

Über Kovarianzfunktionen der Eisbewegung

Von Siegfried Meier *

Zusammenfassung: Die Eisbewegung wird als Überlagerung zweier Teilbewegungen betrachtet: dem mittleren Bewegungsfeld, gegeben durch die Lösungen der Bewegungsgleichungen idealer Eismassen, und den ortsabhängigen Bewegungsschwankungen, die als stationäre Zufallsprozesse mit gaus-verteilten Ordinaten und rayleigh-verteilten Amplituden beschrieben werden. Verschiedene Methoden, um die Kovarianzfunktionen der Oberflächengeschwindigkeit typischer Eismassen (Ausflußgletscher, Randeis, Schelfeis, Inlandeis) entlang ausgewählter Profile zu schätzen, werden diskutiert und die Ergebnisse von Korrelations-schätzungen mitgeteilt. Die Kenntnis der statistischen Eigenschaften der Eisbewegung ermöglicht die Prädiktion und Ausgleichung nach kleinsten Quadraten sowie die Vorplanung günstiger Punktabstände bei Profilmessungen.

Summary: The ice movement is considered to be consisting of two parts: a) the middle field given by the solution of movement equations of ideal ice masses, and b) the variations of movement versus place described by means of stationary random processes with gaus-distributed ordinates and rayleigh-distributed amplitudes. Different methods to estimate the covariance functions of the velocity variations of the surface of typical ice masses (outlet glacier, shore ice, ice shelf, ice sheet) along selected profiles are discussed. The results of some estimations are given. The knowledge of the statistical behaviour of ice movement makes possible the least square prediction, adjustment, and the preplanning of the optimum distances of the stakes within oversnow traverses.

In den vergangenen fünfzehn Jahren hat sich die Kenntnis von den großen Eismassen der Erde (Grönland, Antarktika) ganz außerordentlich erweitert. Neue wirksame Feldmethoden haben eine Fülle von Beobachtungsmaterial geliefert; allen voran die Tiefbohrungen (Eistemperaturen, Altersbestimmungen, Strukturanalysen) und die Radar-sondierungen (subglaziales Relief, Schichtungen, Deformation). Auf geodätischem Gebiet sind es vor allem das motorisierte Nivellement und die langseitigen Winkel-Strecken-Züge, die es ermöglichen, festpunktlose Gebiete von einigen hundert Kilometern Ausdehnung in kurzer Zeit zu überbrücken. Wiederholte Punktbestimmungen mit Hilfe von Satelliten mit polnaher Umlaufbahn und auf dem Inlandeis ausgesetzten Transpondern sind in den Bereich der technischen Möglichkeit gerückt. Zur Vorplanung des optimalen Meßpunktabstandes in Traversen u. a. Profilmessungen ist es nützlich, die statistischen Eigenschaften der Eisbewegung zu kennen.

Die Bewegungsmessungen an der antarktischen Küste sind immer noch locker und unregelmäßig verteilt. Zur Schätzung des Massenhaushalts muß man diese Beobachtungen inter- und extrapolierend verdichten. Die Bewegungsmessung in Spaltengebieten ist problematisch. Bei Vermessungen aus der Luft (Aerophotogrammetrie) über festpunktlosem Gelände mangelt es oft an geeigneten Paßpunkten oder -strecken.

Die Vorhersage der Eisbewegung mit dem kleinsten mittleren Fehler (Prädiktion nach kleinsten Quadraten; Optimalfilterung) erfordert die Kenntnis ihrer Kovarianzfunktionen. In der vorliegenden Arbeit werden die Möglichkeiten der Schätzung von Geschwindigkeitskorrelationen aus Beobachtungsdaten untersucht und die Ergebnisse einiger Auswertungen an typischen Eismassen (Ausflußgletscher, Randeis, Schelfeis, Inlandeis) diskutiert. Die benötigten mathematischen Hilfsmittel aus der Theorie der stochastischen Prozesse werden eingangs zusammengestellt.

1. Statistische Voraussetzungen

Wir denken uns das Bewegungsfeld großer Eismassen in zwei Anteile zerlegt: in ein mittleres Bewegungsfeld und in eine überlagerte Schwankungsbewegung. Die Oberflächengeschwindigkeit des mittleren Bewegungsfeldes sei determiniert; gegeben durch die Lösungen der Bewegungsgleichungen idealer Eismassen (Gletscher, Schelfeis, Eisschild); vgl. etwa Budd (1969). Die Schwankungsbewegung mit zufällig variierenden Wellenlängen und -amplituden werde als stochastischer Prozeß aufgefaßt; vgl. z. B.

* Dr.-Ing. Siegfried Meier, 85 Bischofswerda, Am Schillerplatz 7, DDR.

Sweschnikow (1965), Taubenheim (1969). Die Eigenschaften dieses Prozesses hängen auf dem Inlandeis mit Eisdicken von der Größenordnung $z \sim 10^3$ m in erster Linie von den Schwankungen der Oberflächenneigung, am Randeis und an Ausflußgletschern mit Eisdicken von der Größenordnung $z \sim 10^2$ m von der Untergrundrauhigkeit ab. Auf Schelfeisen mit konstanter Untergrundreibung werden sie von der Anzahl, Größe und Geschwindigkeitsverteilung der sie speisenden Eisströme bestimmt (Abschnitt 3).

Mittlere Bewegung und Schwankungsbewegung überlagern sich additiv. Die von der mittleren Bewegung, dem sog. Trend, befreiten Meßwerte sind die Realisierung (Stichprobe) des Prozesses. Nur derartige trendfreie, ortsabhängige Geschwindigkeitsbeträge an im allgemeinen ungleichabständigen Punkten der in die x-y-Ebene projizierten (gekrümmten) Eisoberfläche werden betrachtet. Wir beschränken uns auf ortsabhängige Schwankungen der Horizontalgeschwindigkeit entlang ausgewählter Profile; entweder längs der Hauptströmungsrichtung (Geschwindigkeitslängsprofil $v(x)$) oder quer dazu (Geschwindigkeitsquerprofil $v(y)$). In einem Fall (Randeis bei Mirny, Ostantarktika) betrachten wir außer den Schwankungen $v(x)$ in Hauptströmungsrichtung (Längsschwankungen) auch die Schwankungen $u(x)$ quer dazu (Querschwankungen); folgend aus Schwankungen der Bewegungsrichtung im Winkel $\phi(x)$; vgl. Abb. 1.

