen Schnees sogar in nahezu gleicher Präzision wie mit der aufwendigeren, an ein Labor gebundenen hochaufgelösten Dichtemessung mittels  $\gamma$ -Streuung. Dies ist insbesondere vor dem beträchtlichen Verwaltungsaufwand durch den Umgang mit der radioaktiven Quelle des  $\gamma$ -Densimeters im Feld zu sehen. Die statistisch signifikant im Rahmen der Fehler übereinstimmenden unabhängigen Dichtemessungen sind ein starkes Argument für die Verlässlichkeit der dielektrischen Messungen insgesamt.

Die Messung von Kernen aus Gebieten mit auftretender Perkolation ist noch nicht in der diskutierten Genauigkeit möglich. Hier sind noch weitere schon diskutierte Untersuchungen zur Etablierung des Verfahrens angezeigt, die aber erfolgversprechend sind.

## 4.4 Messung bei niedrigen Frequenzen

Messungen bei niedrigen Frequenzen unterliegen dem bereits von Auty und Cole [1952] diskutierten Einfluß selbst kleinster Luftspalte. Für die Messung von Eisker-

nen mit dem hier beschriebenen Meßkondensator wurde der Einfluß der Luftspalte bereits in Abschnitt 3.2 diskutiert. Die wegen der Meßbereichsbegrenzung der verwendeten Meßbrücke benötigte Verlängerung der Meßelektrode um einen Faktor 10 auf  $l = 100$  mm zur Erhöhung der Leerkapazität bei niedrigen Frequenzen ist in Abschnitt 3.2.5 diskutiert. An ausgewählten Kernabschnitten des Kerns FB9817 [Oerter et al., 2000] wurden Frequenzgänge zwischen  $f = 100$  Hz . . . 250 kHz mit einer  $l = 100$  mm langen Meßelektrode und möglichst genauer Zentrierung des Kerns in der Mitte des Meßkondensators vor der Messung des jeweiligen Kernabschnitts von Hand vorgenommen. Ein typisches Meßergebnis für einen etwa 1 m langen Kernabschnitt zeigt Abbildung 4.19.

Die Auswertung für jede einzelne Frequenz erfolgt analog zu den beschriebenen Messungen bei einer Meßfrequenz von  $f = 250$  kHz. Die Fehler durch den Einfluß von Oberflächenströmen sind entsprechend Abschnitt 3.2.3 mit Literaturdaten [Caranti und Illingworth, 1983, Abbildung 4, Kurve für “thick frost”] berechnet. Die eingesetzte Kurve für Rauheis repräsentiert Caranti und Illingworth [1983] zufolge ebenfalls den Fall des vor der Messung hier vorgenommenen Abreibens der Oberfläche. Trotz der genaueren mechanischen Positionierung wurden die früher angegebenen Fehler von  $\Delta 2b = 1$  mm für den Eiskerndurchmesser eingesetzt, da eine genaue Abschätzung der Zentrierung nicht möglich ist und damit jede Fehlerabschätzung willkürlich bleibt. Im Rahmen der hier bestimmten Fehler lassen sich anhand Abbildung 4.19 exemplarisch Eigenschaften polaren Firns ablesen:

- Alle hier für niedrige Frequenzen gemessenen Dielektrizitätskonstanten sind höher als bei künstlich hergestelltem Eis, für das man bei  $-10$  °C eine statische Dielektrizitätskonstante von etwa  $\epsilon = 103$  [Petrenko und Whitworth, 1999; Takei und Maeno, 1997] erwartet. Berücksichtigt man die Dichte des im Beispiel gemessenen Firns von etwas weniger als  $0.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ , so sind die kleinsten gemessenen Dielektrizitätskonstanten von etwa  $\epsilon \gtrsim 120$  im Vergleich zur statischen Dielektrizitätskonstante von reinem Eis groß. Für polare Eisproben sind sehr hohe Dielektrizitätskonstanten von bis zu über 1000 in der Literatur beschrieben [Vassoille et al., 1982; Fitzgerald und Paren, 1975].
- Die beobachteten negativen Leitfähigkeiten bei den Punkten mit  $\epsilon_1^{\times''} < 0$  wurden auch von anderen Experimentatoren gefunden [Paren, 1973; Ruepp, 1973; Chan und Johari, 1973]. Die von Paren [1973] diskutierte Unsicherheit durch nichtbehandelte Luftspalte kann bei der hier vorgestellten Messung durch exakte Behandlung der Luftspalte ausgeschlossen werden. Die Meßbrücke wird in ihrem Spezifikationsbereich betrieben, so daß sie als Fehlerquelle ausscheidet. Die gefundenen Meßwerte sind deshalb als real anzusehen. Ruepp [1973] konnte die von ihm gefundenen negativen Leitfähigkeiten bei einer mit Flourwasserstoff (HF) dotierten und bei einer mechanisch verformten Probe als dielektrische Eigenschaft des Eises bestätigen und für die Beobachtung Artefakte des Meßkreises ausschließen. Itagaki [1983] berichtet von wiederholt gefundenen negativen Leitwerten für auf eine Elektrode aufgefrorene Eisproben niedriger Dislokationsdichte.
- Die Relaxationsfrequenz von 2 kHz (Frequenz bei maximalem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1^{\times''}$ , d.h. beim Scheitelpunkt der jeweiligen Kurve nach Abbildung 4.19) ist etwas geringer als die für künstlich hergestelltes

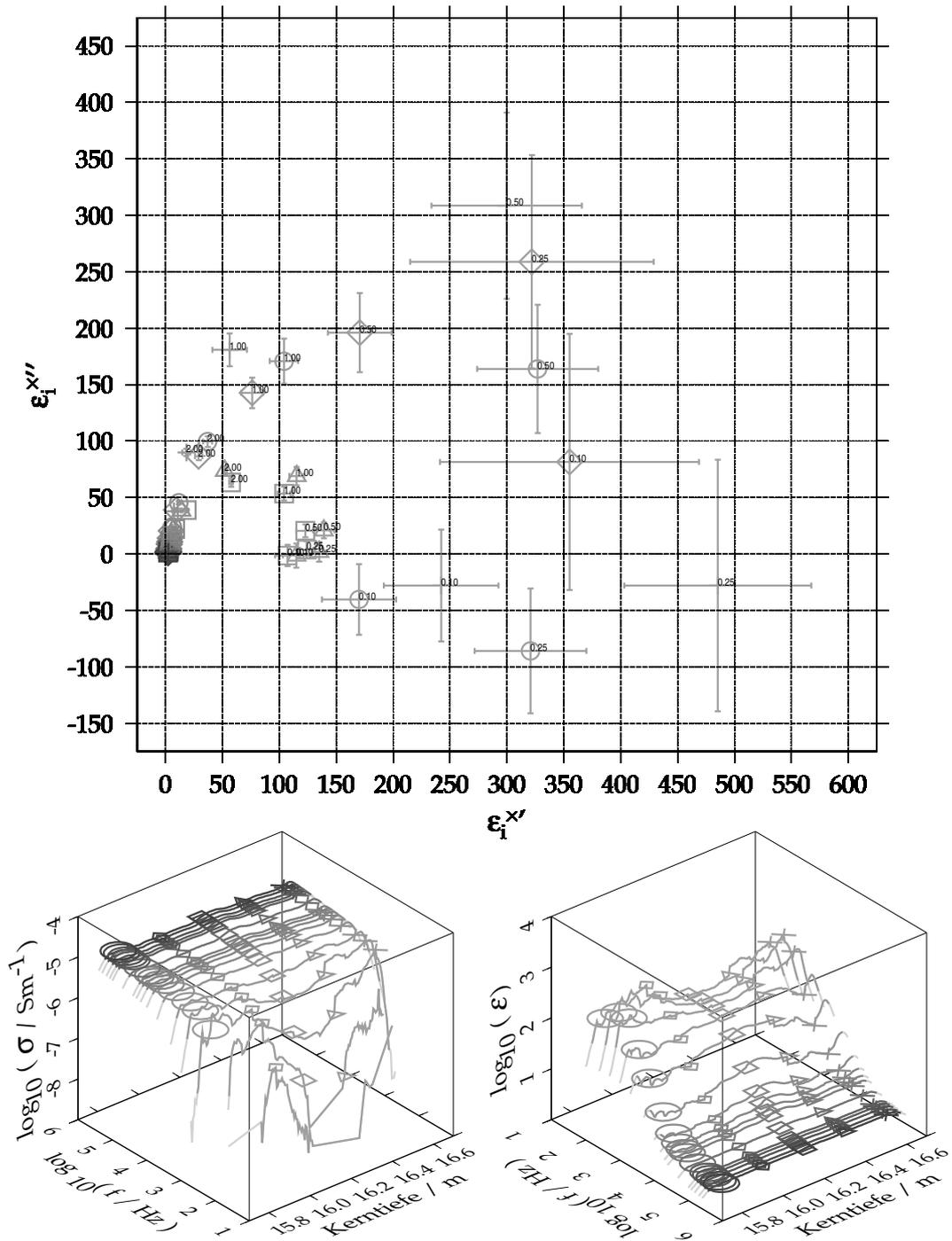


Abbildung 4.19: Meßbeispiel für niedrige Frequenzen

Die unteren Grafiken zeigen die Leitfähigkeit  $\sigma$  und die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  gegen die Kerntiefe und die Meßfrequenz  $f$ . Wegen der besseren Darstellbarkeit wurde die Frequenzachse für die beiden Grafiken jeweils in unterschiedlicher Richtung gewählt. Die obere Grafik zeigt Cole-Cole Darstellungen [Cole und Cole, 1941; Cole, 1955] ausgewählter Tiefenschnitte mit zu den unteren Grafiken korrespondierenden Symbolen. In der Cole-Cole Darstellung ist für Meßpunkte mit einer Frequenz von höchstens  $f \leq 2$  kHz die Meßfrequenz  $f$  in kHz angegeben.

Eis gefundenen 3 kHz. Die viel geringeren Relaxationsfrequenzen im Bereich von einigen hundert Hertz sind einer weiteren Relaxation zuzuordnen. Die gemessene Probe wurde in einem kalten Eisschild gebohrt und nach so kurzer Lagerung wie möglich dielektrisch vermessen. Durch Lagerung bei hohen Temperaturen oberhalb  $-10\text{ °C}$  altern die Proben und zeigen höhere Relaxationsfrequenzen [Reynolds, 1985]. Dies wurde auch an aus zeriebenem Eis künstlich hergestelltem Schnee beobachtet [Paren und Glen, 1978]. Die viel niedrigeren Relaxationsfrequenzen entsprechen der bei isolierenden Elektroden immer wieder gefundenen und vielfach beschriebenen Raumladungsrelaxation, die stark von der Geschichte des Kristalls [Taubenberger, 1973], von erfahrener, mechanischer Verformung [Noll, 1978] und der Probendicke [Gränicher et al., 1955] abhängig ist.

Die aufgeführten Übereinstimmungen der niederfrequenten Eigenschaften polaren Eises aus Messungen mit dem hier vorgestellten Meßkondensator und Auswertung mit der Theorie zur Behandlung der Isolierschichten mit in der Literatur zu findenden Eigenschaften polaren Eises aus anderen etablierten Meßmethoden demonstriert die Möglichkeiten der in der vorliegenden Arbeit fortentwickelten Meßmethode zur Messung dielektrischer Eigenschaften polarer Eiskerne. Bevor im abschließenden Kapitel 5 über mögliche Ursachen der Beobachtungen spekuliert und zukünftige Anwendungen der Meßmethode evaluiert werden, soll kurz die Meßmethode als solches zusammenfassend diskutiert werden.

## 4.5 Diskussion der Theorie in der Meßanwendung

Die vom Eichskript ausgegebenen Fehler der dielektrischen Messung im hochfrequenten Bereich sind zwei Prozent oder genauer. Die Theorie eines zylinderförmigen Kondensators mit Isolierschichten trägt bei der Eichung wesentlich zur erreichten Genauigkeit bei, besonders der berechnete Fehler der Leerkapazität des realen Kondensators ist eine wichtige Eichgröße. Selbst relativ große angenommene Fehler für den Eiskernradius tragen in der Fortpflanzung zu den dielektrischen Eigenschaften des Eiskerns verglichen mit den Fehlern der elektrischen Messungen nur unwesentlich bei. Die Korrektur durch Berücksichtigung des etwas kleineren Radius des Eiskerns im Vergleich zum Meßelektrodenradius ist teilweise mehrere Prozent und damit wesentlich. Die Meßgenauigkeit ist hier zunächst ausgereizt, da die elektrische Messung führend zum Fehler beiträgt. Eine Verbesserung würde entweder ein besseres Meßgerät oder eine längere Meßelektrode erfordern und damit einen Verlust von Tiefenauflösung. In der weiteren Anwendung der dielektrischen Meßdaten zur Dichtebestimmung mit dem Looyengamodell tragen bei den doppelt so großen Dichtefehlern von 2 Prozent die über 1 Prozent Fehler in der Unbestimmtheit der Dielektrizitätskonstanten von reinem Eis entscheidend bei. Eine Verbesserung der Meßgenauigkeit im Tausch gegen Auflösungsverlust macht deshalb keinen Sinn. Die Fehler der Absolutwerte sind systematisch dominiert, d.h. der direkte Vergleich benachbarter Meßwerte ist mit wesentlich kleineren Fehlern behaftet als die in der vorliegenden Abhandlung angegebenen Fehler der Absolutmessung.

