

Berechnung der Richtungsabhängigkeit der P-Wellen-Geschwindigkeit in polykristallinen Eisproben mit vorgegebener C-Achsen-Verteilung aus den elastischen Konstanten des Einkristalls

Von H. Rüter, Münster/Westfalen *)

Zusammenfassung: Es wird ein Verfahren, das auf der Mittelung über die reziproken P-Wellen-Geschwindigkeiten beruht, angegeben, welches gestattet, die Richtungsabhängigkeit der P-Wellengeschwindigkeit in polykristallinen Aggregaten mit nicht statistischer C-Achsen-Verteilung näherungsweise zu berechnen.

Die erhaltenen Ergebnisse werden für eine Eisprobe aus dem Tuto-Eistunnel (Grönland) und aus dem Emmons-Gletscher (USA) dargestellt.

Abstract: A method is presented to calculate with approximation the p-wave-velocities in polycrystalline aggregates with a nonstatistic distribution of c-axes. This is achieved by calculating the mean value of reciprocal velocities. The obtained results are plotted for a sample from Tuto-Icetunnel (Greenland) and Emmons-glacier (USA).

Einleitung.

Um in Laborversuchen elastische Eigenschaften von polykristallinen Aggregaten zu bestimmen, werden meist (zumindest bei grobkristallinen Aggregaten wie Gletschereis) Ultraschalluntersuchungen an Einkristallen durchgeführt und die erhaltenen Ergebnisse auf das polykristalline Aggregat umgerechnet. Die dazu angegebenen klassischen Verfahren von Voigt und Reuß, die eine Mittelung über die Spannungen bzw. die Verzerrungen darstellen, geben nur eine obere bzw. untere Grenze für die elastischen Konstanten des polykristallinen Aggregates. Diese Unbestimmtheit ist im wesentlichen dadurch bedingt, daß die durchschnittliche Form der Einzelkristalle nicht berücksichtigt wird. Neuere Verfahren nach Huber, Schmid, Boas und Brugemann [3] sind von dieser Einschränkung ebenfalls nicht frei. Lediglich das Verfahren von Kröner [3] führt im Falle kubischer Symmetrie zu exakten Werten. Im Falle hexagonaler Symmetrie muß hier die durchschnittliche Kristallform etwa als Ellipsoid angegeben werden.

Alle genannten Verfahren haben zum Ziel, die elastischen Konstanten des isotropen homogenen Gemisches zu ermitteln. Lediglich Kröner läßt eine eventuelle ellipsoide

statistische Verteilung der kristallographischen Achsen zu. Bei Eisproben aus fließenden Gletschern ist aber meist eine relativ komplizierte C-Achsenverteilung (Textur) beobachtet worden. Es soll im folgenden ein Verfahren angegeben werden, daß die Berechnung der Richtungsabhängigkeit der P-Wellen-Geschwindigkeiten aus den elastischen Konstanten des Einkristalls für eine vorgegebene C-Achsen-Verteilung gestattet.

Die Grundlage des Verfahrens ist eine Mittelung über die reziproken Geschwindigkeiten in den Einzelkristallen, die durch den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung und C-Achse bestimmt ist, analog den Verfahren, die bei der Berechnung von mittleren Vertikalgeschwindigkeiten in der Reflexionsseismik oder bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit in porösen Medien angewendet werden.

Richtungsabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen in hexagonalen Kristallen.

Hexagonale Kristalle sind bezüglich ihrer elastischen Eigenschaften rotationssymmetrisch um die C-Achse, also transversalisotrop. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen sind demnach allein vom Winkel φ zwischen der Ausbreitungsrichtung und der C-Achse abhängig. Die in Richtung φ möglichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ergeben sich als Nullstellen der Determinanten

$$\begin{vmatrix} F - \rho V^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I - \rho V^2 \end{vmatrix}$$

$$F = \cos^2 \varphi (C_{44} - C_{11}) + C_{11}$$

$$G = \cos^2 \varphi (C_{44} - (C_{11} + C_{12})/2) + (C_{11} - C_{12})/2$$

$$H = \cos^2 \varphi (-C_{44} + C_{33}) + C_{44}$$

$$I = \cos \varphi \sin \varphi \cdot (C_{13} - C_{44})$$

*) Dipl. Geophys. H. Rüter, 44 Münster/Westf., Steinfurter Straße 107, Institut für Reine und Angewandte Geophysik.