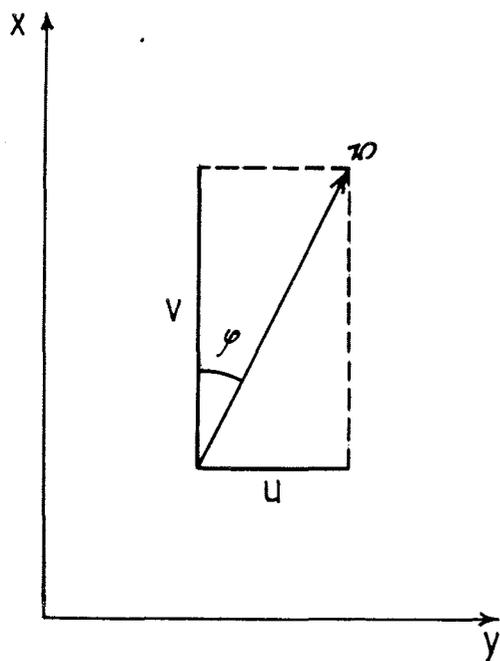


Abb. 1: Längs- und Querschwankungen.
Fig. 1: Longitudinal and transversal variations.

Analysen von Bewegungsmessungen am Kongsvegen-Gletscher, Westspitzbergen, in der Dreieckskette Mirny — KM 100, Ostantarktika, und der Traverse über das Ross-Schelfeis, Westantarktika, haben gezeigt, daß die ortsabhängigen Geschwindigkeitsschwankungen annähernd als stationärer Gauß'scher Prozeß behandelt werden können. Die Kovarianzfunktionen hängen nur von der Differenz zweier Orte

$$= \begin{cases} X_{i+1} - X_i & \text{im Längsprofil} \\ Y_{i+1} - Y_i & \text{im Querprofil} \end{cases}$$

ab: $C = C(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Setzt man außerdem (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} \equiv 0$ für alle τ aus $(-\infty, +\infty)$, so sind die Eigenschaften des Prozesses $v(\tau)$ mit der Kovarianzfunktion $C_{vv}(\tau)$ (oder ihrer Fourier-Transformierten, dem Frequenz- oder Leistungsspektrum) vollständig bestimmt. Die Ordinaten $v_i = v(\tau_i)$ sind normal verteilt mit der Varianz $C_{vv}(0) = \sigma^2$. Die Amplituden A_j sind nach Rayleigh verteilt mit dem Erwartungswert $E(A) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2}$.

Ist die Geschwindigkeit $v(\tau)$ ein stationärer Gauß'scher Prozeß mit der Kovarianzfunktion $C_{vv}(\tau)$, dann ist die Deformationsgeschwindigkeit $\dot{v}(\tau) = \frac{d}{d\tau} v(\tau)$ ebenfalls ein stationärer Gauß'scher Prozeß mit der Kovarianzfunktion $C_{\dot{v}\dot{v}}(\tau) = -\ddot{C}_{vv}(\tau)$.

Die tiefgestellten Symbole, z. B. vv bedeuten, daß v mit sich selbst, aber um τ verschoben, korreliert ist (Auto-Kovarianzfunktion); $v\phi$ bedeutet, daß v mit ϕ , um τ verschoben, korreliert ist (Kreuzkovarianzfunktion). Außerdem werden die auf das Intervall $[-1, +1]$ normierten Kovarianzfunktionen (Korrelationsfunktionen) benutzt:

$$R_{vv}(\tau) = C_{vv}(\tau)/C_{vv}(0), R_{v\phi}(\tau) = C_{v\phi}(\tau)/\sqrt{C_{vv}(0) C_{\phi\phi}(0)}.$$

Die aus diskreten Meßwerten punktweise geschätzten Kovarianzfunktionen werden durch geeignete Modellfunktionen (graphisch) ausgeglichen. Von den benutzten, in Tab. 1 zusammengestellten Funktionen gehören die Modelle IIa, III zu differenzierbaren Prozessen. Die Kovarianzfunktion der Deformationsgeschwindigkeit läßt sich nach (1) sofort berechnen (Tab. 1).

Die Autokovarianz-Funktionen I und II sind nicht differenzierbar (Sprung der 1. Ableitung bei $\tau = 0$). Sie werden lediglich wegen ihrer einfachen mathematischen Form angewandt.

Als Maß für die Größe des einheitlich bewegten Gebietes wird die Integralskala I_v der Geschwindigkeitsschwankung $v(\tau)$

$$I_v = \int_0^{\infty} R_{vv}(\tau) d\tau \quad (2)$$

angegeben (Tab. 1).

Zum Verhältnis der Längs- und Querschwankungen betrachten wir zwei Fälle:

a) Keine der Bewegungsrichtungen sei ausgezeichnet (statistische Isotropie). Es gilt die v. Kármán'sche Beziehung, zit. nach Heisenberg (1948),

$$R_{uu}(\tau) = R_{vv}(\tau) + \frac{\tau}{2} \frac{dR_{vv}(\tau)}{d\tau} \quad (3)$$

b) Die Längsschwankung ist groß gegen die Querschwankung:

$$\sqrt{C_{\phi\phi}(0)} \ll \pi/4.$$

Näherungsweise ist (vgl. Fig. 1)

$$V = |v| \cos\phi \approx |v| \\ U = |v| \sin\phi \approx |v| \phi \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} C_{vv}(\tau) &\approx C_{|v||v|}(\tau) \\ C_{uu}(\tau) &\approx C_{|v||v|}(\tau) C_{\phi\phi}(\tau) + C_{|v|\phi}(\tau) C_{|\phi|0}(-\tau) \\ R_{vv}(\tau) &= C_{vv}(\tau)/C_{vv}(0) \\ R_{uu}(\tau) &= C_{uu}(\tau)/C_{uu}(0) \end{aligned} \quad (4)$$