Die niederfrequenten Messungen haben bei Beträgen der Dielektrizitätskonstanten um 100 einige Prozent Fehler, d.h. sie haben bereits eine verlässliche Meßgenauigkeit. Einen wesentlichen Fehlerbeitrag liefert die Berücksichtigung des Einflusses der Oberflächenströme. Durch Messung bei tieferen Temperaturen kann dieser Einfluß reduziert werden. Die aus einer Notlage im Feld geborene Lagerung der Kerne bei  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  und möglichst schnelle Bearbeitung ist keinesfalls ideal. Die beobachteten Relaxationszeiten legen nahe, daß das ursprüngliche Verhalten des Firns im Eisschild gemessen wurde. Bei Messung im direkten Anschluß an die Bohrung ist von tieferen Temperaturen auszugehen, da die Kerne üblicherweise in einer kälteren Umgebung gebohrt werden. Analysen an der Oberfläche sollten zur Vermeidung einer Erwärmung durch Absorption von Sonnenstrahlung im Schatten besser in einem weißen Zelt stattfinden. Der aus der Durchmesserungenauigkeit und Eiskernpositionierung resultierende Fehler kann durch eine Positionier- und Meßeinrichtung auf ein bis zwei Zehntelmillimeter reduziert werden, womit sich der Fehlerbeitrag im Vergleich zum hier eingesetzten Fehler von einem Millimeter um einen Faktor fünf bis zehn verbessert. Die Positioniereinrichtung könnte z.B. mit kleinen Blasebälgen aus Plastikfolie realisiert werden. Die Dicke der Plastiksichten kann durch die Implementierung der bereits auf beliebig viele Schichten erweiterten Theorie exakt berücksichtigt werden. Auch eine Positionierung mit synchron ein- und ausgefahrenen Stäben ist möglich, muß aber wegen möglichem nicht behandelbarem Einfluß auf die Messung einen Abstand von einigen Zentimetern zum Meßbereich einhalten und ist damit ungenauer. Die genaue Vermessung der mit der dünnen Packfolie sogar im porösen Firn recht genau definierten Kernoberfläche ist z.B. mit Laserabstandsmessung möglich. Kontinuierliche und mit einer zehn Zentimeter langen Meßelektrode immer noch hochaufgelöste Messungen am Eiskern sind wissenschaftlich und technisch möglich. Über das bereits diskutierte Densimeter und die Vulkanschichtkandidatenidentifizierung hinausgehende Anwendungen werden im folgenden Kapitel 5 diskutiert.

# Kapitel 5

## Ausblick, Anwendungsmöglichkeiten, Spekulatives

Unterhalb einer bestimmten Tiefe ist die Bohrung eines Eiskerns die physikalischen Eigenschaften des Eisschildes in ihrer Gesamtheit am besten erhaltende Beprobungsmethode vor Ort. Damit kommt den physikalischen Meßverfahren am Eiskern die Bedeutung als Schnittstelle zu geophysikalischen Verfahren am Eisschild zu. Die dielektrischen Eigenschaften von Eis ändern sich wenig von den hier verwendeten Meßfrequenzen  $f = 250$  kHz zu Radarfrequenzen in der Größenordnung von GHz. Dielektrische Messungen am Eiskern sollten sich daher prinzipiell mit den Befunden elektromagnetischer Reflexionsverfahren vergleichen lassen. Bereits in den Anfängen wurden mit DEP gemessene Leitfähigkeiten zur Modellierung von synthetischen Radargrammen verwendet [Moore, 1989; Moore, 1988]. Selbst neuere Ansätze zur Modellierung von Radargrammen setzen immer noch bei der Berechnung der Dielektrizitätskonstanten über stark vereinfachende Näherungen von Mischungsmodellen [Miners et al., 1997; Glen und Paren, 1975] für den Firnbereich an. In die Modellierung von Radargrammen geht die gemessene komplexwertige Dielektrizitätskonstante polaren Eises ein, so daß die hier vorgenommene unmittelbare Messung der dielektrischen Eigenschaften am Eiskern die Unsicherheit durch Mischungsmodelle [Bogorodskii et al., 1985, Abschn. 3.6] eliminiert. Die zur Modellierung von Radargrammen benötigte Auflösung der Variabilität auf der Längenskala von Zentimetern ist mit minimiertem Probenpräparationsaufwand durch direkte Messung am Eiskern möglich. Erste Vergleiche von die Kernpositionen verbindenden Bodenradarprofilen [Nixdorf et al., 2000] mit aus den dielektrischen Messungen vorwärtsmodellierten synthetischen Radargrammen zeigen eine zuvor so nicht reproduzierte Übereinstimmung [pers. Mitt. Daniel Steinhage und Uwe Nixdorf, 2000]. Die Modellierung ist Gegenstand einer Dissertation, der hier nicht vorgegriffen werden soll.

Die dielektrischen Meßdaten eignen sich zur Berechnung der Firnkorrektur bei Radarmessungen. Die Ergebnisse der hier vorgestellten Eiskernmessungen werden zur Berechnung der Firnkorrektur für die Dronning Maud Land Radarbefliegung verwendet [pers. Mitt. Daniel Steinhage, 1999]. Aus Radarsatellitenmessungen abgeleitete Eigenschaften der Schneeoberfläche wurden ebenfalls mit den in dieser Arbeit

gemessenen Eiskerndaten verglichen [Zahnen, 1999].

Neben der bereits konkreten Anwendung zur Verknüpfung mit Radarmessungen bietet sich das Studium polaren Eises als Material an, um mehr über Eis an sich zu lernen. Polares Eis scheint besonders von der ständig erfahrenen Deformation geprägt zu sein. Basales Gleiten bringt eine Vielzahl von Defekten in die Kristalle ein, die teilweise sogar als Linien optisch zu erkennen sind [pers. Mitt. Josef Kipfstuhl, 1999]. Erhöhte Defektkonzentrationen wurden an verschiedener Stelle für die besonderen Eigenschaften polaren Eises diskutiert. Vassoille et al. [1982] vermuten für die von ihnen diskutierten besonderen mechanischen und dielektrischen Eigenschaften polaren Eises einer Veränderung der Konzentration und Verteilung intrinsischer Defekte durch Alterungsvorgänge verbunden mit den Bedingungen der Bildung von kristallinem Eis aus Schnee. Über den Alterungsprozeß an sich müssen sie Annahmen machen und haben Erklärungsprobleme, die Alterung bei den tiefen Temperaturen im Probenursprungsgebiet bei Dome C in der inneren Antarktis zu erklären. Sie vermuten kinetische Effekte an der Oberfläche als mögliche Erklärung für den Ablauf eines Alterungsprozesses. Mechanische Beanspruchung ist in der Lage die dielektrischen Eigenschaften von Eis zu verändern [Noll, 1978]. Wie bereits in Abbildung 4.15 erwähnt nennt Paterson [1994] ab der Tiefe mit nicht weiter abnehmender hochfrequenter Dielektrizitätskonstante die Rekristallisation und Deformation als dominierende Verdichtungsprozesse. Gleichzeitig wird der Druck auf die Kontaktpunkte höher. Paren und Glen [1978] finden für polares Eis im Byrd Kern [Hammer und Clausen, 1994] eine hochfrequente Dielektrizitätskonstante von 2.98. Für mit einem Käsehobel von einem massiven Eisblock abgeraspelte und dann definiert verdichtete Späne zur Erzeugung synthetischen Schnees finden sie in der Anpassung des Looyengamodells ebenfalls eine niedrige Dielektrizitätskonstante von 3.03.

Andere Mischungsmodelle liefern bei hohen Frequenzen ebenfalls niedrigere Dielektrizitätskonstanten als für künstliches Eis gefunden werden [Paren und Glen, 1978]. Chemische Spurenstoffkonzentrationen werden am Eiskern in hoher Auflösung gemessen. Kristalleigenschaften mißt man an ausgewählten Proben. Ein Ansatz zur Bestimmung der Dislokationsdichte als neben den bereits mit der Jaccard Theorie diskutierten ionischen und Bjerrum-Defekten weitere Fehlstellenart im Eis ergibt sich aus veränderten Röntgenbeugungstopographien für Eis mit Dislokationen [Mizuno, 1978]. Eine einfache vielversprechende Methode im Vergleich zur Topographie ist die Messung der Linienbreite verschiedener Reflexe. Solche Messungen fanden an einer Eiskernprobe stark verbreiterte Linien der a-Achsen Reflexe, die auf das Vorhandensein von Unterkorngrenzen sensitiv sind [pers. Mitt. Werner F. Kuhs, 2000]. Hier böte sich evtl. eine Möglichkeit, die Verformung eines gemessenen Eiskernbereichs abzuschätzen und den Zusammenhang mit veränderten dielektrischen Eigenschaften zu studieren.

Eine Anwendung dielektrischer Verfahren zur Messung der Anisotropie wäre z.B. eine Abschätzung der mittleren c-Achsenausrichtung und Vergleich mit Messungen aus gekreuzten Polarisatoranordnungen [Thorsteinsson et al., 1995; Thorsteinsson et al., 1997; Gow et al., 1997]. Folgt man älteren Literaturwerten von einer Anisotropie der statischen Dielektrizitätskonstanten von 15 % und der hochfrequenten von 2 % [Hobbs, 1974, Tabellen 2.1 & 2.2 ], so wäre die Messung der mittleren

Kristallachsenausrichtung möglich und eine gute Möglichkeit zur Verfolgung zwischen ihrer Ausrichtung nach vermessenen Schichten. Johari und Jones [1978] finden Werte mit 1 % Übereinstimmung der niederfrequenten und 5 ‰ Übereinstimmung der hochfrequenten Dielektrizitätskonstanten in Richtung der c-Achse und senkrecht dazu. Dem widersprechen von Petrenko und Whitworth [1999] zitierte Messungen [Kawada, 1978, 1979; Takei und Maeno, 1987] mit einer beobachteten Anisotropie im Bereich von mehr als 15 %. Eine Abschätzung der Kristallachsenausrichtung über Anisotropie könnte mit einer am Eiskern vorgenommenen Kapazitätsmessung im niederfrequenten Bereich möglich sein. In Richtung der Eiskernachse wählt man z.B. eine Anordnung aus zwei entlang der Kernachse angeordneten ringförmigen geschützten Elektroden. Eine zusätzlich dazu mit dem hier beschriebenen Meßkondensator in mehreren Richtungen gemessene Kapazität sollte, wenn auch mit beträchtlichem theoretischen und numerischen Aufwand, eine Bestimmung des mittleren Dielektrizitätstensors oder zumindest eine Abschätzung der Anisotropie der dielektrischen Eigenschaften zwischen Eiskernachse und senkrecht dazu ermöglichen. Der Dielektrizitätstensor wäre nicht nur zur Messung der mittleren c-Achsenverteilung interessant, sondern Eingangsgröße zur Berücksichtigung der doppelbrechenden Eigenschaften von Eis [Hargreaves, 1978] in der Modellierung synthetischer Radargramme. Die Anisotropie der Dielektrizitätskonstanten wurde erst kürzlich zur Erklärung von Radargrammen [Fujita und Mae, 1994; Fujita et al., 1999] herangezogen. Bis die vorgeschlagenen methodischen Weiterentwicklungen zur Messung der dielektrischen Eiskerneigenschaften umgesetzt sind und an eine Verfeinerung der Radargramme zu denken ist, bietet sich eine Klassifizierung der von vielfältigen Spurenstoff- und Kristalleigenschaftskombinationen geprägten Eiskernbereiche nach ihren elektrischen Eigenschaften an. Die eingehende Studie möglichst vieler weiterer physikalischer und chemischer Eigenschaften verschiedener das gleiche Signal repräsentierender Abschnitte sollte ein tieferes Verständnis für die das dielektrische Signal bestimmenden Effekte und ihr Zusammenspiel ermöglichen.

# Anhang

# Anhang A

## Mathematische Hilfsmittel

### A.1 Hilfsmittel für Rechnungen mit den modifizierten Besselfunktionen

Für die Betrachtungen im Hauptteil werden die Verhältnisse der modifizierten Besselfunktionen benötigt. Für die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art läßt sich das benötigte Ergebnis leicht zeigen, während für die modifizierten Besselfunktionen erster Art aus den in Abramowitz und Stegun [1965] angegebenen Relationen kein direkter Beweis folgt. Die Erarbeitung eines Beweises gemeinsam mit Michael Rösgen [pers. Mitteilung, 1998] erschien einfacher als eine aufwendige Literaturrecherche.

#### A.1.1 Verhältnis $\frac{K_n}{K_{n+1}}$ der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art

**Behauptung** Die  $(n - 1)$ -te ist kleiner als die  $n$ -te modifizierte Besselfunktion zweiter Art für positives reelles Argument  $x \in \mathbb{R}_0^+$  und natürliche Ordnung  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\frac{K_{n-1}(x)}{K_n(x)} \leq 1 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}_0^+ . \quad (\text{A.1})$$

**Beweis** Nach Abramowitz und Stegun [1965, Abschnitt 9.6.] sind die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art  $K_n(x) > 0$  für natürliche Ordnungen  $n \in \mathbb{N}_0$  und positive reelle Argumente  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Ableitung für natürliche Ordnung [Abramowitz und Stegun, 1965, Formel 9.6.45] ist damit positiv:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \nu} K_\nu(x) \right]_{\nu=n} = \frac{n!}{2} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^k K_k(x)}{(n-k)k!} \geq 0 . \quad (\text{A.2})$$

Für mit der Ordnung wachsendes  $K_n(x)$  ist das aber gerade die Behauptung.