Durch Entwickeln nach der zweiten Zeile zerfällt diese in zwei Teile, und nach Auflösen der quadratischen Gleichung ergibt sich:

$$V1^2 = G$$

$$V2,3^2 = F + H \pm [(F + H)^2 - \varphi (FH - I^2)]^{1/2}$$

In Abbildung 1 sind die so berechneten Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von φ wiedergegeben.

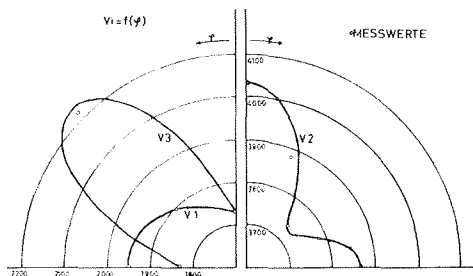


Abbildung 1:
Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen in hexagonalen Kristallen (Eis $-20,5^\circ\text{C}$)

Fig. 1: Velocities of Elastic Waves in Hexagonal Crystals (Ice $-20,5^\circ\text{C}$)

V1 ist eine reine Transversalwelle. V2 ist quasilongitudinal, V3 quasitransversal. Zu der im folgenden beschriebenen Mittelbildung

wird die Richtungsabhängigkeit von V2 benutzt.

Mittelung über die reziproken Geschwindigkeiten.

Die Mittelung ist über die reziproken P-Wellengeschwindigkeiten (V2) durchzuführen. Für eine statistische C-Achsenverteilung (isotrop homogenes Aggregat) ergibt sich:

$$\frac{1}{VP} = \frac{i \sum (1/V_2(\varphi_i) \cos \varphi_i)}{i \sum \cos \varphi_i}$$

Rechnen wir die Summen mit einem Stützstellenabstand von 5° für φ_i , so ergibt sich mit den in [2] angegebenen Konstanten für Eis von $-20,5^\circ\text{C}$:

$$VP = 3814 \text{ m/sec}$$

Zum VP = 3810 m/sec nach Voigt

Vergleich VP = 3790 m/sec nach Reuß

Wenn wir berücksichtigen, daß hierbei vernachlässigt wurde, daß V2 nicht rein longitudinal war, daß Brechung an den Kristallgrenzen stattfindet und daß der mittlere Kristalldurchmesser nicht groß gegen die Wellenlänge ist, so ist die Übereinstimmung der Ergebnisse zufriedenstellend.

Im Fall der nicht statistischen C-Achsenverteilung ist die Mittelung analog der oben

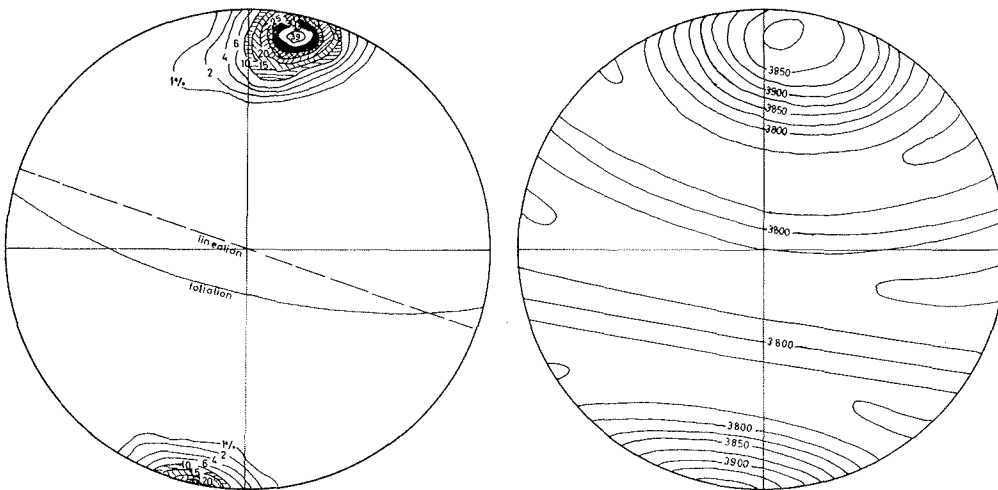


Abbildung 2a:
Geschwindigkeitsverteilung in polykristallinem nicht isotropem Eis. Dargestellt im Schmidt'schen Netz. Tuto-Eistunnel, Grönland.