Prozeß	Kovarianzfunktion Geschwindigkeit	Kovarianzfunktion Deformationsgeschwindigkeit	Integral- skala	Meßpunktabstand ($m^2/\sigma^2 < 1$)
I. Linearer Typ	$C_{vv}(\tau) = \sigma^2(1- \tau)$		$I_v = 1/2\alpha$	
II. Exponential- typ	$C_{vv}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha \tau]$		$I_v = 1/\alpha$	$\Delta \leq \frac{\pi^2}{2\alpha} \frac{m^2}{\sigma^2}$
IIa. Exp.-Typ mit Korrektur um $\tau = 0$	$C_{vv}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha_1\tau \times$ $\times(1-\exp(-\alpha_2\tau))]$	$C_{vv}(\tau) = \alpha_1\{\alpha_2(2-\alpha_2\tau)\exp[-\alpha_2\tau]$ $-\alpha_1(1-\exp[-\alpha_2\tau]+\alpha_2\tau\exp[-\alpha_2\tau])^2\} \times$ $\times C_{vv}(\tau)$	$I_v \approx 1/\alpha_1$	$\Delta \leq \frac{\pi^2}{2\alpha_1} \frac{m^2}{\sigma^2}$
III. Glockenkurven- Typ	$C_{vv}(\tau) = \sigma^2 \exp[-\alpha^2\tau^2]$	$C_{vv}(\tau) = 2\alpha^2(1-2\alpha^2\tau^2)C_{vv}(\tau)$	$I_v = \sqrt{\pi}/2\alpha$	$\Delta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{\alpha} \frac{1}{u_g} \frac{m^2}{\sigma^2}$ $2\Phi(u_g) = 1 - \frac{m^2}{\sigma^2}$

Tab. 1: Modellprozesse (model processes).

Profil	$\frac{C_{vv}(\tau)}{C_{\sigma\sigma}(\tau)}$	$\frac{\sqrt{\sigma_{vv}^2} \sqrt{\sigma_{uu}^2}}{m/Jr.}$	$\frac{E(A_v)}{m/Jr.}$ $\frac{E(A_u)}{m/Jr.}$	α_1 α_2 km ⁻¹	I_v km	$\frac{\sqrt{\sigma_{\sigma\sigma}^2}}{Altgrad}$	$\frac{E(A_\sigma)}{Altgrad}$	α_σ I_σ km ⁻¹ km
Kongsvegen Westspitzbergen	<u>Modell II</u> -	44	55	0,20	5,0			
MIRNY-KM 100 Antarktika	<u>Modell III</u> <u>Modell II</u>	8,2 0,8	10 1,0	0,41	2,2	4,9	6,1	0,45 2,2
RISS-Traversal Antarktika	<u>Modell IIa</u> <u>Modell I</u>	7,3	9,1	0,044 0,055	23	1,3	1,6	0,017 29

Tab. 2: Ergebnisse (results).

Im Abschnitt 3.2 werden (3) und (4) miteinander verglichen.

Im Abschnitt 3 werden die Korrelationsfunktionen der periodischen Funktionen $X = \sin^n \tau$ ($n = 3, 4$) benötigt. Lt. Definition gilt

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sin^n t \sin^n(t+\tau) dt.$$

Nach Integration, Grenzübergang und Normierung findet man

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{10} (\cos 3\tau + 9\cos\tau) & n=3 & 2\pi \\ \frac{1}{35} (\cos 4\tau + 16\cos 2\tau + 18) & n=4 & \pi \end{cases} \quad \text{für } \tau < \text{Periodenlänge}; \text{ periodisch in } \tau. \quad (5)$$

Zur Schätzung des Meßpunktabstandes Δ , der eingehalten werden muß, um $v(\tau)$ ohne Informationsverlust zu erfassen, wenden wir das Abtasttheorem (sampling theorem) für periodische und zufällige Funktionen (H. Nyquist 1928, W. A. Kotelnikow 1933) auf die Modellprozesse II bis III an. Nur im Falle, daß die Varianz der Geschwindigkeitsschwankungen σ^2 klein gegen die Varianz der Meßfehler m^2 ist („schwaches Rauschen“), lassen sich einfache Schätzformeln für den Punktabstand bei Profilmessungen angeben (Meier 1971); vgl. Tab. 1.

2. Beobachtungsmaterial und Rechenmethoden

2.1. Stichprobeneffekte

Beobachtungen von Eisbewegungen mittels wiederholter geodätischer Punktbestimmungen (Einschnitte; Netze, Ketten, Polygonzüge; Astropunkte) oder Meßaufnahmen (gleichorientierte Einzelbilder; Parallaxenmessungen, Aerotriangulationen) sind verhältnismäßig aufwendig. Von Gletschern und vom Randeis liegen mehr Beobachtungen vor als von den Weiten der Inland- und Schelfeise. Vom statistischen Standpunkt gesehen, also in bezug auf die Bewegungsschwankungen, ist das Beobachtungsmaterial wenig repräsentativ und nur für vorläufige Korrelationsschätzungen geeignet; und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Beobachtungen sind räumlich und zeitlich unregelmäßig verteilt (inhomogen). Insbesondere sind die Meßpunktabstände (diskrete Realisierung) wegen Anpassung der Beobachtungsverfahren an das Oberflächenrelief der Eismassen ungleichabständig.
2. Die Anzahl der Meßpunkte ist meist gering, und die Beobachtungen sind nur selten mehr als einmal wiederholt worden (geringer Stichprobenumfang, Mangel an genügend langen, unabhängigen Realisierungen).
3. Die Beobachtungsfehler erreichen stellenweise die Größenordnung der Bewegungsschwankungen oder überdecken sie sogar („starkes Rauschen“).
4. Die Meßwerte sind keine Momentangeschwindigkeiten, sondern Mittelwerte über im allgemeinen ungleich lange Zeitintervalle.

Punkt 2 trifft besonders für Inlandeis zu, Punkt 4 ist beispielsweise an temperierten Ausflußgletschern zu berücksichtigen. Jede der Besonderheiten bewirkt einen sogenannten Stichprobeneffekt, die sich zwar teilweise gegenseitig aufheben können, insgesamt aber die statistische Sicherheit der Kovarianzfunktionen sehr beeinträchtigen. Man muß sie deshalb von Fall zu Fall berücksichtigen.