## A.1.2 Verhältnis $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ der modifizierten Besselfunktionen erster Art

**Behauptung** Die  $(n + 1)$ -te ist kleiner als die  $n$ -te modifizierte Besselfunktion erster Art für positives reelles Argument  $x \in \mathbb{R}_0^+$  und natürliche Ordnung  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} \leq 1 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}_0^+ . \quad (\text{A.3})$$

**Beweis** Die in Abramowitz und Stegun [1965, Formel 9.6.28] angegebene Formel für die Ableitung:

$$I_{n+1}(x) = x^n \frac{d}{dx} \frac{I_n(x)}{x^n} \quad (\text{A.4})$$

teilt man durch  $I_n(x)$ . Die logarithmische Ableitung liefert gemeinsam mit der in Abramowitz und Stegun [1965, Abschnitt 9.6.] angegebenen Eigenschaft  $I_n(x) > 0$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{d}{dx} \frac{I_n(x)}{x^n} . \quad (\text{A.5})$$

Die Beweisidee ist nun, die Ableitung des Verhältnisses  $\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}$  abzuschätzen, und dann gemeinsam mit einer weiteren Abschätzung des Anfangswertes und der Dreiecksungleichung für Integrale [Heuser, 1990a, Satz 85.1] eine Abschätzung für das Verhältnis der modifizierten Besselfunktionen zu finden. Zur Abschätzung der Ableitung des Verhältnisses betrachtet man:

$$\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = \frac{d}{dx} \frac{\frac{I_{n+1}(x)}{x^n}}{\frac{I_n(x)}{x^n}} = \frac{\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}(x)}{x^n}}{\frac{I_n(x)}{x^n}} - \frac{\frac{d}{dx} \frac{I_n(x)}{x^n}}{\left(\frac{I_n(x)}{x^n}\right)^2} I_{n+1}(x) \stackrel{(\text{A.5})}{=} \frac{\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}(x)}{x^n}}{\frac{I_n(x)}{x^n}} - \left(\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}\right)^2 . \quad (\text{A.6})$$

Um eine Differentialgleichung in  $\frac{I_{n+1}}{I_n}$  zu erhalten, schätzt man weiter den ersten Term ab. Aus der in Abramowitz und Stegun [1965, Formel 9.6.10] angegebenen Potenzreihe

$$I_n(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (\text{A.7})$$

berechnet man Potenzreihen für:

$$\frac{I_n}{x^n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (\text{A.8})$$

und

$$\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}}{x^n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2(n+k+1)} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} . \quad (\text{A.9})$$

Vergleicht man nun (A.8) und (A.9) gliedweise, so folgt  $\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}}{x^n} \leq \frac{I_n}{x^n}$  und mit Einsetzen in (A.6):

$$\frac{d}{dx} \frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} \leq 1 - \left(\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)}\right)^2 . \quad (\text{A.10})$$

Den Fall für Gleichheit erfüllt gerade der Tangenshyperbolicus  $\tanh$ :  $\frac{d}{dx} \tanh(x) = 1 - \tanh^2(x)$ . Anhand der Potenzreihe für  $I_n$  (A.7) stellt man fest, daß  $\frac{I_{n+1}(0)}{I_n(0)} = 0$

für natürliche Ordnung  $n \in \mathbb{N}_0$ . Auch der Tangenshyperbolicus verschwindet für das Argument 0,  $\tanh(0) = 0$ . Mit der Dreiecksungleichung für Integrale [Heuser, 1990a, Satz 85.1] und der Abschätzung für den Tangenshyperbolicus  $\tanh(x) \leq 1$  für reelle  $x \in \mathbb{R}$  [Bronstein und Semendjajew, 1989, Tabelle 2.5.2.3.2.], folgt dann die Behauptung für alle Argumente  $x \in \mathbb{R}_0^+$  und alle natürlichen Ordnungen  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = \int_0^x \frac{d}{dx'} \frac{I_{n+1}(x')}{I_n(x')} dx' \leq \int_0^x \frac{d}{dx'} \tanh(x') dx' = \tanh(x) \leq 1. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Zweidimensionale Potentialtheorie und harmonische Funktionen

Für ein zweidimensionales Problem mit bekannter Potentialfunktion ist eine Parametrisierung der Feldlinien gesucht. Mit Hilfe der Funktionentheorie ist das Problem wegen der speziellen Eigenschaften harmonischer Funktionen leicht zu lösen. In Remmert [1995a, Kap. 1, §§ 1–2] werden Betrachtungen zu Potentialgleichungen in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten vorgenommen. Eine harmonische Funktion ist eine Funktion, die die ebene Laplace-Gleichung (in Gleichung (2.28) in Polarkoordinaten angegeben) erfüllt. Budó [1987, §86] diskutiert das hydrodynamische Problem der Bestimmung der Stromlinien aus dem Geschwindigkeitspotential für eine ebene Strömung. Die mathematische Lösung dieses Problems liefert zwei Funktionen, deren Kurvenscharen für konstante Werte senkrecht aufeinander stehen, also genau das Verhältnis von Feldlinien und Äquipotentialflächen nach Definition. Diese beiden Funktionen sind Real- und Imaginärteil einer komplex differenzierbaren Funktion, d.h. durch analytische Fortsetzung der bekannten Potentialfunktion läßt sich eine Parametrisierung der Feldlinien finden. Diese Funktionen werden nun in Polarkoordinatendarstellung konstruiert.

Ausgehend von der Euler-Darstellung für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten ( $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  mit  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$  [Remmert, 1995a, Kap. 5, §3]) und der Darstellung des Gradienten in Polarkoordinaten ( $\text{grad } \Phi(\rho, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$ ) [Jackson, 1982] betrachtet man eine analytische komplex differenzierbare Funktion<sup>1</sup>. Die  $\Phi$  und  $\Upsilon$  können auch komplexwertig sein, dann sind sie jedoch nicht mehr Real- und Imaginärteil der analytisch fortgesetzten Funktion:

$$w = g(z) = g(\rho e^{i\varphi}) = \Upsilon(\rho, \varphi) + i \Phi(\rho, \varphi). \quad (\text{A.12})$$

Die partielle Differentiation dieser Funktion in Polarkoordinaten ergibt:

$$\text{grad}_\rho w = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial g(z)}{\partial z} e^{i\varphi} = \text{grad}_\rho \Upsilon + i \text{grad}_\rho \Phi, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{grad}_\varphi w = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial g(z)}{\partial z} i e^{i\varphi} = \text{grad}_\varphi \Upsilon + i \text{grad}_\varphi \Phi. \quad (\text{A.14})$$

---

<sup>1</sup>Real- und Imaginärteil  $\Upsilon$  bzw.  $\Phi$  sind hier im Gegensatz zur Betrachtung in Budó [1987] vertauscht, da die Potentialfunktion  $\Phi$  mit dem Imaginärteil identifiziert werden wird und der Realteil wurde mit  $\Upsilon$  bezeichnet, da  $\Psi$  für den bis auf einen Vorfaktor identischen elektrischen Fluß reserviert bleiben soll.

Bedingungen an die Richtungsableitungen ergeben sich durch Addition der mit  $i$  multiplizierten zweiten Gleichung (A.14) zur ersten (A.13):

$$\operatorname{grad}_\rho \Upsilon - \operatorname{grad}_\varphi \Phi + i (\operatorname{grad}_\rho \Phi + \operatorname{grad}_\varphi \Upsilon) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (\text{A.15})$$

Reeller und imaginärer Anteil sind linear unabhängig, so daß beide Anteile einzeln verschwinden müssen:

$$\operatorname{grad}_\rho \Upsilon = \operatorname{grad}_\varphi \Phi , \quad (\text{A.16}) \quad \operatorname{grad}_\rho \Phi = -\operatorname{grad}_\varphi \Upsilon . \quad (\text{A.17})$$

Bildet man nun unter Verwendung der Relationen  $\operatorname{div}_\rho A_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A_\rho$  und  $\operatorname{div}_\varphi A_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$  die Divergenz  $\operatorname{div}_\rho A_\rho + \operatorname{div}_\varphi A_\varphi$  durch geschickte Addition und Subtraktion der Divergenz der Gleichungen (A.16) und (A.17) unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen:

$$\operatorname{div}_\rho \operatorname{grad}_\varphi A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \rho} A = \operatorname{div}_\varphi \operatorname{grad}_\rho A , \quad (\text{A.18})$$

so verifiziert man sowohl für  $\Phi$ , als auch für  $\Upsilon$  die Gültigkeit der Laplaceschen Gleichung:

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0 , \quad (\text{A.19}) \quad \Delta \Upsilon = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Upsilon = 0 . \quad (\text{A.20})$$

Dies legt eine häufige Anwendung dieser Relationen nahe. Man macht einen Ansatz für eine reguläre Funktion, deren Real- oder Imaginärteil den Randbedingungen eines Potentialproblems genügt und hat wegen der Gültigkeit der Poissongleichung damit eine Lösung für das Potentialproblem gefunden. Neben den hydrodynamischen Anwendungen in Budó [1987, § 86] sei z.B. die Berechnung des Randfeldes eines Plattenkondensators erwähnt [Greiner, 1991, Bsp. 4.7].

Die für die Parametrisierung der Feldlinien aus der Potentialfunktion benötigte Eigenschaft wird im folgenden betrachtet. Multipliziert man die rechten und linken Seiten der Gleichungen (A.16) und (A.17) und faßt zusammen, so findet man das verschwindende Skalarprodukt der Richtungsableitungen von  $\Phi$  und  $\Upsilon$ , das die Orthogonalität der Gradienten impliziert:

$$(\operatorname{grad} \Phi) \cdot (\operatorname{grad} \Upsilon) = (\operatorname{grad}_\rho \Phi) (\operatorname{grad}_\rho \Upsilon) + (\operatorname{grad}_\varphi \Phi) (\operatorname{grad}_\varphi \Upsilon) = 0 . \quad (\text{A.21})$$

Da die Gradienten senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen [Budó, 1987, § 9] und selbst orthogonal zueinander sind, sind also auch die Kurvenscharen von  $\Upsilon = \text{const}$  und  $\Phi = \text{const}$  orthogonal zueinander. Hat man also eine harmonische Funktion gefunden, deren Real- oder Imaginärteil Potentialfunktion ist, so parametrisiert der jeweils andere Anteil die Feldlinien.

Wegen der Gültigkeit dieser Betrachtung allgemein für komplexe Funktionen kann bei bekannter Potentialfunktion nach analytischer Fortsetzung die Feldlinienparametrisierung abgelesen werden. Für die analytische Fortsetzung in Polarkoordinaten ist die direkt aus der Euler-Darstellung ersichtliche Moivresche Formel [Remmert, 1995a, Kap. 5, § 3, Abschn. 1] nützlich:

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0 . \quad (\text{A.22})$$

Für Inverse von  $z$  ändert sich bezüglich des Winkels  $\varphi$  lediglich ein Vorzeichen:

$$\frac{1}{z^n} = \rho^{-n} e^{-in\varphi} = \rho^{-n} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{A.23})$$

# Anhang B

## Quellcode verwendeter Programme

Der Quellcode ist auf Anfrage beim Autor erhältlich.

# Anhang C

## Aufgetragene Daten bearbeiteter Eiskerne

Die Daten bearbeiteter Eiskerne sind auf Anfrage beim Autor erhältlich.  
Die Bereitstellung der Daten in der Datenbank **PANGAEA**  
(<http://www.pangaea.de>) ist geplant.

# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Koordinatensystem für die Berechnung der Leerkapazität . . . . .  | 6  |
| 2.2  | Fehlerabschätzung für die Auswertung der Doppelsumme . . . . .  | 13 |
| 2.3  | Variation der Leerkapazität eines realen DEP-Kondensators (a:) und einer Bohrlochsonde (b:) mit der Schutzelektrodenlänge . . . . .       | 16 |
| 2.4  | Variation der Leerkapazität eines Kondensators mit der Luftspaltbreite  | 17 |
| 2.5  | Koordinaten und Bezeichnungen für die Berechnungen im konzentrisch geschichteten Dielektrikum . . . . .                                   | 19 |
| 2.6  | Datenflußplan zur effektiven Dielektrizitätskonstanten . . . . .  | 27 |
| 2.7  | Modell für den Einfluß benachbarter Schichten . . . . .   | 32 |
| 2.8  | Ersatzschaltbilder für das Modell eines Plattenkondensators in großer Entfernung von der Grenzschicht . . . . .                           | 33 |
| 2.9  | Potentialverteilung für eine Kernmessung bei hohen Frequenzen . . .   | 40 |
| 2.10 | Potentialverteilung für eine Kernmessung bei niedrigen Frequenzen .   | 40 |
| 2.11 | Potentialverteilung für eine Bohrlochmessung bei hohen Frequenzen .   | 41 |
| 2.12 | Abweichungen zwischen dem Modell eines Plattenkondensators und der Theorie . . . . .  | 42 |
| 2.13 | Potentialverteilung am Rand des Bereichs für große Abweichungen des Plattenkondensatormodells . . . . .                                   | 43 |
| 2.14 | Effektive Dielektrizitätskonstante und ihre relative Abweichung bei hohen Frequenzen an einer Grenzfläche in axialer Richtung . . . . .   | 44 |
| 2.15 | Effektive Dielektrizitätskonstante und ihre relative Abweichung bei niedrigen Frequenzen an einer Grenzfläche in axialer Richtung . . . . | 45 |
| 3.1  | Abbildungseigenschaften von $\frac{\epsilon_a^*}{\epsilon_a}(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_a})$ für eine Standardapparatur . . .             | 51 |
| 3.2  | Inversionseigenschaften des Newtonverfahrens für eine Standardapparatur . . . . .   | 58 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.3  | Real- und Imaginärteil der effektiven Dielektrizitätskonstanten für Eis bei hohen und niedrigen Frequenzen in Abhängigkeit vom Radienverhältnis . . . . .                                     | 71  |
| 3.4  | Real- und Imaginärteile der Ableitungen nach den Parametern der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns gegen das Radienverhältnis für hohe Frequenzen . . . . .     | 72  |
| 3.5  | Real- und Imaginärteile der Ableitungen nach den Parametern der durch Umkehrung bestimmten Dielektrizitätskonstanten eines Kerns gegen das Radienverhältnis für niedrige Frequenzen . . . . . | 73  |
| 3.6  | Beispiel für die Eichung bei einer Meßfrequenz von 250 kHz . . . . .  | 78  |
| 4.1  | Prinzip der Meßbank . . . . .   | 88  |
| 4.2  | Packprinzip für Eiskerne . . . . .  | 90  |
| 4.3  | Einpacken eines Eiskerns im Feldeislabor . . . . .  | 90  |
| 4.4  | Schnitt durch den Meßkondensator . . . . .  | 92  |
| 4.5  | Meßelektrodenpaar im Einbaurahmen . . . . .   | 92  |
| 4.6  | Prinzip des $\gamma$ -Densimeters . . . . .   | 95  |
| 4.7  | $\gamma$ -Densimeter . . . . .  | 95  |
| 4.8  | Beispiel für einen vom Eichskript ausgegebenen Datensatz bei einer Meßfrequenz von 250 kHz . . . . .  | 100 |
| 4.9  | Beispiel für bei einer Meßfrequenz von 250 kHz gemessene Eiskerneigenschaften . . . . .   | 102 |
| 4.10 | Nach der Theorie zur Behandlung der Isolierschicht am geeichten Datensatz vorgenommene Korrekturen . . . . .  | 104 |
| 4.11 | Beispiel für einen mittels $\gamma$ -Streuung gemessenen Dichtedatensatz . . . . .  | 104 |
| 4.12 | Beispiel für eine Messung auf der früher beschriebenen DEP-Meßbank bei hoher Frequenz . . . . .   | 106 |
| 4.13 | Abbildungseigenschaften der Looyengagleichung für festgehaltenen Realteil der Dielektrizitätskonstanten der Eisphase in der Mischung mit Luft . . . . .                                       | 113 |
| 4.14 | Nicht injektiver Bereich der Looyengaabbildung . . . . .  | 117 |
| 4.15 | Berechnung dielektrischer Eigenschaften der Eisphase nach dem Looyengamodell aus geglätteten Datensätzen . . . . .  | 119 |
| 4.16 | Beispiel für bei einer Meßfrequenz von 250 kHz gemessene Eigenschaften der Eisphase nach dem Looyengamodell . . . . .   | 122 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.17 Vergleich der nach dem Looyengamodell bestimmten Dichte mit aus $\gamma$ -Streuung bestimmten Dichten . . . . .   | 123 |
| 4.18 Vergleich der nach dem Looyengamodell bestimmten Eigenschaften der Eisphase mit den Eigenschaften der Mischung im Bereich mit wahrscheinlich vulkanogenem Eintrag . . . . . | 126 |
| 4.19 Meßbeispiel für niedrige Frequenzen . . . . .   | 129 |

# Tabellenverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Potenzreihen und Restglied für Potential, Feldlinien und Feldkomponenten für ein Medium mit zwei Schichten . . . . .                              | 38 |
| 3.1 | Die Restglieder der Potenzreihen für die effektive Dielektrizitätskonstante und ihre Ableitungen . . . . .  | 49 |
| 3.2 | Maximale relative Abweichungen und Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz des Newton-Algorithmus für verschiedene Radienverhältnisse . . . . . | 59 |
| 4.1 | Kenngrößen der Meßbank mit 100 mm Nenndurchmesser . . . . .   | 91 |
| 4.2 | Kenngrößen der früher beschriebenen DEP-Meßbank . . . . .   | 98 |

# Symbolverzeichnis

| Symbol               | Beschreibung, ausgewählte Seiten  |
|----------------------|---|
| $(x, y, z)$          | kartesisches Koordinatensystem, 5–7, 9, 19, 20, 22, 24, 25, 30, 32, 67  |
| $\vec{r}$            | Ortsvektor, 6   |
| $a$                  | Elektrodenradius, 6, 10–12, 14, 64  |
| $\xi$                | Meßelektrodenbegrenzungswinkel, 6, 11, 12, 14, 16, 24, 25, 28, 41–43, 48–51, 53, 58–60, 63, 65, 67, 69, 71–73, 79, 85, 91, 92, 98 |
| $l$                  | Meßelektrodenlänge, 6, 11, 12, 14, 23–25, 32, 34, 35, 37, 38, 44, 45, 48, 65, 67, 75, 123, 128                                    |
| $\phi_0$             | Meßelektrodenwinkel, 6, 25, 32, 34, 35, 40–42, 65, 68   |
| $V$                  | Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, 6, 7, 10, 11, 20, 22, 24, 25, 30–35, 37, 38, 40–43                                    |
| $\psi$               | Spaltbegrenzungswinkel, 6, 7, 9–12, 14, 16, 17, 20–22, 24, 25, 28, 30, 35, 48, 64   |
| $(\rho, \varphi, z)$ | Zylinderkoordinaten, 6–11   |
| $L$                  | Schutzelektrodenlänge, 6–8, 10–12, 14, 32, 34, 35, 41, 43–45  |
| $\lambda$            | Wellenlänge, 7  |
| $c$                  | Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , 7  |
| $\Delta f$           | Laplace Operator auf die Funktion $f$ angewendet, 7, 20, 33, 139  |
| $f$                  | Messfrequenz, 7, 68, 70–73, 75–77, 83, 98, 128, 129, 132  |
| $\Phi$               | Potentialfunktion, 7, 8, 10, 11, 20–25, 30, 31, 33–35, 37, 38, 40, 41, 43, 67, 138, 139   |
| $k$                  | Summationsvariable, 8, 10, 12, 136  |
| $n$                  | Summationsvariable, 8, 10–14, 29, 31, 33, 34, 50, 51, 80, 81, 83, 124   |
| $Z(z)$               | Separationsansatz für den Zylinderachsenanteil, 8, 9  |
| $\mathbb{Z}$         | ganze Zahlen, 8, 9  |
| $Q(\varphi)$         | Separationsansatz für den Winkelanteil, 8, 9, 21  |
| $R(\rho)$            | Separationsansatz für den Radialanteil, 8, 9, 21, 22  |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $\mathbb{N}_0$               | natürliche Zahlen und $\{0\}$ , 8–10, 12, 21, 22, 136–140   |
| $\nu$                        | Summationsvariable, 8–10, 21–23   |
| $\infty$                     | unendlich, 8–12, 14, 19–27, 29–31, 33–35, 37, 38, 41, 49–53   |
| $\sum_{n=N_1}^{N_2} s_n$     | Summe über die $s_n$ von $n = N_1$ bis $n = N_2$ , 8–14, 21–26, 28–31, 33, 34, 37, 38, 49–51, 53, 136, 137  |
| $m$                          | Summationsvariable, 9–14, 21–28, 30, 35–38, 49, 50, 53  |
| $\hat{\sigma}$               | Oberflächenladungsdichte, 10, 11  |
| $K_\nu$                      | modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art $\nu$ -ter Ordnung, 10–12, 14, 136   |
| $I_\nu$                      | modifizierte Besselsche Funktion erster Art $\nu$ -ter Ordnung, 10–12, 14, 137, 138   |
| $X_{<}, X_{>}, X_{\{\leq\}}$ | Funktion $X$ (innerhalb, außerhalb, alternativ) des Zylinders, 10–12, 14, 16, 24, 25, 36–38, 49   |
| $\varepsilon_0$              | Elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante ( $8.8542 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ), 11, 12, 14, 19, 20, 23–25, 34, 35, 37, 38, 48, 67, 68, 103 |
| $C_0$                        | Leerkapazität, 11, 12, 20, 65, 70, 78–81, 83–85, 97, 99   |
| $X _z$                       | Größe $X$ an der Stelle $z$ ausgewertet, 11, 14, 17, 21, 24, 25, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 60, 115, 67, 79  |
| $\varepsilon$                | relative Dielektrizitätskonstante, 11, 14, 18, 20, 42–45, 61, 79–81, 83, 84, 110, 128, 129  |
| $Q$                          | Ladung, 11, 21, 24, 25, 33, 34  |
| $x'$                         | Integrationsvariable oder umindizierter Summationsindex, außer bei $x = \varepsilon$ , 11, 24, 25, 30, 33, 34, 67, 138  |
| $f_z$                        | Cauchy-Netz an der Stelle $z$ , 12  |
| $C_0^\infty$                 | Leerkapazität des in $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Zylinders, 12, 14–17, 24–26, 44, 45, 47, 48, 53, 65, 75, 77   |
| $x, y, z, w$                 | Variablen, 12, 23, 25, 28, 29, 34, 50, 51, 54, 60, 63, 64, 91, 115, 136–140   |
| $ z $                        | Absolutbetrag von $z$ , 12, 28, 29, 31, 48, 50, 54, 68, 69, 74, 79–81, 83–85, 97–99, 101, 118, 121, 122, 138  |
| $\epsilon$                   | Fehlerschranke, 12–14, 26, 27, 29, 57   |
| $N$                          | Summationsgrenze einer mit $n$ indizierten Summe, 12–14, 26, 27, 39, 80, 81, 83, 123, 124   |
| $M$                          | Summationsgrenze einer mit $m$ indizierten Summe, 12–14, 28   |
| $C_0^L$                      | Korrekturterm für den endlich langen Zylinder, 12–16  |
| $\mathcal{N}_i$              | Anzahl der betrachteten Perioden in der Summe über $i$ , 13   |
| $\mathcal{P}_i$              | Periodenlänge in der Summe über $i$ , 13, 14, 25  |

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $\varepsilon_i$               | Dielektrizitätskonstante der $i$ -ten Schicht, 18, 19, 21–25, 27, 28, 32, 34, 35, 41, 76  |
| $\rho_i$                      | Radius der $i$ -ten Schicht, 18–24, 26, 27, 30–32, 34, 35, 76   |
| $t$                           | Zeitvariable, 19  |
| $i$                           | imaginäre Einheit, 19, 20, 34, 45, 50, 52, 54, 63, 70, 71, 74–76, 110, 112, 114, 115, 138, 139  |
| $\omega$                      | Kreisfrequenz des anregenden Wechselfeldes, 19, 20, 45, 70, 84, 103   |
| $\varepsilon'$                | Realteil der Dielektrizitätskonstanten, 19, 20, 50, 63, 64, 68, 69, 72–74, 76, 99–103, 106, 110–112, 114, 118, 119, 122, 125              |
| $\varepsilon''$               | Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten, 19, 20, 50, 63, 64, 68, 69, 72–74, 76, 99–103, 106, 111, 112, 114–116, 118, 121, 122, 125–128 |
| $\sigma$                      | Leitfähigkeit, 19, 20, 61, 70, 103, 129   |
| $\vec{j}$                     | Stromdichtevektor, 19, 20, 67   |
| $e$                           | Exponentialfunktion; Eulersche Zahl, 19, 35, 50, 110, 138–140   |
| $\sigma_i$                    | Leitfähigkeit der $i$ -ten Schicht, 19, 70  |
| $\vec{E}$                     | elektrische Feldstärke, 19–21, 37, 38, 67   |
| $(\rho, \varphi)$             | Polarkoordinaten, 19–25, 30, 36–38, 67, 138–140   |
| $Y$                           | Scheinleitwert (Admittanz), 20  |
| $\hat{\rho}$                  | spezifischer Widerstand, 20   |
| $\vec{\nabla}$                | Nablaoperator, 20   |
| $\vec{D}$                     | elektrische Flußdichte, 20, 21, 24, 67  |
| $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$ | Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow y$ , 20, 23, 35  |
| $\text{Im } z$                | Imaginärteil der komplexen Zahl $z$ , 20, 23, 51, 54, 58, 63, 64, 70, 84, 85, 101, 103, 112–115, 118, 120, 121, 138                       |
| $C$                           | Kapazität unterschieden von der Leerkapazität $C_0^\infty$ , 20, 24, 25, 33–35, 41, 42, 44, 45, 47, 53, 70, 75, 78–81, 83–85, 97, 101     |
| $\vec{H}$                     | magnetische Feldstärke, 20, 52  |
| $G$                           | Leitwert, 20, 79, 84, 85, 97, 98  |
| $X^i$                         | Größe $X$ in der $i$ -ten Schicht, 20–25, 30, 67  |
| $X_u$                         | $u$ -Komponente des Vektorfeldes von $\vec{X}$ , 21, 37, 38, 67   |
| $a_m^i, b_m^i$                | $m$ -te Koeffizienten für die $i$ -te Schicht der Potentialreihenentwicklung, 22, 23, 25, 27, 30, 36, 48                                  |
| $g(z)$                        | komplexe Funktion mit $\Phi(\rho, \varphi) = \text{Im } g(z)$ und $\Upsilon(\rho, \varphi) = \text{Re } g(z)$ , 23, 24, 138               |
| $\Upsilon$                    | Feldlinienparametrisierung, 23, 24, 138, 139  |