Fig. 2a:
Distribution of Sound-Velocity in Polycrystalline non-Isotropic Ice. Plotted on a Schmidt Projection. Tuto Icetunnel, Greenland

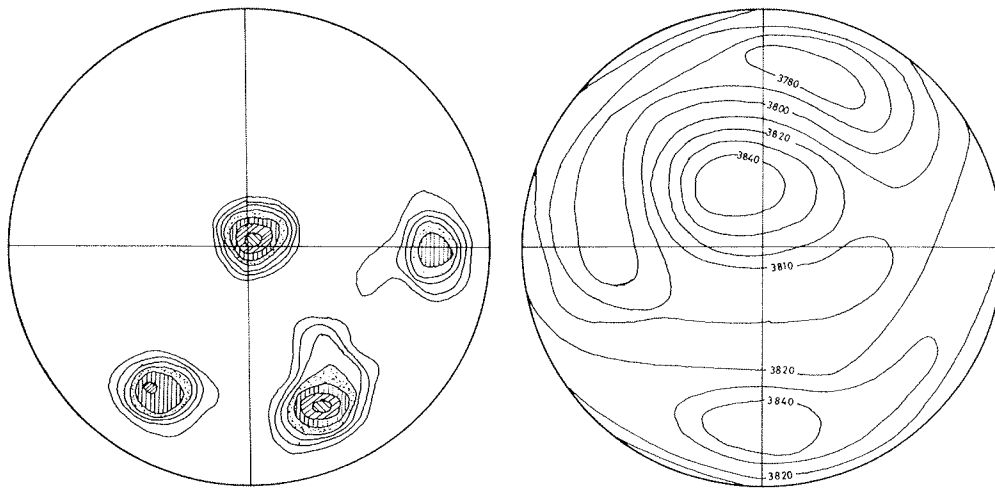


Abbildung 2b:
Geschwindigkeitsverteilung in polykristallinem nicht isotropem Eis. Dargestellt im Schmidt'schen Netz. Emmons-Gletscher, USA.

Fig. 2b:
Distribution of Sound-Velocity in Polycrystalline non-Isotropic Ice, Plotted on a Schmidt Projection. Emmons-Glacier, USA

angegebenen Gleichung durchzuführen: es muß lediglich der Bewertungsfaktor $\cos \varphi$ durch die üblicherweise in einem Schmidt'schen Netz eingetragene relative Häufigkeit der C-Achsen ersetzt werden. Die erhaltenen Mittelwerte können nun ihrerseits in Form von Isolinien in einem Schmidt'schen Netz dargestellt werden.

Ergebnisse.

Eine Berechnung nach obigem Verfahren wurde für eine Probe aus dem Tuto-Eistunnel (Grönland) und dem Emmons-Gletscher (USA) auf der IBM 360/50 der Universität Münster durchgerechnet. Die Ergebnisse sind zusammen mit der C-Achsen-Verteilung, die nach [4] übernommen wurde, in Abbildung 2a und b dargestellt. Die Geschwindigkeiten für den Emmons-gletscher sind insgesamt etwa 20 m/sec zu hoch, da mit den Konstanten von $-20,5^\circ \text{C}$ ge-

rechnet wurde. Dies hat jedoch keinen Einfluß auf den relativen Verlauf der Isolinien. Es ist vorgesehen, am Institut für Reine und Angewandte Geophysik der Universität Münster an Gletscherproben die C-Achsen-Verteilung und die Richtungsabhängigkeit der P-Wellengeschwindigkeit zu messen, und somit das vorgeschlagene Berechnungsverfahren experimentell zu prüfen.

Literaturverzeichnis:

1. Anderson, D. L.: Elastic Wave Propagation in Layered Anisotropic Media. *J. Geophys. Res.* 66, 2953 (1961).
2. Brockamp, B., Querfurt, H.: Untersuchungen über die Elastizitätskonstanten von See- und Kunsteis. *Polarf.* V, 1964, 253 (1965).
3. Kröner, E.: Berechnung elastischer Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Physik* 151, 504 (1958).
4. Rigsby Q. de G.: Crystal Orientation in Glacier and Experimentally deformed Ice. *J. Glac.* 3, 589 (1959).
5. Brockamp, B., Rüter, H.: Die Abhängigkeit der elastischen Parameter des Eises vom hydrostatischen Druck bis 400 bar. *Z. Geophysik, im Druck.*