2.2. Direkte Korrelationsschätzungen aus photogrammetrischen Bewegungsmessungen

Die Oberflächengeschwindigkeit eines Gletschers sei an den ungleichabständigen Punkten P_k ($k = 1, 2, \dots, m$) aus wiederholten, gleichorientierten Einzelbildern zu den Zeiten t_i

($i = 1, 2, \dots, n$) gemessen. Nach Beseitigung der Trends erhält man die (durchschnittlichen) Geschwindigkeitsschwankungen $V_{ik} = \bar{V}_k^{i+1}$ in den Intervallen $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Die zeitlichen Abstände der Meßaufnahmen müssen so klein sein, daß die Schwankungen noch nicht geglättet (über Δt gemittelt) sind; an temperierten Ausflußgletschern 1 bis 3 Tage. Von jedem P_k liegt dann eine Stichprobe mit $N = n-1$ Beobachtungen vor.

Aus je zwei Meßreihen $\{V_{ik}, V_{i,k+r}; r = 0, 1, 2, \dots, m\}$ berechnet man die Kovarianzen

$$C_{k,k+r} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N V_{ik} V_{i,k+r} \quad (6)$$

und stellt sie als Funktion des Punktabstandes $\tau_r = \overline{P_k P_{k+r}}$ dar. Die Meßreihen sind keine unabhängigen Realisierungen, weil neben örtlichen auch Korrelationen im Zeitablauf der Bewegung bestehen. Die statistische Sicherheit der nach (6) geschätzten Kovarianzen geht entsprechend der effektiven Anzahl unabhängiger Meßwerte nach Bartels, vgl. auch Taubenheim (1969, p. 294—300) zurück. Je nach Meßbildformat und Basisverhältnis ist der Auswertebereich auf der Gletscheroberfläche (Profillänge) beschränkt. Ungleiche Punktabstände sind möglich.

2. 3. Direkte Korrelationsschätzungen aus geodätischen Bewegungsmessungen

Die Oberflächengeschwindigkeit eines Festland- oder Schelfeises sei in einem Profil (Kette, Traverse) mit im allgemeinen ungleichabständigen Punkten P_k gemessen. Es liege also nur eine einzige punktweise Realisierung vor. Wir interpolieren die trendfreien Geschwindigkeitsschwankungen v_k ($k = 1, 2, \dots, m$) an den Meßpunkten P_k linear und erhalten eine neue, geglättete Realisierung v_i ($i = 1, 2, \dots, N$) mit äquidistantem Punktabstand τ_0 , der etwa dem mittleren Abstand der Meßpunkte entsprechen soll (Abb. 2). Engere Punktabstände sind nicht sinnvoll, weil die mit den Meßpunktabständen erfaßte kleinste Wellenlänge der ortsabhängigen Geschwindigkeitsschwankungen durch Interpolation nicht unterschritten werden kann.

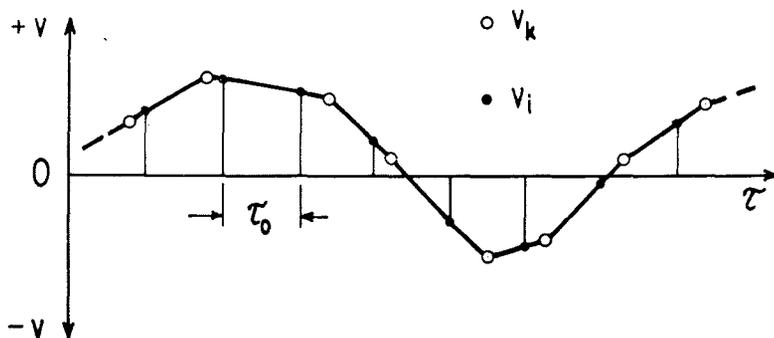


Abb. 2: Lineare Interpolation eines Meßwertes.
Fig. 2: Linear interpolation of sample.

Sofern die Kovarianzfunktion $C(\tau)$ in τ genügend schnell gegen Null abklingt (beschränkte Integralskala; ergodischer Prozeß) — und das ist nach sorgfältiger Trendbeseitigung gegeben —, kann sie punktweise aus einer einzigen Realisierung ausreichender Länge T nach

$$C_{\pm r} = C(\pm r\tau_0) = \frac{1}{N-r-1} \sum_{i=1}^{N-r} V_i V_{i+r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, m) \quad (7)$$

geschätzt werden. Kreuzkovarianzfunktionen errechnen sich analog nach

$$C_{+r} = C(+r\tau_0) = \frac{1}{N-r-1} \sum_{i=1}^{N-r} V_i \Phi_{i+r}$$

$$C_{-r} = C(-r\tau_0) = \frac{1}{N-r-1} \sum_{i=1}^{N-r} \Phi_i V_{i+1}$$
(8)

Die Länge der Realisierung $T = (N - 1) \tau_0$ sollte mindestens das 10- bis 20fache der Auswertelänge $r\tau_0$ betragen. In Traversen ist T gleich der Polygonzuglänge, in Dreiecks- oder Diagonalvierecksketten gleich der doppelten Kettenlänge.

Die statistische Sicherheit der Auswertung ist u. a. durch die äquivalente Erhaltungslänge $\varepsilon(T) \approx 2I_V$ bestimmt. Daneben ist zu beachten, daß Ausgleichung und Interpolation (Glättung) der Beobachtungen die Geschwindigkeitskorrelationen verstärken können. Demgegenüber schwächen zufällige Meßfehler die Geschwindigkeitskorrelationen ab. Es ist günstig, daß beide Stichprobeneffekte entgegengesetzt wirken und sich teilweise aufheben.