|   |   |
|---|---|
| $\operatorname{Re} z$                   | Realteil der komplexen Zahl $z$ , 23, 24, 51, 52, 54, 58, 63, 64, 70, 75, 84, 85, 101, 103, 112–115, 120, 121, 138  |
| $A_m, B_m, C_m$                         | Hilfskoeffizienten zur Bestimmung der $a_m^i$ und $b_m^i$ , 23, 36  |
| $\varepsilon^*$                         | effektive Dielektrizitätskonstante des konzentrischen Mediums, 24, 25, 43–45, 47–53, 55–60, 70, 76, 79, 103   |
| $\Psi$                                  | Flußfunktion, 24, 37, 38, 42, 67, 68  |
| $\vec{e}_u$                             | Einheitsvektor bzgl. der $u$ -Komponente des Gradienten, 24, 67, 138  |
| $S$                                     | abkürzende Schreibweise für $S(0, \infty) = \sum_{m=0}^{\infty} s_m$ , 25–28, 30  |
| $R(N)$                                  | Restglied bei Abbruch nach $N$ -Summanden $R(N) = \left  \sum_{m=N+1}^{\infty} s_m \right $ , 26, 27, 29  |
| $\mathbb{R}_0^+$                        | positive reelle Zahlen und $\{0\}$ , 26, 28, 136–138  |
| $q, q_j, p_j$                           | Produkt aus Radienverhältnissen mit $q \in [0, 1)$ , bei Potenzreihen $q_j \in [0, 1)$ im Zähler, $p_j \in [0, 1)$ im Nenner, 26, 28, 29  |
| $S(N_0, N_1)$                           | Summe mit expliziter Angabe der Grenzen $S(N_0, N_1) = \sum_{m=N_0}^{N_1} s_m$ , 26–29, 38, 49, 62, 80, 81, 83, 124   |
| $\bar{S}(N_0, N_1)$                     | majorisierende Potenzreihe $\bar{S}(N_0, N_1) = \sum_{m=N_0}^{N_1} \bar{s}_m$ , mit $ s_m  \leq \bar{s}_m$ für fast alle Indizes $m$ , 26–30, 38, 49  |
| $\mathbb{N}$                            | natürliche Zahlen, 27–29  |
| $\mathbb{C}^\times$                     | Einheitengruppe der komplexen Zahlen, d.h. $\mathbb{C}$ ohne $\{0\}$ , 28   |
| trig                                    | Abhängigkeiten der Potenzreihesummanden von den Winkelfunktionen, insbes. ist $ \operatorname{trig}  \stackrel{!}{\leq} 1$ vorausgesetzt, 28  |
| $\mathbb{R}^+$                          | positive reelle Zahlen, 28, 136, 137  |
| $N_0, N_1$                              | natürlicher Index; Summationsgrenze, 28, 29   |
| $l_q, l_p$                              | Anzahl nichtverschwindender Koeffizienten $Q_j, P_j$ und Radienverhältnisse $q_j, p_j$ bei komplexwertigen Summen, 28, 29   |
| $Q_j, P_j$                              | Koeffizienten komplexwertiger Potenzreihen $Q_j$ im Zähler, $P_j$ Nenner, 28, 29, 39, 48  |
| $r$                                     | Exponent im Nenner der allgemeinen Form der auftretenden Potenzreihen $S(N_1, N_2)$ , 28, 29, 39, 48  |
| $\mathcal{D}$                           | Konstante zur Abschätzung des Nenners von Potenzreihen $\mathcal{D} \in (0, 1)$ , 28, 29, 39, 48  |
| $\mathbb{C}$                            | komplexe Zahlen, 28, 51, 54, 55, 139, 140, 97   |
| $N_1(\epsilon)$                         | gewählter natürlicher Index zur Erfüllung einer Fehlerschranke $\epsilon$ , 29  |
| $\bar{\Phi}^{1,2}, \varepsilon_i^{1,2}$ | beim Plattenkondensatormodell nach den Bereichen mit negativer und positiver $z$ -Koordinate unterschiedene Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2$ und Spannungsmittelwerte $\bar{\Phi}^{i1}, \bar{\Phi}^{i2}$ , 30, 32, 41 |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $\bar{X}$                      | integraler Mittelwert der Größe $X$ , außer bei Bezeichnung von $\bar{S}$ , 30, 41, 67   |
| $(x, y, z)$                    | kartesische Koordinaten, 30–34   |
| $V_1, V_2$                     | Potentiale im Bereich negativer bzw. positiver $z$ -Koordinate des Plattenkondensatormodells, 30–35, 41  |
| $X_M$                          | zu den Größen der Theorie $X$ im Plattenkondensatormodell korrespondierende Größen, 31, 33–35, 41, 44, 45  |
| $d$                            | halbe Dicke der Isolierschicht beim Plattenkondensatormodell $d =  \rho_1 - \rho_2 $ , 31–35, 44   |
| $C_M^{+\infty}, C_M^{-\infty}$ | Kapazität nach dem Plattenkondensatormodell für große Entfernung $L \rightarrow +\infty$ bzw. $L \rightarrow -\infty$ von der Mediengrenzfläche, 35, 41, 42  |
| $\delta_C C_M$                 | relative Abweichung des Plattenkondensatormodells von der Theorie für den zylinderförmigen Kondensator bei großen Abständen von der Mediengrenzfläche, 35, 42, 43  |
| $\delta C_M$                   | relative Abweichung der Kapazität nach dem Plattenkondensatormodell $C_M$ von der Kapazität $C_M^{+\infty}$ in großen Abstand von der Mediengrenzfläche, 35, 44, 45  |
| $X^{a,i}$                      | ersetzen bei einer Messung mit einer Isolierschicht ( <b>außen</b> ) und einem Kern bzw. einer Bohlochmatrix ( <b>innen</b> ), die Indizes $i = 1, 2$ , 35–38, 41, 48, 67, 70, 56  |
| $a, b$                         | ersetzen bei einer Messung mit einer Isolierschicht den Elektrodenradius $\rho_1 \rightarrow a$ und den Radius der Isolierschicht-/Kern- bzw. Bohrlochmatrixgrenze $\rho_2 \rightarrow b$ , 35–38, 42–45, 49, 67–70, 74, 78, 79, 85, 91–93, 96–98, 104, 105, 128 |
| $\varepsilon_a, \varepsilon_i$ | Dielektrizitätskonstante der Isolierschicht und des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix, 35–43, 47–53, 55–60, 63, 64, 67–73, 78, 79, 85, 91, 98, 103   |
| $A_m^{a,i}, B_m^{a,i}$         | Hilfskoeffizienten zur Formulierung der Produkte aus den Koeffizienten $a_m^{a,i}, b_m^{a,i}$ und den Radienverhältnispotenzen zur geschlossenen Formulierung, 36  |
| $\rho_a, \rho_{a<}, \rho_{a>}$ | abkürzende und verallgemeinernde Schreibweise für $\rho_{a<} = \frac{\rho}{a}$ innerhalb und $\rho_{a>} = \frac{a}{\rho}$ außerhalb des Zylinders, 36–38   |
| $v, v_{<}, v_{>}$              | abkürzende und verallgemeinernde Schreibweise für $v_{<} = \frac{v}{a}$ innerhalb und $v_{>} = \frac{a}{v}$ außerhalb des Zylinders, 36–39, 42, 48–51, 53, 57–60, 63, 69–74  |
| $\xi_b$                        | zum Meßelektrodenbegrenzungswinkel $\xi$ über Feldlinien korrespondierender Winkel in der Grenzfläche mit Radius $b$ , 41, 67, 72, 73  |
| $\varepsilon_{\text{Eis}}$     | relative Dielektrizitätskonstante von Eis, 43–45   |
| $Z$                            | Scheinwiderstand (Impedanz), 45, 70, 77, 97, 98, 114   |
| $\mathbb{C}_{\text{Re}>0}$     | Halbebene in der komplexen Ebene mit positivem Realteil, 50, 52, 54, 55  |

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| $\bar{z}$                        | zu einer komplexen Zahl $z$ konjugiert komplexe Zahl, 51, 52, 115  |
| $\mathbb{H}$                     | Halbebene in der komplexen Ebene mit positivem Imaginärteil, 52  |
| $\hat{\mathbb{C}}$               | Riemannsche Zahlensphäre, 52   |
| $\mathbb{E}$                     | Einheitskreisscheibe in der komplexen Zahlenebene, 52, 54, 55  |
| $\varepsilon_m^*$                | gemessene effektive Dielektrizitätskonstante, ein von der Potenzreihe für $\varepsilon^*$ unterschiedener Zahlenwert, 53, 56, 57, 60, 63, 64, 69–73, 75, 76, 78, 81, 82, 84, 85, 91, 98–101, 103, 104, 106, 116, 127               |
| $h^{-1}(w)$                      | Umkehrfunktion $h^{-1} : B \rightarrow A$ der Funktion $h : A \rightarrow B$ , 53, 56, 60, 114   |
| $F$                              | Körperisomorphismus der komplexen Zahlen in einen Unterring der reellen $2 \times 2$ Matrizen, 54  |
| $h'(z)$                          | bezeichnet die Ableitung der Funktion $h$ nach dem Argument $z$ , 54   |
| $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$      | die $2 \times 2$ Matrizen mit reellen Einträgen, 54  |
| $ \mathbf{M} $                   | Determinante der Matrix $\mathbf{M}$ , 54, 115   |
| $\mathcal{J}_{h_k}(x_j)$         | Jacobimatrix der vektorwertigen Abbildung $h_k$ der Eingangsvariablen $x_j$ , 54, 62, 63, 84, 114, 115, 120, 121   |
| $\mathbb{R}$                     | reelle Zahlen, 54, 63, 138   |
| $\varepsilon_i^\times$           | Fixpunkt der Newtonfolge; die zum Meßwert $\varepsilon_m^*$ des geschichteten Mediums gehörende Dielektrizitätskonstante des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix, 56, 57, 59, 60, 63, 64, 68–76, 91, 101–104, 106, 110, 112–122, 125–128 |
| $\varepsilon_i^n$                | mit der Newtonfolge nach $n$ Schritten berechneter Näherungswert für die Dielektrizitätskonstante des Kerns bzw. der Bohrlochmatrix, 56, 59, 110–116, 118–123, 125–127   |
| $\mathfrak{N}$                   | Newtonfolgenabbildung, 56, 59, 114, 116  |
| $\Delta\varepsilon$              | Fehler der relativen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon$ , 61  |
| $\Delta\sigma$                   | Fehler der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma$ , 61  |
| $\Delta^S X$                     | systematischer ( <i>engl.</i> systematic) Fehler einer Größe $X$ , 61, 65, 68, 69, 74, 77, 79–81, 94, 97, 98, 105, 110, 120, 121   |
| $\Delta^R X$                     | statistischer ( <i>engl.</i> random) Fehler einer Größe $X$ , 61, 79–81, 83, 84, 94, 96, 97, 105   |
| $\Delta X$                       | Standardabweichung bzw. Fehler einer Größe $X$ , 61–64, 80, 83, 84, 93, 96, 97, 99–102, 104–106, 121, 122, 124, 127, 128   |
| $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$    | Matrizenprodukt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ , 62, 63, 84, 114, 120  |
| $\mathfrak{V}_{x_1, \dots, x_n}$ | Kovarianzmatrix der Komponenten $x_1, \dots, x_n$ , 62, 63, 84, 120, 121   |
| $\langle X \rangle$              | Erwartungswert der Größe $X$ , 62, 79, 105   |
| $\widetilde{\mathbf{M}}$         | zur Matrix $\mathbf{M}$ transponierte Matrix, 62, 84   |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\Re(X, Y)$           | Korrelationskoeffizient der Größen $X$ und $Y$ , 62, 99–102, 121–123  |
| $\mathfrak{C}_{XY}$   | Kovarianz der Größen $X$ und $Y$ , 62–64, 84, 85, 91, 98, 100, 101, 121, 123  |
| $\sigma_B$            | elektrische Volumenleitfähigkeit von Eis, 66–69   |
| $\sigma_S$            | elektrische Oberflächenleitfähigkeit von Eis, 66–69   |
| $I_B$                 | induzierter Volumenstrom im zur Meßelektrode korrespondierenden Bereich auf der Eiskernoberfläche, 66–69, 91, 98  |
| $I_S$                 | induzierter Oberflächenstrom im zur Meßelektrode korrespondierenden Bereich auf der Eiskernoberfläche, 66–69, 91, 98  |
| $\mathfrak{H}_0$      | Nullhypothese, alternative Hypothese, 78, 82, 83, 124, 125  |
| $\chi^2, \chi_p^2(n)$ | $\chi^2$ -Verteilung, mit der Anzahl der Freiheitsgrade $n$ bezeichnet $\chi_p^2(n)$ den kritischen Wert zum Signifikanzniveau $\mathfrak{p}$ , 78–83, 99, 124, 125   |
| $\Delta^W y$          | Wichtung $\Delta^W y = \sqrt{(\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2}$ für die Durchführung einer $\chi^2$ -Anpassung $y = f(x)$ bei fehlerbehaftetem $x$ und $y$ , 80, 81, 83   |
| $\mathfrak{H}$        | Arbeitshypothese, 81–83, 124  |
| $n$                   | Anzahl der Freiheitsgrade, 82, 124  |
| $\mathfrak{p}$        | Signifikanzniveau, 82, 83, 124, 125   |
| $C^*$                 | komplexwertige Kapazität, 84, 85, 97–99, 101  |
| $\arg(X)$             | Phasenwinkel einer komplexwertigen Meßgröße $X$ , Argument einer komplexen Zahl $X$ , 84, 85, 98, 99, 101   |
| $I_0$                 | Luftintensität bei der Dichtemessung mittels $\gamma$ -Streuung, 94, 96   |
| $I_d$                 | Intensität nach Schwächung durch Eiskern mit Durchmesser $d$ bei der Dichtemessung mittels $\gamma$ -Streuung, 94, 96, 105  |
| $\mathfrak{d}$        | Durchstrahlte Länge des Kerns bei der Dichtemessung mittels $\gamma$ -Streuung, 94, 96, 105   |
| $\rho_\gamma$         | Dichte mittels $\gamma$ -Streuung bestimmt, 96, 104–106, 119, 121, 123–125  |
| $\alpha$              | Massenabsorptionskoeffizient von Wasser, 96, 105  |
| $\eta$                | Strahlablage von der Mitte des Kerns bei der Dichtemessung mittels $\gamma$ -Streuung, 96, 105  |
| $\rho_E$              | Dichte reinen Eises, 110, 119–123, 125  |
| $\rho_L$              | Dichte aus der Anpassung des Looyengamodells an dielektrische Meßdaten bestimmt, 110, 120–125, 127  |
| $\varpi_L$            | Volumenanteil der Eisphase aus der Anpassung des Looyengamodells an die am Eiskern gemessene Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_1^x$ unter Annahme einer Mischung von Luft und Eisphase, 110–116, 118, 120–122 |
| $k!$                  | Fakultät von $k$ , 136, 137   |
| $\Gamma(k)$           | Gammafunktion von $k$ , 137   |

$\vec{x} \cdot \vec{y}$  Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ , 139

# Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. und Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York.
- Adobe Systems Inc. (1990). *PostScript language reference manual*, 2. Aufl., Addison-Wesley.
- Arons, E. und Colbeck, S. (1995). Geometry of heat and mass transfer in dry snow: a review of theory and experiment, *Reviews of Geophysics* **33**(4): 463–493.
- Auty, R. P. und Cole, R. H. (1952). Dielectric properties of ice and solid D<sub>2</sub>O, *The Journal of Chemical Physics* **20**(8): 1309–1314.
- Bader, H. (1954). Sorge's law of densification of snow on high polar glaciers, *Journal of Glaciology* **2**(15): 319–323.
- Barlow, R. J. (1989). *Statistics: a guide to the use of statistical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Barner, M. und Flohr, F. (1987). *Analysis I*, 3. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Barner, M. und Flohr, F. (1989). *Analysis II*, 2. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Bergmann, L., Schaefer, C. und Gobrecht, H. (1987). *Bd. 2. Elektrizität und Magnetismus*, Lehrbuch der Experimentalphysik, 7. Aufl., de Gruyter, Berlin, New York. von Heinrich Gobrecht, unter Mitarb. von Jens H. Gobrecht u. Klaus H. Gobrecht.
- Bintanja, R., Reijmer, C., Snellen, H. und Thomassen, M. P. A. (1998). Meteorological and glaciological investigations on a blue ice area in the heimefrontfjella, Dronning Maud Land, Antarctica: the follow up of the 92–93 experiment, *field report*, Instituut voor Marien en Atmosferisch onderzoek Utrecht, Universiteit Utrecht, Postbus 80000, 3508 TA Utrecht, Nederland.
- Bogorodskiĭ, V. V., Bentley, C. und Gudmandsen, P. (1985). *Radioglaciology*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo.
- Böttcher, C. F. J. (1952). *Theory of Electric Polarization*, Elsevier, New York.