2. 4. Indirekte Korrelationsschätzungen aus Oberflächenneigungen und Eisdicken

Vom Inlandeis liegen keine geeigneten Meßreihen der Oberflächengeschwindigkeit vor, jedoch zahlreiche Profile mit gemessenen Oberflächenneigungen und Eisdicken. Man kann auf indirektem Wege versuchen, die Kovarianzfunktion der Oberflächenbewegung abzuleiten, indem man die Kovarianzfunktionen der Oberflächenneigung und der Eisdicke schätzt und diese mit Hilfe der Lösungen der Bewegungsgleichungen idealer Eiskappen in die Kovarianzfunktion der Oberflächengeschwindigkeit transformiert. Dafür reicht es aus, den einfachsten Fall, ein Eisschild von fast einheitlicher Dicke z , mit schwach variierender Oberflächenneigung α , verschwindender Gleitbewegung am Untergrund und konstanten Eiseigenschaften zugrunde zu legen. Seine Oberflächengeschwindigkeit ist (Haefeli 1961)

$$V = B(\rho g z \alpha)^{n/z} / (n+1).$$
(9)

g ist die Erdbeschleunigung, ρ die Eisdichte; B , n sind konstante Parameter des Fließgesetzes; n liegt in der Größenordnung 3 bis 4 (Budd 1969, 1970; Liboutry 1970).

$\alpha = \alpha(\tau)$ und $z = z(\tau)$ seien zufällige Prozesse mit den Kovarianzfunktionen

$C_{\alpha\alpha}(\tau)$, $C_{zz}(\tau)$. $v = v(\tau)$ ist dann ebenfalls ein zufälliger Prozeß mit der Kovarianzfunktion

$C_{vv} = f(C_{\alpha\alpha}, C_{zz}, C_{\alpha z})$. Die Anomalien der Schwere g sind vernachlässigbar gegen die Schwankungen von α und z . Die explizite Transformation bereitet bereits im einfachsten Fall über (9) erhebliche mathematische Schwierigkeiten, weil α und z mit unterschiedlichen Exponenten auftreten. Schon das Quadrat eines stationären Prozesses ist in-stationär (Sweschnikow 1965).

Da die Geschwindigkeitsschwankungen im Inland mit $\lesssim 1\%$ im Vergleich zum Randeis, wo Schwankungen von 10% und mehr vorkommen, unbedeutend sind, beschränken wir uns vorerst auf eine Diskussion des Abklingverhaltens von $R_{vv}(\tau)$ (Abschnitt 3. 4.).

3. Ergebnisse von Korrelationsschätzungen

3. 1. Ausflußgletscher

Beispiel: Kongsvegen-Gletscher, Kongsfjord, Westspitzbergen. Schätzung von Geschwindigkeitskorrelationen nach 2. 2. in je einem Längs- und Querprofil mit Auswertelänge 2 km. Die Ergebnisse wurden bereits mitgeteilt (Meier 1971); siehe auch Tab. 2. Die Geschwindigkeit schwankt im Längsprofil mit mittleren Amplituden von 55 m/Jahr und Wellenlängen von 1 bis 3 km um die mittlere, konstante „Blockgeschwindigkeit“. Die

Integralskala $I_v = 5$ km stimmt mit der Länge der Gletscherzunge von einheitlicher Oberflächenstruktur und einheitlichem Bewegungszustand überein.

3.2. Randeis

Beispiel: N-S-Profil Mirny — KM 100.

Beobachtungsdaten nach Dittrich und Schwarz (1966), Schmidt und Mellinger (1966). Länge der Realisierung 400 km, Auswertelänge 5 km. Lineare Interpolation der Stichprobe in äquidistanten Punktabständen $\tau_0 = 1$ km; vgl. Abb. 2. Beseitigung linearer Trends. Punktweise Korrelationschätzung nach (7) und (8).

Ergebnisse (Tab. 2; Abb. 3, 4, 5):

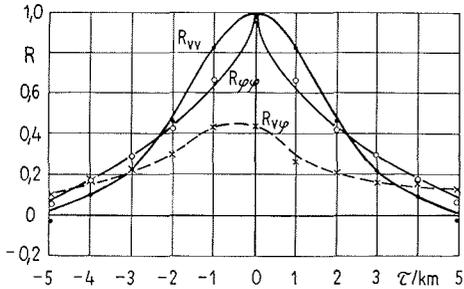


Abb. 3: Mirny — KM 100. Korrelationsfunktionen der Oberflächengeschwindigkeit.
Fig. 3: Mirny — KM 100. Correlation functions of the surface velocity.

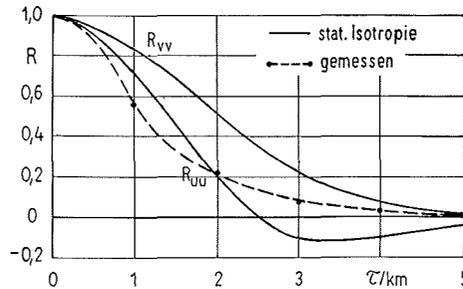


Abb. 4: Mirny — KM 100. Korrelationsfunktionen der Längs- und Querschwankungen.
Fig. 4: Mirny — KM 100. Correlation functions of the longitudinal and transversal variations.

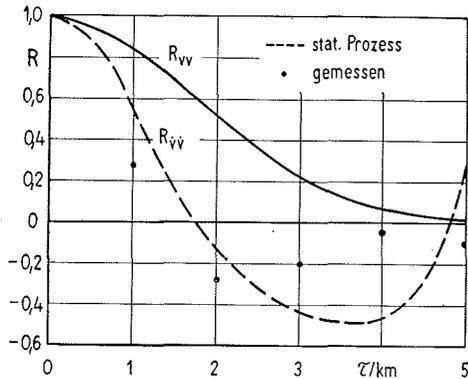


Abb. 5: Mirny — KM 100. Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit.
Fig. 5: Mirny — KM 100. Correlation functions of the velocity and strain.

Die Autokorrelationsfunktionen R_{vv} , R_{oo} klingen etwa bei $\tau = 5$ km gegen Null ab (Abb. 3, 4). Trotz unterschiedlicher Modelltypen ergeben sich für Betrag und Richtung der Geschwindigkeitsschwankungen gleichgroße Integralskalen $I_v = I_o = 2,2$ km. Das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion R_{vo} liegt bei etwa $\tau = -0,5$ km. Das bedeutet: Wird das über das Untergrundrelief fließende Eis am Punkt x_1 um den Winkel θ_1 aus der Hauptströmungsrichtung abgelenkt, so ändert sich wegen veränderter Untergrundneigung der Betrag der Geschwindigkeit um v_2 am Punkt x_2 nach der Distanz $x_2 - x_1$ von einigen hundert Metern bzw. nach der Zeit $\Delta t = (x_2 - x_1) / \bar{v} \sim 10$ Jahre. Die Korrelationsfunktion der Querschwankungen R_{uu} entlang x wurde aus C_{vv} , C_{oo} , C_{vo} nach (4) punktweise bestimmt (Abb. 4, gestrichelte Kurve) und unter der Annahme statistischer Isotropie nach (3) explizit aus R_{vv} gerechnet (Abb. 4, ausgezogene Kurve). Varianzen und Erwartungswerte der Amplituden der Längs- und Querschwankungen

verhalten sich etwa wie 10:1 (Tab. 2); die Längsschwankung ist gegenüber der Querschwankung ausgezeichnet. (4) ist zutreffender als (3). Wegen der Stichprobeneffekte (Abschnitt 2. 1.) unterscheiden sich allerdings beide Kurven nicht signifikant voneinander. Sollten die Querschwankungen (u , \odot) unbekannt oder zu stark von Meßfehlern überdeckt sein, kann man sich mit (3) zumindest eine grobe Vorstellung über R_{uu} verschaffen. Aus den Geschwindigkeitsdifferenzen benachbarter Punkte wurden die Korrelationen der Deformationsgeschwindigkeit (Längsdehnung) punktweise nach (7) berechnet und unabhängig davon R_{vv} unter Annahme eines stationären Prozesses nach (1) bestimmt (Abb. 5). Aus dem Nulldurchgang von R_{vv} bei $\tau \sim 1,5$ bis 1,8 km und der Integralskala $I_v = 2,2$ km folgt, daß dem mittleren Dehnungszustand lokale Dehnungsraten alternierenden Vorzeichens im Wechsel von ~ 2 km überlagert sind.

3. 3. Schelfeis

Beispiel: Querprofil über das Ross-Schelfeis (RISS I 1962/63, RISS II 1965/66).

Beobachtungsdaten nach Dorrer, Hofmann, Nottarp und Seufert (1971). Länge der Realisierung 600 km, Auswertelänge 63 km. Lineare Interpolation der Stichprobe aus Meßwerten in äquidistanten Punktabständen $\tau_0 = 9$ km. Beseitigung parabolischer Trends. Punktweise Korrelationsschätzung nach (7).

Ergebnisse (Tab. 2, Abb. 6, 7):

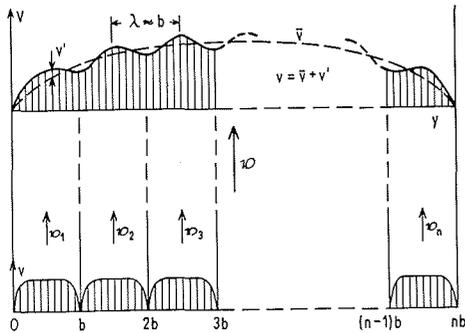


Abb. 6: Geschwindigkeitsquerprofil beim Zusammenfluß von n Teilströmen — schematisch.
Fig. 6: Cross-profile of the velocity after the confluence of n streams — scheme.

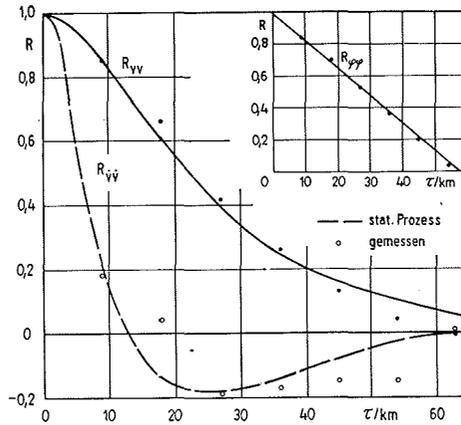


Abb. 7: Ross-Schelfeis-Traversal, Korrelationsfunktionen der Oberflächengeschwindigkeit.
Fig. 7: Ross-Ice-Shelf-Traversal. Correlation functions of the surface velocity.

Das Ross-Schelfeis wird aus Zuflüssen vom Mary-Byrd-Land, vom Polplateau und vom Victoria-Land gespeist. Die Gletscher, die ins Ross-Schelfeis fließen (Swithinbank 1963), bewegen sich mit Geschwindigkeiten v_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Nach dem Zusammenfluß gleichen sich die v_i durch Impulsaustausch einander an; es entsteht die resultierende Geschwindigkeitsverteilung v . Der Sachverhalt ist in Abb. 6 schematisch dargestellt. In der Nähe der Abbruchfront sind der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v} = \bar{v}(y)$ immer noch Geschwindigkeitsschwankungen $v' = v'(y)$ überlagert. Ihre Wellenlängen sind durch den Abstand, die Breite b und die Geschwindigkeitsverteilungen v_i der Zuflußgletscher bestimmt. Mit zunehmender Entfernung vom Zusammenfluß der Teilgletscher werden die aus den unterschiedlichen Zuflußgeschwindigkeiten herrührenden Amplituden immer mehr gedämpft.

Das RISS-Querprofil ließ sich gut durch eine quadratische Parabel zwischen den Pegeln

R 6 und R 69 annähern. Auch im Längsprofil R 101 bis R 133 wurden Parabelstücke aneinandergesetzt und die Abweichungen bestimmt. Varianzen und Amplituden der Geschwindigkeitsschwankungen im Querprofil und im Längsprofil, gemittelt über alle Pegel R 6 bis R 133, sind in Tab. 2 angegeben. Die Korrelationsfunktionen R_{vv} , $R_{\alpha\alpha}$ klingen bei $\tau \sim 60$ km gegen Null ab (Abb. 7). Die Korrelationsfunktion der Deformationsgeschwindigkeit (Scherung) $R_{\dot{v}\dot{v}}$ wurde analog zur Mirny-Kette auf zwei unabhängigen Wegen berechnet (Abb. 7). Es zeigt sich gute Übereinstimmung in den Grenzen der statistischen Sicherheit. Die Integralskala $I_V = 23$ km entspricht größenordnungsmäßig der Breite der Zuflußgletscher (Swithinbank 1963; Atlas Antarktiki, Tom I, 1966). Die Entstehung der Ross-Platte aus Teilströmen läßt sich noch in Frontnähe aus der schon stark geglätteten Geschwindigkeitsverteilung ablesen.