- Bronštein, I. N. und Semendjajew, K. A. (1989). *Taschenbuch der Mathematik*, 24. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/Main.
- Bruggeman, D. A. G. (1935). Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen, *Annalen der Physik* **24**(5): 636–664.
- Bücker, C., Löffel, R. und Schult, A. (1990). Hochauflösende Dichtemessungen an Bohrkernen mittels Absorption von Gamma-Strahlung, *KTB-Report 90-4*, Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung (NLFb), Hannover, S. 132–145.
- Budó, A. (1987). *Theoretische Mechanik*, 11. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Bullemer, B., Engelhardt, H. und Riehl, N. (1969). Protonic conduction of ice, Part I: high temperature region, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 416–429.
- Bullemer, B. und Riehl, N. (1966). Bulk and surface conductivity of ice, *Solid State Communications* **4**: 447–448.
- Bunker, C. und Bradley, W. (1961). Measurement of bulk density of drill core by gamma-ray absorption, *U.S. Geological Survey Research* **424-B**: B310–B313.
- Camp, P., Kiszénick, W. und Arnold, D. (1967). Electrical conduction in ice, *Research Report 198*, U.S. Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL).
- Camp, P., Kiszénick, W. und Arnold, D. (1969). Electrical conduction in ice, *Physics of Ice. Third International Symposium on Physics of Ice, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 450–470.
- Camplin, G., Glen, J. und Paren, J. (1978). Theoretical models for interpreting the dielectric behavior of HF-doped ice, *Journal of Glaciology* **21**(85): 122–141.
- Camplin, G. und Glen, G. (1973). The dielectric properties of HF-doped single crystals of ice, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 256–261.
- Caranti, J. M. und Illingworth, A. J. (1983). Frequency dependence of the surface conductivity of ice, *Journal of Physical Chemistry* **87**(21): 4078–4083.
- Chan, R. K. und Johari, G. P. (1973). Discussion, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 219.
- Clausen, H. B. und Hammer, C. U. (1988). The Laki and Tambora eruptions as revealed in Greenland ice cores from 11 locations, *Annals of Glaciology* **10**: 16–22.
- Cole, K. und Cole, R. (1941). Dispersion and absorption in dielectrics, *Journal of Chemical Physics* **9**: 341–351.

- Cole, R. (1955). On the analysis of dielectric relaxation measurements, *The Journal of Chemical Physics* **23**(3): 493–499.
- Cole, R. H. und Wörz, O. (1969). Dielectric properties of ice I, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 546–554.
- Cumming, W. (1952). The dielectric properties of ice and snow at 3.2 centimeters, *Journal of Applied Physics* **23**(7): 768–773.
- Dahl-Jensen, D., Gundestrup, N. S., Keller, K., Johnsen, S. J., Cogenini, S. P., Allen, C. T., Chuah, T. S., Miller, H., Kipfstuhl, S. und Waddington, E. D. (1997). A search in north Greenland for a new ice-core drill site, *Journal of Glaciology* **43**(144): 300–306.
- Dantl, G. (1969). Elastic moduli of ice, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 223–230.
- Debye, P. (1929). *Polare Molekeln*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig.
- Diepenbroek, M., Fütterer, D., Grobe, H., Miller, H., Reinke, M. und Sieger, R. (1998). PANGAEA information system for glaciological data management, *Annals of Glaciology* **27**: 655–660.
- Diepenbroek, M., Grobe, H., Reinke, M., Schlitzer, R. und Sieger, R. (1999). Data management of proxy parameters with PANGAEA, in G. Fischer und G. Wefer (Hrsgb.), *Use of Proxies in Paleoceanography - Examples from the South Atlantic*, Springer, Berlin, Heidelberg, S. 715–727.
- Engelhardt, H., Bullemer, B. und Riehl, N. (1969). Protonic conduction of ice, Part II: low temperature region, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 430–442.
- Evans, S. (1965). Dielectric properties of ice and snow - A Review, *Journal of Glaciology* **5**: 733–792.
- Fischer, G. (1989). *Lineare Algebra*, 9. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.
- Fischer, H. (1997). *Räumliche Variabilität in Eiskernzeitreihen Nordostgrönlands, Rekonstruktion klimatischer und luftchemischer Langzeittrends seit 1500 A.D.*, Doktorarbeit, Naturwissenschaftlich-Mathematische Gesamtfakultät der Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg.
- Fischer, H., Werner, M., Wagenbach, D., Schwager, M., Thorsteinsson, T., Wilhelms, F., Kipfstuhl, J. und Sommer, S. (1998). Little ice age clearly recorded in northern Greenland ice cores, *Geophysical Research Letters* **25**(10): 1749–1752.
- Fischer, W. und Lieb, I. (1994). *Funktionentheorie*, 7. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.
- Fitzgerald, W. und Paren, J. (1975). The dielectric properties of antarctic ice, *Journal of Glaciology* **15**(73): 39–48.

- Fortescue, T., Löffel, R. und Romanski, H. (1994). High precision gamma and x-ray densimetry, <<*New Trends in Nuclear System Thermohydraulics*>>, Bd. II: <<Thermohydraulics of Containment and Severe Accidents>>, Dipartimento di Costruzioni Meccaniche Nucleari, Pisa, Italy, S. 63–71. Proceedings.
- Friedmann, A., Moore, J. C., Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J. und Fischer, H. (1995). A 1200 year record of accumulation from northern Greenland, *Annals of Glaciology* **21**: 19–25.
- Fritz, H.-G. und Löffel, R. (1990). Radiometrische Dichtemessung in der Kunststoffaufbereitung, *Kunststoffe* **80**(2): 178–182.
- Fritzsche, D., Savatyugin, L., Ruth, U., Wilhelms, F., Miller, H. und Hubberten, H.-W. (1999). A new ice core drilled on Academy of Sciences ice cap, Severnaya Zemlya – first results, *Fifth Workshop on Russian-German Cooperation: Laptev Sea System, State Research Center – Arctic and Antarctic Research Institute, St. Petersburg, Russia, November 25–29, 1999*, Nummer 99/11 in *Terra Nostra*, Alfred-Wegener-Stiftung, Berlin, S. 31.
- Fujita, S., Maeno, H., Uratsuka, S., Furukawa, T., Mae, S., Fujii, Y. und Watanabe, O. (1999). Nature of radio echo layering in the Antarctic ice sheet detected by a two-frequency experiment, *Journal of Geophysical Research* **104**(B6): 13,013–13,025.
- Fujita, S. und Mae, S. (1994). Causes and nature of ice-sheet radio-echo internal reflections estimated from the dielectric properties of ice, *Annals of Glaciology* **20**: 80–86.
- Gerland, S. (1993). Zerstörungsfreie hochauflösende Dichteuntersuchungen mariner Sedimente, *Berichte zur Polarforschung 123/’93*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Postfach 120161, 27515 Bremerhaven. Dissertation im Fachbereich Geowissenschaften der Universität Bremen.
- Gerland, S., Kipfstuhl, S., Graf, W. und Minikin, A. (1994). Non-destructive high resolution density measurements of the B15 ice core, in H. Oerter (Hrsgb.), *FILCHNER RONNE ICE SHELF PROGRAMME*, Bd. 8, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Columbusstraße, D-27568 Bremerhaven, S. 24–28.
- Gerland, S., Oerter, H., Kipfstuhl, J., Wilhelms, F., Frenzel, A., Miners, W. D., Mulvaney, R. und Peel, D. (1996). Continuous Density Measurements on the Ice Core B25 from Berkner Island, Antarctica, in H. Oerter (Hrsgb.), *FILCHNER RONNE ICE SHELF PROGRAMME*, Bd. 10, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Columbusstraße, D-27568 Bremerhaven, S. 23, 24.
- Gerland, S., Oerter, H., Kipfstuhl, J., Wilhelms, F., Miller, H. und Miners, W. D. (1999). Density log of a 181 metre long ice core from Berkner Island, Antarctica, *Annals of Glaciology* **29**: 215–219.

- Gerland, S. und Villinger, H. (1995). Nondestructive density determination on marine sediment cores from gamma-ray attenuation measurements, *Geo-Marine Letters* **15**: 111–118.
- Gerthsen, C., Kneser, H. O. und Vogel, H. (1989). *Physik*, 16. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Glen, J. und Paren, J. (1975). The electrical properties of snow and ice, *Journal of Glaciology* **15**(73): 15–38.
- Gough, S. R. (1973). Discussion, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 220.
- Gow, A. J., Meese, D. A., Alley, R. B., Fitzpatrick, J. J., Anandakrishnan, S., Woods, G. A. und Elder, B. C. (1997). Physical and structural properties of the Greenland Ice Sheet Project 2 ice core: A review, *Journal of Geophysical Research* **102**(C12): 26,559–26,575.
- GPIB (1995). *GPIB: Getting Started with Your AT-GPIB/TNT and the NI-488.2 Software for DOS*, National Instruments Corporate Headquarters, 6504 Bridge Point Parkway, Austin, TX 78730-5039, USA.
- GPIB (1996a). *GPIB: NI-488.2 Function Reference Manual for DOS/Windows*, National Instruments Corporate Headquarters, 6504 Bridge Point Parkway, Austin, TX 78730-5039, USA.
- GPIB (1996b). *GPIB: NI-488.2 User Manual for DOS*, National Instruments Corporate Headquarters, 6504 Bridge Point Parkway, Austin, TX 78730-5039, USA.
- Graf, W., Reinwarth, O., Oerter, H., Mayer, C. und Lambrecht, A. (1999). Surface accumulation on Foundation Ice Stream, Antarctica, *Annals of Glaciology* **29**: 23–28.
- Gränicher, H., Jaccard, C., Scherrer, P. und Steinemann, A. (1955). Dielektrische Eigenschaften des Eises bei sehr tiefen Frequenzen und der Einfluss eines Vorfeldes, *Helv. Phys. Acta* **28**: 300–303.
- Gränicher, H., Jaccard, C., Scherrer, P. und Steinemann, A. (1957). Dielectric relaxation and the electrical conductivity of ice crystals, *Discussions Faraday Soc.* **23**: 50–62. Discussion, p.78-83.
- Greiner, W. (1991). *Klassische Elektrodynamik (Theoretische Physik Bd.3)*, 5., überarbeitete und erweiterte Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun.
- GRIP Members (1993). Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP ice core, *Nature* **364**: 203–207.
- Gross, G., Cox Hayslip, I. und Hoy, R. (1979). Concentration dependent solute redistribution at the ice-water phase boundary. the dielectric spectrum of ice measured with linear blocking layers or non-blocking electrodes, *report H-2*, New Mexico Institute of Mining Technology Geophysical Research Centre.

- Gross, G., Hayslip, I. und Hoy, R. (1978). Electrical conductivity and relaxation in ice crystals with known impurity content, *Journal of Glaciology* **21**(85): 143–160.
- Gross, G., Hayslip, I. und Hoy, R. (1980). Dielectric relaxation spectrum of ice measured with linear blocking layers, *Geophysics* **45**(5): 914–927.
- Gross, G. und Johnson, J. (1983). The layered capacitor method for dielectric bridge experiments. data analysis and interpretation of fluoride doped ice, *IEEE Transactions on electrical insulation* **E1-18**(5): 485–497.
- Gross, G. W. und McGehee, R. M. (1988). The Layered-Capacitor Method for Bridge Measurements of Conductive Dielectrics. II New Algorithm for Inversion and Parameter Fitting, *IEEE Transactions on Electrical Insulation* **23**(3): 387–396.
- Hammer, C. (1977). Past volcanism revealed by Greenland Ice Sheet impurities, *Nature* **270**(5637): 482–486.
- Hammer, C. (1980). Acidity of polar ice cores in relation to absolute dating, past volcanism, and radio-echoes, *Journal of Glaciology* **25**(93): 359–372.
- Hammer, C. (1983). Initial current in the buildup of space charges and the acidity of ice cores, *J. Phys. Chem.* **87**: 4099–4103.
- Hammer, C., Clausen, H. und Dansgaard, W. (1980). Greenland ice sheet evidence of post-glacial volcanism and its climatic impact, *Nature* **288**(5788): 230–235.
- Hammer, C., Mayewski, P. A., Peel, D. und Stuiver, M. (1997). Preface, *Journal of Geophysical Research* **102**(C12): 26,315–26,316. Special Issue: Greenland Summit Ice Cores.
- Hammer, C. U. und Clausen, H. B. (1994). Electrical conductivity method (ECM) stratigraphic dating of the Byrd Station ice core, Antarctica, *Annals of Glaciology* **20**: 115–120.
- Hanai, T. (1962). Dielectric theory on the interfacial polarization for two-phase mixtures, *Bulletin of the Institute of Chemical Research* **39**, Kyoto University.
- Hargreaves, N. D. (1978). The radio-frequency birefringence of polar ice, *Journal of Glaciology* **21**(85): 301–313.
- Harris, J. und Megill, L. (1953). Techniques used in measuring uniformity of materials with gamma radiation, *Nondestructive Testing* **11**(6): 9–14.
- Heuser, H. (1990a). *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 8. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart.
- Heuser, H. (1990b). *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, 5. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart.
- Hilbert, D. und Cohn-Vossen, S. (1996). *Anschauliche Geometrie*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Hobbs, P. V. (1974). *Ice Physics*, Clarendon Press, Oxford.