3.4. Inlandeis

Aus den Höhenprofil- und Eisdickenmessungen auf Inland-Traversen läßt sich abschätzen, daß

$$\left| \frac{z^{n+1}}{z^{n+1}} \right| \ll \left| \frac{\alpha^n}{\alpha^n} \right| \quad \text{bei } z \sim 2 \dots 3 \cdot 10^3 \text{ m.}$$

$$\left| \frac{z^{n+1}}{z^{n+1}} \right| \gg \left| \frac{\alpha^n}{\alpha^n} \right| \quad \text{bei } z \sim 1 \dots 3 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

Auf dem Inlandeis überwiegen die Schwankungen in α , am Randeis die Schwankungen in z , so daß näherungsweise

$$C_{vv}(\tau) \sim C_{\alpha^n \alpha^n}(\tau) \quad \text{im Inland,}$$

$$C_{vv}(\tau) \sim C_{z^{n+1} z^{n+1}}(\tau) \quad \text{am Randeis.}$$

In einem Übergangsbereich mit mittleren Eisdicken („antarktische Hangzone“) haben sowohl α als auch z Einfluß auf die Schwankungen und Korrelationen von v . Mit abnehmender Eisdicke wird die Geschwindigkeitsverteilung immer mehr von der Untergrundrauigkeit beeinflusst.

In erster Näherung setzen wir

$$\alpha \sim \sin \tau, z \sim \sin \tau.$$

Die Korrelationsfunktionen der periodischen Funktionen

$$\alpha^n \sim \sin^n \tau, z^{n+1} \sim \sin^{n+1} \tau$$

sind mit (5) für $n = 3$ gegeben (Fig. 8). Im Bereich $0 \leq \tau \leq \lambda/4$ mit λ als mittlerer Wellenlänge reagieren sie relativ unempfindlich auf veränderliches n . In der Natur sind natürlich α und z keine periodischen Funktionen mit einer einzigen Frequenz $1/\lambda$, sondern besitzen mehr oder weniger kontinuierliche Frequenzspektren. Die Korrelationsfunktionen werden deshalb rascher als in Abb. 8 gegen Null und spätestens bei $\tau = \lambda/4$ abklingen, und bei $\tau \geq \lambda/4$ nur noch schwach mit $|R(\tau)| \ll 1$ oszillieren. Man kann deshalb (5) als obere Grenze $R_{vv}^*(\tau)$ für $R_{vv}(\tau)$ angeben:

$$R_{vv}(\tau) \leq R_{vv}^*(\tau) \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq \lambda/4.$$

In Fig. 8 ist eine obere Grenze R_{vv}^* für $v = X = \sin^4 \tau$ separat eingezeichnet, darunter die Ergebnisse einiger Probeauswertungen; mangels Originalbeobachtungen aus digitalisierten graphischen Darstellungen der Oberflächenneigungen nach Beitzel (1970), Budd (1970), Ishida (1970) gerechnet:

Dronning-Maud-Land-Traversal: $\tau_0 = 1,1$ km; $\lambda/4 \approx 5,5$ km, gemittelt über die Maxima des Wellenspektrums.

Wilkes Ice Cape Projekt: $\tau_0 = 1$ km; $\lambda/4 \approx 1,5$ km.

Syowa-Plateau Station-Traversal: $\tau_0 = 5$ km; $\lambda/4 \approx 9$ km.

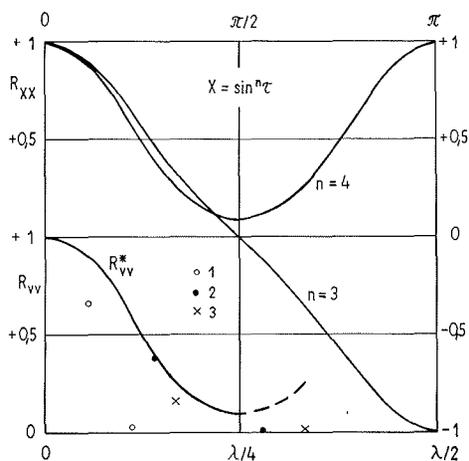


Abb. 8: Korrelationsfunktionen trig. Funktionen.
 1 Dronning-Maud Land-Traverse 2 Syowa-Plateau
 Station-Traverse 3 Wilkes Ice Cape Project.
 Fig. 8: Correlation functions of periodical func-
 tions.

Die Abklingform (Exponent n) und die Abklingdistanz (Wellenlängen λ) der Geschwindigkeitskorrelation $R_{vv}(\tau)$ sind sich über das gesamte Eisschild ähnlich, weil sich die statistische Struktur des Untergrundes in (gedämpften und geglätteten) Wellen mit ähnlichem Spektrum an der Oberfläche abbildet. Die Abklingdistanz Randeis Mirny von ≈ 5 km (Abb. 3) ordnet sich in die Abklingdistanzen ≈ 2 bis 10 km für Inlandeis (Abb. 8) ein bzw. liegt zwischen denen der (kleinen) Wilkes-Eiskappe (1,5 km) und der (großen) ostantarktischen Kappe (9 km).

4. Statistische Sicherheit, Meßpunktastand, Schlußfolgerungen

Es ist z. Z. nicht möglich, die statistische Sicherheit der geschätzten Funktionen und ihrer Parameter (Varianzen, Abklingfaktoren, Nulldurchgänge) anzugeben, weil sich die Einflüsse verschiedenartiger Stichprobeneffekte (Abschnitt 2. 1.) unkontrollierbar überlagern. Insbesondere sind die Wirkungen der Beobachtungsfehler und ihrer Korrelationen unbekannt. Lediglich der Vergleich der Korrelationsfunktionen in verschiedenen Gebieten gibt Anhaltspunkte, inwieweit sie zuverlässig sind. Die Korrelationsfunktionen Festlandeis sind wegen ähnlicher geomorphologischer Untergrundstruktur untereinander ähnlich und unterscheiden sich signifikant von denen der Schelfeise. Wir wirkungsvoll die Trends beseitigt wurden, zeigen u. a. die Abklingdistanzen von R_{vv} , $R_{\phi\phi}$. Am Randeis Mirny — KM 100 und auf dem Ross-Schelfeis stimmen sie jeweils etwa überein.