- Holmlund, P., Gjerde, K., Gundestrup, N., Hansson, M., Isaksson, E., Karlöf, L., Nyman, M., Pettersson, R., Pinglot, F., Reijmer, C. H., Stenberg, M., Thomassen, M., van de Wal, R. S. W., van der Veen, C., Wilhelms, F. und Winther, J.-G. (2000). Spatial gradients in snow layering and 10 m temperatures at two epica-dml pre-site-survey drill sites, *Annals of Glaciology* **30**: in press.
- Honda, M. (1989). The impedance measurement handbook, *technischer Bericht*, Hewlett Packard, Takakura-Cho, Hachioji-Shi, Tokyo, Japan.
- Honerkamp, J. und Römer, H. (1989). *Klassische Theoretische Physik, Eine Einführung*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.
- HPDMM (1997). *HP 34970A: Meßdatenerfassungs-/Schaltssystem Benutzerhandbuch*, Hewlett-Packard Company, Loveland Manufacturing Center, 815 14th Street S.W., Loveland, Colorado 80537, USA.
- HPDTF (1989). *HP 16451B: Dielectric Test Fixture operation and service manual*, Hewlett Packard, Takakura-Cho, Hachioji-Shi, Tokyo, Japan.
- HPLCR (1988). *HP 4284A: Precision LCR Meter operation manual*, Hewlett Packard, Takakura-Cho, Hachioji-Shi, Tokyo, Japan.
- HPLCR (1994). *HP 4284A: Precision LCR Meter operation manual*, Hewlett-Packard Japan, LTD., Kobe Instrument Division, 1-3-2, Murotani, Nishi-ku, Kobe-shi, Hyogo, 651-22 Japan.
- HPLCR (1996). *HP 4285A: Precision LCR Meter operation manual*, Hewlett-Packard Japan, LTD., Kobe Instrument Division, 1-3-2, Murotani, Nishi-ku, Kobe-shi, Hyogo, 651-22 Japan.
- Huybrechts, P., Steinhage, D., Wilhelms, F. und Bamber, J. (2000). Balance velocities and measured properties of the Antarctic ice sheet from a new compilation of gridded data for modeling, *Annals of Glaciology* **30**: in press.
- Ibach, H. und Lüth, H. (1995). *Festkörperphysik*, 4. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest, Hongkong, London, Mailand, Paris, Santa Clara, Singapur, Tokio.
- Itagaki, K. (1983). Possibility of anomalous relaxation due to the charged dislocation process, *Journal of Physical Chemistry* **87**(21): 4261–4264.
- Jaccard, C. (1959). Étude théorique et expérimentale des propriétés électriques de la glace, *Helv. Phys. Acta* **32**(2): 89–128.
- Jaccard, C. (1965). Mechanism of the electrical conductivity in ice, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **125**: 390–400.
- Jaccard, C. (1966). Four-point method for measuring the volume and surface conductivities of a thin sample, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **17**(6): 657–663.

- Jaccard, C. (1967). Electrical properties of ice, *International Symposium on Water Desalination, 1st, Washington, 1965*, Bd. 1, U.S. Department of the Interior, Office of Saline Water, Washington, D.C., S. 224–239.
- Jaccard, C. und Levi, L. (1961). Ségrégation d'impuretés dans la glace, *Z. angew. Math. Phys.* **12**(1): 70–76.
- Jackson, J. D. (1982). *Klassische Elektrodynamik*, 2. Aufl., de Gruyter, Berlin, New York.
- Jaeger, R. und Hübner, W. (Hrsgb.) (1974). *Dosimetrie und Strahlenschutz: Physikalisch-technische Daten und Methoden für die Praxis*, Georg Thieme Verlag, Stuttgart.
- Johari, G. P. und Jones, S. J. (1978). The orientation polarization in hexagonal ice parallel and perpendicular to the *c*-axis, *Journal of Glaciology* **21**(85): 259–276.
- Karlöf, L., Winther, J.-G., Isaksson, E., Kohler, J., Pinglot, J. F., Wilhelms, F., Hansson, M., Holmlund, P., Nyman, M., Pettersson, R., Stenberg, M., Thomassen, M. P. A., van der Veen, C. und van de Wal, R. S. W. (2000). A 1500 years record of accumulation at amundsenisen Western Dronning Maud Land, Antarctica, derived from electrical and radioactive measurements on a 120 m ice core, *Journal of Geophysical Research* **105**(D10): 12,471–12,483.
- Kawada, S. (1978). Dielectric anisotropy in ice Ih, *Journal of the Physical Society of Japan* **44**: 1881–1886.
- Kawada, S. (1979). Dielectric properties of heavy ice Ih, *Journal of the Physical Society of Japan* **47**: 1850–1860.
- Keithley (1988). *Instruction Manual Model 199 System DMM Scanner*, Keithley Instruments, Inc., Instruments Division, Cleveland, Ohio, U.S.A.
- Kernighan, B. W. und Ritchie, D. M. (1990). *Programmieren in C*, Carl Hanser Verlag, München, Wien.
- Kernighan, B. W. und Ritchie, Pike, R. (1986). *Der UNIX-Werkzeugkasten: Programmieren mit UNIX*, Carl Hanser Verlag, München, Wien.
- Kipfstuhl, J. und Frenzel, A. (1994). Wechselstromleitfähigkeits- und kontinuierliche Dichte-Messungen, in H. Miller (Hrsgb.), *Die Expedition ANTARKTIS-X mit FS „Polarstern“ 1992, Bericht von den Fahrtabschnitten ANT-X/1a und 2*, Nummer 152/'94 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Columbusstraße, D-27568 Bremerhaven, Kap. 2.11.4.3.
- Kipfstuhl, J. und Minikin, A. (1994). Erste Ergebnisse der Messungen am Bohrkern B15, in H. Miller (Hrsgb.), *Die Expedition ANTARKTIS-X mit FS „Polarstern“ 1992, Bericht von den Fahrtabschnitten ANT-X/1a und 2*, Nummer 152/'94 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Columbusstraße, D-27568 Bremerhaven, Kap. 2.11.4.4.

- Kofler, M. (1995). *Linux: Installation, Konfiguration, Anwendung*, 2. Aufl., Addison Wesley Publishing Company, Bonn, Paris.
- Kohlrausch, F. (1968a). *Praktische Physik*, Bd. 3 (Tafeln), 22. Aufl., B.G.Teubner, Stuttgart.
- Kohlrausch, F. (1968b). *Praktische Physik*, Bd. 2, 22. Aufl., B.G.Teubner, Stuttgart.
- Kowalsky, H.-J. (1970). *Lineare Algebra*, 5. Aufl., Walter de Gryter & Co., Berlin.
- Landau, L. D. und Lifschitz, E. M. (1982). *Elektrodynamik der Kontinua*, Nummer VIII in *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Akademie-Verlag, Berlin.
- Leo, W. R. (1994). *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, A How-to Approach*, 2. durchgesehene Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Lipsmeier, A. und Teml, A. (Hrsgb.) (1993). *Friedrich Tabellenbuch Metall- und Maschinentchnik*, 1132.–1150. Aufl., Ferd. Dümmers Verlag, Bonn.
- Löffel (1989). Löffel single beam gamma-densimeter model aw-1, *Operating instructions*, Löffel GmbH.
- Löffel, R. (1979). Massenstrommessungen an Ein- und Mehrphasenströmungen, *Atomenergie/Kerntechnik* **33**: 139–143.
- Looyenga, H. (1965). Dielectric constants of heterogenous mixtures, *Physica* **31**(3): 401–406.
- Macdonald, J. (1953). Theory of a.c. space charge polarization effects in photoconductors, semiconductors and electrolytes, *Physical Review* **92**: 4–17.
- Macdonald, J. (1958). Static space charge and capacitance for a single blocking electrode, *Journal of Chemical Physics* **29**: 1346–1358.
- Macdonald, J. (1959). Static space charge and capacitance for two blocking electrodes, *Journal of Chemical Physics* **30**: 806–816.
- Macdonald, J. (1974). Simplified impedance/frequency-response results for intrinsically conducting solids and liquids, *The Journal of Chemical Physics* **61**(10): 3977–3996.
- Maeno, N. (1973). Measurements of surface and volume conductivities of single ice crystals, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Symposium on the Physics and Chemistry of Ice, Ottawa, Canada, Aug. 14-18, 1972. Physics and chemistry of ice.*, S. 140–143.
- Maeno, N. und Nishimura, H. (1978). The electrical properties of ice surfaces, *Journal of Glaciology* **21**(85): 193–205.
- Matsuoka, T., Fujita, S. und Mae, S. (1983). Dielectric properties of ice containing ionic impurities at microwave frequencies, *Journal of Physical Chemistry* **101**(32): 6219–6222.

- Melvold, K., Hagen, J. O., Pinglot, J. F. und Gundestrup, N. (1999). Accumulation and stable isotope record and their relation to modern climate. evidence from Jutulstraumen firn cores, Dronning Maud Land, Antarctica, *Impact of Recent Climate on Glacier Mass Balance; Studies on Kongsvegen, Svalbard and Jutulstraumen, Antarctica*, Nummer 13 in *Rapportserie i naturgeografi*, Universitetet i Oslo, Department of Physical Geography, University of Oslo, Norway. ISSN 0803-8848.
- Miners, W. D., Hildebrand, A., Gerland, S., Blindow, N., Steinhage, D. und Wolff, E. W. (1997). Forward modelling of the internal layers in radio echo sounding using electrical and density measurements from ice cores, *Journal of Physical Chemistry B* **101**: 6201–6204.
- Minikin, A. (1994). *Spurenstoff-glaziologische Untersuchung von Eisbohrkernen des Filchner-Ronne-Schelfeises, Antarktis: Bestimmung der Tiefenverteilung und der Kontinentaleffekte ionischer Aerosolkomponenten*, Doktorarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Verlag Shaker Aachen.
- Minikin, A., Legrand, M., Hall, J., Wagenbach, D., Kleefeld, C., Wolff, E., Pasteur, E. C. und Ducroz, F. (1998). Sulfur-containing species (sulfate and methanesulfonate) in coastal Antarctic aerosol and precipitation, *Journal of Geophysical Research* **103**(D9): 10,975–10,990.
- Minikin, A. und Kipfstuhl, S. (1992). Preliminary results of the in situ core processing of the new 320 m ice core from the central Filchner-Ronne Ice Shelf: ECM, AC conductivity and density, in H. Oerter (Hrsgb.), *FILCHNER RONNE ICE SHELF PROGRAMME*, Bd. 6, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Columbusstraße, D-27568 Bremerhaven, S. 54–60.
- Mizuno, Y. (1978). Studies of crystal imperfections in ice with reference to the growth process by the use of X-Ray diffraction topography and divergent Laue method, *Journal of Glaciology* **21**(85): 409–418.
- Moore, J. C. (1988). Dielectric variability of a 130 m Antarctic ice core: implications for radar sounding, *Annals of Glaciology* **11**: 95–99.
- Moore, J. C. (1989). *Geophysical aspects of ice core drilling in Antarctica.*, PhD thesis, British Antarctic Survey and Department of Physics, Manchester.
- Moore, J. C. (1993). High-resolution dielectric profiling of ice cores., *Journal of Glaciology* **39**(132): 245–248.
- Moore, J. C., Mulvaney, R. und Paren, J. G. (1989). Dielectric stratigraphy of ice: A new technique for determining total ionic concentrations in polar ice cores, *Geophysical Research Letters* **16**(10): 1177–1180.
- Moore, J. C., Narita, H. und Maeno, N. (1991). A continuous 770-year record of volcanic activity from East Antarctica, *Journal of Geophysical Research* **96**(D9): 17,353–17,359.
- Moore, J. C., Paren, J. G. und Mulvaney, R. (1990). Chemical evidence in polar ice cores from dielectric profiling, *Annals of Glaciology* **14**: 195–198.

- Moore, J. C., Paren, J. G. und Oerter, H. (1992a). Sea salt dependent electrical conduction in polar ice., *Journal of Geophysical Research* **97**(B13): 19,803–19,812.
- Moore, J. C. und Fujita, S. (1993). Dielectric properties of ice containing acid and salt impurity at microwave and low frequencies., *Journal of Geophysical Research* **98**(B6): 9769–9780.
- Moore, J. C. und Maeno, N. (1991). Application of the dielectric profiling technique to ice core studies, in S. Kawaguchi (Hrsgb.), *Proceedings of the NIPR Symposium on Polar Meteorology and Glaciology*, 4, National Institute of Polar Research, Tokyo, S. 81–92.
- Moore, J. C. und Paren, J. G. (1987). New technique for dielectric logging of Antarctic ice cores., *Journal de Physique (Colloque C1)* **48**(3): 155–160.
- Moore, J. C., Wolff, E. B., Clausen, H. B., Hammer, C. U., Legrand, M. R. und Fuhrer, K. (1994). Electrical response of the summit-greenland ice core to ammonium, sulphuric acid, and hydrochloric acid, *Journal of Geophysical Research* **21**(7): 565–568.
- Moore, J. C., Wolff, E. W., Clausen, H. B. und Hammer, C. U. (1992b). The chemical basis for the electrical stratigraphy of ice., *Journal of Geophysical Research* **97**(B2): 1887–1896.
- Mortimer, C. E. (1987). *Chemie: Das Basiswissen der Chemie*, 5., völlig neu bearbeitete und erweiterte Aufl., Thieme, Stuttgart, New York.
- Mounier, S. und Sixou, P. (1969). A contribution to the study of conductivity and dipolar relaxation in dopen ice crystals, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 562–570.
- Mulvaney, R., Wagenbach, D. und Wolff, E. W. (1998). Postdepositional change in snowpack nitrate from observation of year-round near-surface snow in coastal Antarctica, *Journal of Geophysical Research* **103**(D9): 11,021–11,031.
- Neftel, A., Andrée, M., Schwander, J. und Stauffer, B. (1985). Measurements of a kind of DC-conductivity on cores from DYE 3, in C. Langway Jr., H. Oeschger und W. Dansgaard (Hrsgb.), *Greenland Ice Core: Geophysics, Geochemistry, and the Environment*, Nummer 33 in *Geophysical Monograph*, Library of Congress; Cataloging in Publication Data; American Geophysical Union, Washington D.C., S. 32–38.
- Newhall, G. und Self, S. (1982). The volcanic explosivity index (VEI): An estimate of explosive magnitude for historical volcanism, *Journal of Geophysical Research* **87**(C2): 1231–1238.
- Nixdorf, U., Wilhelms, F. und Eisen, O. (2000). Firnstrukturen aus Boden-EMR-Messungen in Dronning-Maud-Land, Antarktıs, in B. Forkmann (Hrsgb.), *Rundtischgespräch zum Thema Radar: "Geopradar – Erfahrungen und Perspektiven"*, *Freiberg 30. Sep. – 1. Okt. 1999*, Nummer I/2000 in *Mitteilungen Sonderband*, Deutsche Geophysikalische Gesellschaft, S. 67–73.

- Noll, G. (1978). The influence of the rate of deformation on the electrical properties of ice monocrystals, *Journal of Glaciology* **21**(85): 277–289.
- Oerter, H., Graf, W., Wilhelms, F., Minikin, A. und Miller, H. (1999). Accumulation studies on Amundsenisen, Dronning Maud Land, Antarctica, by means of tritium, dielectric profiling and stable-isotope measurements: first results from the 1995–96 and 1996–97 field seasons, *Annals of Glaciology* **29**: 1–9.
- Oerter, H., Wilhelms, F., Jung-Rothenhäusler, F., Göktaş, F., Miller, H., Graf, W. und Sommer, S. (2000). Accumulation rates in Dronning Maud Land as revealed by DEP measurements at shallow firn cores, *Annals of Glaciology* **30**: in press.
- Opfer, G. (1994). *Numerische Mathematik für Anfänger*, 2. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.
- Paren, J. G. (1973). Discussion, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 219.
- Paren, J. G. und Glen, J. W. (1978). Electrical behaviour of finely devided ice, *Journal of Glaciology* **21**(85): 173–191.
- Paterson, W. (1994). *The Physics of Glaciers*, 3. Aufl., Pergamon Press.
- Petrenko, V. F. (1993). Electrical Properties of Ice, *Special report 93-20*, U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory.
- Petrenko, V. F. (1994). The Surface of Ice, *Special report 94-22*, U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory.
- Petrenko, V. F. und Whitworth, R. W. (1999). *Physics of Ice*, Oxford University Press, Oxford, New York.
- PI (1987). *Information MS 15E: C-500 Stepping Motor Controller*, Physik Instrumente (PI) GmbH, D-7517 Waldbronn, Germany.
- PI (1988). *Information MS 13E: C-511 Stepping Motor Controll Interface*, Physik Instrumente (PI) GmbH, D-7517 Waldbronn, Germany.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. und Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, 2. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge.
- Remmert, R. (1988). Komplexe Zahlen, in H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel und R. Remmert (Hrsgb.), *Zahlen*, 2. Aufl., Bd. 1 von *Grundwissen Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Kap. 3., S. 45–78.
- Remmert, R. (1995a). *Funktionentheorie 1*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Remmert, R. (1995b). *Funktionentheorie 2*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- Reynolds, J. M. (1985). Dielectric behavior of firn and ice from the Antarctic Peninsula, Antarctica, *Journal of Glaciology* **31**(109): 253–262.
- Ruepp, R. (1973). Discussion, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 219.
- Ruepp, R. und Käß (1969). Dielectric relaxation, bulk and surface conductivity of ice single crystals, *Physics of Ice. International Symposium on Physics of Ice, 3rd, Munich, 1968*, New York, Plenum Press, S. 555–561.
- Schlosser, E., Oerter, H. und Graf, W. (1999). Untersuchungen zur Schnee-Akkumulation auf dem Ekströmsisen, Antarktis, 1980–1996, *Berichte zur Polarforschung 313/'96*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Postfach 120161, 27515 Bremerhaven.
- Schwager, M., Kipfstuhl, S., Thorsteinsson, T., Wilhelms, F., Miller, H., Fischer, H., Wagenbach, D. und Sommer, S. (1996). The AWI North Greenland Traverse 1993 – 1995, in O. B. Olsen (Hrsgb.), *Mass balance and related topics of the Greenland ice sheet - Report of the 6th workshop*, Nummer 1996/53 in *Rapport*, Danmarks og Grønlands geologiske undersøgelse, GEUS, Geological Survey of Denmark and Greenland, Thoravej 8, DK-2400 Copenhagen NV, Denmark, S. 63 – 66. Held at Geological Survey of Denmark and Greenland, Copenhagen, Denmark, 22nd – 23rd january 1996.
- Schwander, J., Neftel, A., Oeschger, H. und Stauffer, B. (1983). Measurement of direct current conductivity on ice samples for climatological applications, *J. Phys. Chem.* **87**: 4157–4160.
- Schwander, J. und Stauffer, B. (1984). Age difference between polar ice and the air trapped in its bubbles, *Nature* **311**: 45–47.
- Schwetlick, H. und Kretzschmar, H. (1991). *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, 1. Aufl., Fachbuchverlag GmbH Leipzig, Leipzig.
- Shabtaie, S. und Bentley, C. R. (1995). Electrical resistivity sounding of the Antarctic ice sheet, *Journal of Geophysical Research* **100**(B2): 1933–1957.
- Smith, E. und Whiffin, A. (1952). Density of concrete slabs using gamma radiation, *The Engineer* **194**(5040): 278–281.
- Sommer, S., Röthlisberger, R., Appenzeller, C., Stauffer, B., Wagenbach, D., Oerter, H., Wilhelms, F., Miller, H. und Mulvaney, R. (eingereicht a). Glacio-chemical study covering the past 2 kyr on three ice cores from Dronning Maud Land, Antarctica 1. annually resolved accumulation rates., *Journal of Geophysical Research*.
- Sommer, S., Wagenbach, D., Mulvaney, R. und Fischer, H. (eingereicht b). Glacio-chemical study covering the past 2 kyr on three ice cores from Dronning Maud Land, Antarctica 2. seasonally resolved chemical records., *Journal of Geophysical Research*.
- Sorge, E. (1935). *Glaziologische Untersuchungen in Eismitte*, Bd. 3, F.A. Brockhaus, Leipzig, S. 270.

- Spindler, K., Löffel, R. und Hahne, E. (1988). Gamma-Strahl-Dichtemeßsystem zur Messung des Dampfgehaltes in Zweiphasen-Strömungen, *Technisches Messen tm* **55**(6): 228–233.
- Storch, H. v. und Zwiers, F. W. (1999). *Statistical Analysis in Climate Research*, 1. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge.
- Sugiyama, K., Fujita, S., Sueoka, S., Shinji, M. und Hondoh, T. (1995). Preliminary measurement of high-frequency electrical conductivity of Antarctic ice with AC-ECM technique, *Proceedings of the NIPR Symposium on Polar Meteorology and Glaciology*, 9, National Institute of Polar Research, Tokyo, S. 12–22.
- S.u.S.E. (1998). *S.u.S.E. Linux 5.3, Installation, Konfiguration und erste Schritte*, 12. Aufl., S.u.S.E. GmbH, Fürth.
- Takei, I. und Maeno, N. (1987). Electrical characteristics of point defects in HCL-doped ice, *Journal de Physique (Colloque C1)* **48**(3): 121–126.
- Takei, I. und Maeno, N. (1997). Dielectric low-frequency dispersion and crossover phenomena of HCL-doped ice, *Journal of Physical Chemistry* **B101**: 6234–6236.
- Taubenberger, R. (1973). Aging effects of electric properties of ice Ih single crystals, in E. Whalley, S. Jones und L. Gold (Hrsgb.), *Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, S. 187–193.
- Taylor, K., Lamorey, G., Doyle, G., Alley, R., Grootes, P., Mayewski, P., White, J. und Barlow, L. (1993). The ‘flickering switch’ of late pleistocene climate change, *Nature* **361**: 432–435.
- Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J., Eicken, H., Johnsen, S. J. und Fuhrer, K. (1995). Crystal size variations in Emian-age ice from the GRIP ice core, Central Greenland, *Earth and Planetary Science Letters* **131**: 381–394.
- Thorsteinsson, T., Kipfstuhl, J. und Miller, H. (1997). Textures and fabrics in the GRIP ice core, *Journal of Geophysical Research* **102**(C12): 26,583–26,599.
- Tietze, U. und Schenk, C. (1991). *Halbleiter-Schaltungstechnik*, 9. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg.
- Ühnlein, S. (1999). *Anwendung verschiedener Interpolationsverfahren im Geografischen Informationssystem (GIS) auf Akkumulationsdaten in Dronning Maud Land (Antarktis)*, Diplomarbeit, Fachbereich Geografie, Bayrische Julius-Maximilians-Universität, Würzburg.
- Vassoille, R., Perez, J., Tatibouet, J., Duval, P. und Maccagnan, M. (1982). Anomalous behaviour of antarctic ice cores studied by electrical and mechanical damping measurements, *Annals of Glaciology* **3**: 307–311.
- Veith, H.-M. (Hrsgb.) (1993). *Strahlenschutzverordnung 1989*, 4. Aufl., Bundesanzeiger Verlags-Ges. mbH, Köln. ISBN 3-88784-496-3.
- Vogt, H.-G. und Schultz, H. (1992). *Grundzüge des praktischen Strahlenschutzes*, 2. Aufl., Carl Hanser Verlag, München Wien.

- Weller, G. (1999). The aim of the symposium, *Polar Research* **18**(2): 115. Invited key note address at the Proceedings of the International Symposium on Polar Aspects of Global Change, Tromsø, Norway, 24–28 August 1998.
- Wessel, P. und Smith, W. H. F. (1991). Free Software Helps Map and Display Data, *EOS Trans., AGU* **72**(41): 441.
- Wessel, P. und Smith, W. H. F. (1995). New Version of the Generic Mapping Tools Released, *EOS Trans., AGU* **76**(33): 329.
- Wessel, P. und Smith, W. H. F. (1998). New, Improved Version of Generic Mapping Tools Released, *EOS Trans., AGU* **79**(47): 579.
- Westphal, W. H. (1966). *Physikalisches Praktikum*, 12. Aufl., Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- Wiener, O. (1910). Zur Theorie der Refraktionskonstanten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse. Leipzig : Teubner* **62**(5): 256–268.
- Wilhelms, F. (1996). Leitfähigkeits- und Dichtemessung an Eisbohrkernen, *Berichte zur Polarforschung 191/'96*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Postfach 120161, 27515 Bremerhaven. Diplomarbeit im Fachbereich Physik der Rheinischen Friedrich Wilhelms Universität Bonn.
- Wilhelms, F., Kipfstuhl, J., Miller, H., Firestone, J. und Heinloth, K. (1998). Precise dielectric profiling of ice cores: A new device with improved guarding and its theory, *Journal of Glaciology* **44**(146): 171–174.
- Wolff, E. (2000). Electrical stratigraphy of polar ice cores: principles, methods, and findings, in T. Hondoh (Hrsgb.), *Physics of Ice Core Records. International Symposium on Physics of Ice Core Records, 14–17 September 1998, Shikotsukohan, Japan*, Hokkaido University Press, Kita 9, Nishi 8, Kita-ku, Sapporo 060-0809, Japan, S. 155–184.
- Wolff, E. B., Moore, J. C., Clausen, H. B., Hammer, C. U., Kipfstuhl, J. und Fuhrer, K. (1995). Long-term changes in the acid and salt concentrations of the Greenland Ice Core Project ice core from electrical stratigraphy, *Journal of Geophysical Research* **100**(D8): 16,249–16,263.
- Wolff, E. W., Hall, J. S., Mulvaney, R., Pasteur, E. C., Wagenbach, D. und Legrand, M. (1998). Relationship between chemistry of air, fresh snow and firn cores for aerosol species in coastal Antarctica, *Journal of Geophysical Research* **103**(D9): 11,057–11,070.
- Wolff, E. W., Miners, W. D., Moore, J. C. und Paren, J. G. (1997). Factors controlling the electrical conductivity of ice from polar regions – a summary, *Journal of Physical Chemistry B* **101**: 6090–6094.
- Wolfram, S. (1996). *The Mathematica Book*, 3. Aufl., Wolfram Media/Cambridge University Press.

Zahnen, N. (1999). *Untersuchung von Schnee- und Eisoberflächen in Dronning Maud Land, Antarktis, anhand von RADARSAT-SAR-Daten*, Diplomarbeit, Fachbereich Geographie, Philipps-Universität, Marburg.

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde durch ein Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert. An dieser Stelle möchte ich den Referenten und Vertrauensdozenten für ihr Engagement danken. Die Bestärkung nicht nur verbissen auf möglichst kurze Studienzeiten abzuzeilen hat mich überrascht und gefreut, denn so manche Erfahrung wäre mir sonst nicht möglich gewesen. Ganz besonderer Dank gilt auch den Dozenten auf Sommerakademien für ihre investierte Zeit, selten trifft man führende Fachleute über einen längeren Zeitraum in netter Atmosphäre, um einfach nur Gedanken zu spinnen.

Olaf Eisen, Uwe Nixdorf und Hubertus Fischer danke ich für Anmerkungen, die ich hoffentlich zu einer klareren Darstellung umarbeiten konnte.

Christel Hoffmann bin ich dankbar für das Auffinden von Rechtschreibungs- und Zeichensetzungsfehlern. Frank Pauer danke ich für die Durchsicht meines *Abstract*.

Auch wenn wir über die praktische Durchführung von Aufgaben besonders auf Expeditionen in der Sache nicht immer einer Meinung waren, danke ich den nichtwissenschaftlichen Mitarbeitern für ihr hohes Engagement für das gemeinsame Interesse an den polaren Eisschilden.

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Heinz Miller danke ich für die Möglichkeit wissenschaftlich wirklich frei zu arbeiten. Sein Interesse an den erzielten Ergebnissen und die auf Anfrage gewährte hilfreiche Unterstützung betrachte ich als sehr gute wissenschaftliche Arbeitsbedingungen.

Herrn Prof. Dr. Heinrich Villinger danke ich für die Übernahme des Gutachtens und die Ermunterung zum richtigen Zeitpunkt die Arbeit in den Patentantrag zu investieren und wirklich einzureichen. Die vorliegende Arbeit hat dadurch auch an allgemeinerer Formulierung gewonnen.

Wissenschaftliche Arbeit lebt von Diskussionen. Meinen Kollegen hier am AWI und in den kooperierenden Instituten danke ich für die gute Zusammenarbeit, Anregungen und Diskussionen.

Meiner Familie danke ich für das seit Jahren mitgelebte Interesse und Unterstützung, die kritischen Fragen und damit gegebenen Anstöße zu bewußten und bedachten Entscheidungen. Björk danke ich für die Geduld und Nachsicht wenn in der vergangenen Zeit die Niederschrift der Arbeit Priorität hatte.