Der Meßpunktastand in Profilen längs oder quer zur Hauptbewegungsrichtung sollte nicht ausschließlich nach den Erfordernissen des Meßverfahrens festgelegt werden. Sofern man sich neben der mittleren Bewegung auch für ortsabhängige Geschwindigkeitsschwankungen und Dehnungsraten interessiert, sollten die statistischen Eigenschaften der Schwankungen ebenfalls berücksichtigt werden. Mit den Punktaständen in Tab. 1 nach Meier (1971) und den Ergebnissen Tab. 2 sind in Fig. 9 die „optimalen“ Punktastände für drei Beispiele (Ausflußgletscher, Randeis, Schelfeis) als Funktion der Varianzen der Beobachtungsfehler m^2 und der Bewegungsschwankungen σ^2 dargestellt worden. Je größer die Meßfehler („das Rauschen“), um so geringer ist die Chance, hohe Frequenzen aufzulösen; der Meßpunktastand Δ kann vergrößert werden. Um die Wellenstruktur der Geschwindigkeitsschwankungen ohne wesentlichen Informationsverlust zu erfassen, müssen die Punktastände bei den üblichen geodätischen und photogrammetrischen Meßverfahren auf Ausflußgletschern 0,1 bis 2 km, am Randeis 2 bis 5 km betragen. Auf den Schelfeisen mit „glatter“ Unterseite reichen Punktastände von 10 bis 20 km aus.

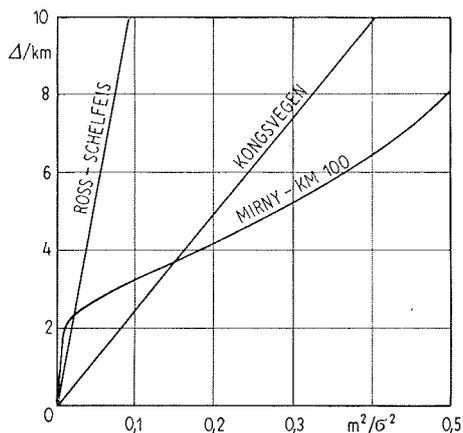


Abb. 9: Meßpunktstand.
Fig. 9: Distance of stakes.

Die Auswertungen haben gezeigt, daß mit den Beobachtungen, über die wir gegenwärtig verfügen, nur die Größenordnung und das Abklingen der Geschwindigkeitskorrelationen für typische Eismassen geschätzt werden können. Prädiktion und Ausgleichung von Eisbewegungen nach kleinsten Quadraten sind jedoch relativ unempfindlich gegen Änderungen von ≈ 20 bis 30% der in die Rechnung eingehenden Varianzen und Kovarianzen, so daß die vorliegenden Kovarianzfunktionen schon eine Hilfe für Prädiktions- und Ausgleichungsaufgaben sein mögen.

Literatur

A. Statistische Grundlagen

- Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. f. Phys. Bd. 124 (1948).
Moritz, H.: Eine allgemeine Theorie der Verarbeitung von Schweremessungen nach kleinsten Quadraten. DGK, Reihe A, Nr. 67, München 1970.
Sweschnikow, A. A.: Untersuchungsmethoden der Theorie der Zufallsfunktionen mit praktischen Anwendungen. Leipzig 1965.

Taubenheim, J.: Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten. Leipzig 1969.

B. Statistische Anwendungen

- Meier, S.: Statistische Analyse der Oberflächenbewegung des Kongsvegen-Gletschers, Westspitzbergen. Polarforschung Bd. VII, Jg. 41, Nr. 1/2 (1971).
Meier, S.: Schätzung des Punktstandes für geodätische Verschiebungsmessungen. Verm. Techn. 19. Jg. (1971) H. 12.

C. Glaziologische Grundlagen

- Budd, W. F.: The dynamics of the Amery ice shelf. J. Glac. Vol. 6, No. 45 (1966).
Budd, W. F.: The dynamics of ice masses. ANARE scientific reports, series A (IV) Glaciology, Publ. No. 108, Melbourne 1969.
Haefeli, R.: Contribution to the movement and the form of ice sheets in the Arctic and Antarctic. J. Glac. Vol. 3, No. 30 (1961).
Lliboutry, L. A.: The flow law from ice sheet dynamics. Int. Symp. Ant. Glac. Expl. (ISAGE) 1968, IASH — Publ. No. 86, Cambridge 1970.

D. Beobachtungsmaterial

- Atlas Antarktiki. Tom I, Moskwa 1966. Tom II, Leningrad 1969.
Beitzel, J. E.: The relationship of ice thickness and surface slopes in Dronning Maud Land. Int. Symp. Ant. Glac. Expl. (ISAGE) 1968, IASH — Publ. No. 86, Cambridge 1970.
Budd, W. F.: The Wilkes Ice Cape Projekt. Int. Symp. Ant. Glac. Expl. (ISAGE) 1968, IASH — Publ. No. 86, Cambridge 1970.
Ishida, T.: Glaciological research on the inland traverse of the 8th Japanese Ant. Res. Exp. Int. Symp. Ant. Glac. Expl. (ISAGE) 1968, IASH — Publ. No. 86, Cambridge 1970.
Dorrer, E., Hofmann, W., Nottarp, K. u. Seufert, W.: Geodätische Geschwindigkeitsbestimmungen auf dem Ross-Schelfeis in der Antarktis. Ein Beitrag zur Messung und Berechnung eines Polygonzuges auf beweglichem Untergrund. DGK, Reihe B, Nr. 181, München 1971.
Dittrich, G. und Schwarz, G.: Die geodätischen Arbeiten der deutschen Gruppe während der 7. SAE 1962. Geod. u. geophys. Veröff. NKGg d. DDR, Reihe III, H. 5, Berlin 1966.
Schmidt, T. und Mellinger, G.: Bestimmungen von Eisbewegungen am Rand des antarktischen Inlandeises. Geod. und geophys. Veröff. NKGg d. DDR, Reihe III, H. 4, Berlin 1966.
Swithinbank, C. W.: Ice Movement of Valley Glaciers Flowing into the Ross Ice Shelf, Antarktica. Science, Vol. 141, No. 3580 (1963).