

# Über das Fließgesetz in polykristallinem Eis

Von P. A. Šumskij \*

**Резюме:** Течение льда поочерёдно рассматривалось как проявление вязкости, пластичности и ползучести. Учёт первичных структурных различий льда требует применения методов теории наследственности. В рамках теории течения найдено среднее выражение связи между скоростью течения, девиатором напряжения и температурой гиперболического вида с постоянными параметрами во всём диапазоне изменений скорости течения в естественных условиях земной поверхности. В узких диапазонах изменений напряжения для аппроксимации можно пользоваться степенным законом или законом Бингема, находя значения их переменных параметров из гиперболического закона отдельно для каждого диапазона.

**Zusammenfassung:** Das Fließen des Eises ist nacheinander als Folge der Viskosität, der plastischen Verformung und des Kriechens betrachtet worden. Die Anwendung der „Vererbungstheorie“ ist erforderlich, um die primären strukturellen Unterschiede zu berücksichtigen. Im Rahmen der Theorie des Fließens wird eine mittlere hyperbolische Beziehung zwischen der Formänderungsgeschwindigkeit, dem Spannungsdeviator und der Temperatur gefunden mit Parametern, die im Bereich der an der Erdoberfläche angetroffenen Bedingungen konstant sind. In kleinen Spannungsbereichen ist es möglich, das Exponentialgesetz oder das Gesetz von Bingham als Näherung zu benutzen. Die Parameter müssen jedoch für jeden Bereich separat vom hyperbolischen Gesetz bestimmt werden.

**Summary:** The flow of ice has been considered in turn as a manifestation of viscosity, plasticity and creep. Use of the theory of heredity is necessary to account for primary structural differences. In the frame work of the flow theory an average expression for the relation between the strain rate, stress deviator and temperature of hyperbolic form is found with parameters which are constant in the entire range of flow rates actually encountered on the Earth's surface. In narrow stress ranges it is possible to use the power law or Bingham's law as approximation, but the varying parameters must be found from the hyperbolic law for each range separately.

Die rheologischen Eigenschaften des Eises werden schon mehr als hundert Jahre erforscht. Dennoch sind bis jetzt weder der physikalische Mechanismus der Deformation vollständig geklärt, noch die Form des Fließgesetzes und die Parameter exakt bestimmt, die zur Beschreibung des Fließprozesses des Eises über den vollen Bereich der möglichen Veränderungen in den ihn bestimmenden Bedingungen geeignet wären. Wie die physikalischen Forschungen der letzten Zeit gezeigt haben, erklärt sich das durch die Kompliziertheit des Verformungsvorganges, bei dem unter verschiedenen Bedingungen verschiedene physikalische Mechanismen eine mehr oder weniger große Rolle spielen.

Zunächst auf Grund der Erfolge bei der Erforschung der Flüssigkeiten, dann aber auch der festen Körper, wurde das Fließen des Eises nacheinander als Erscheinung der Viskosität, Plastizität und des Kriechens betrachtet (8). Der Erforschung des Fließens des Eises, d. h. des unbegrenzten Wachstums der Verformung unter der Einwirkung einer beständigen Kraft, ging ein halbes Jahrhundert von Diskussionen darüber voraus, ob das Eis überhaupt fließfähig sei, da das mit seiner Sprödigkeit unvereinbar erschien. Aber bald nachdem der Begriff des Viskositätskoeffizienten formuliert war (G. Wiedemann, 1856), begannen die experimentellen Untersuchungen auf der Grundlage der Hypothese der Viskosität (innere Reibung).

Im Jahre 1888 berechnete als erster Kelvin (43) die Zähigkeit des Eises  $\eta$  aus den experimentellen Daten von Main (30), indem er folgerichtig eine Abhängigkeit zwischen der Spannung  $\sigma$  und der Formänderungsgeschwindigkeit  $\epsilon$  [1] annahm.

$$\sigma = 2\eta\epsilon \quad [1]$$

Gleichzeitig gewannen MacConnel und Kidd (31) experimentelle Daten, die der Annahme eines [1] linearen Fließgesetzes widersprachen. Ungeachtet dessen fuhr man 60 Jahre lang fort, die Beobachtung des Fließvorganges im Labor und in der Natur mit der newtonschen Viskositätshypothese zu analysieren. In einem Artikel über die Viskosität des Eises wurde als Bezeichnung der Einheit im cgs-System das „poise“ (nach Poiseuille)

\* Prof. Dr. P. A. Šumskij, Institut für Mechanik der Universität, Moskau (UdSSR).

Zu danken ist Herrn Stud.-Dir. P. von Breitenstein, Hohenlimburg, für die freundliche Übernahme der Übersetzung und Herrn Prof. Dr. U. Radok, Melbourne, für die Durchsicht des deutschen Manuskripts.

vorgeschlagen. Die Abhängigkeit der Viskosität des Eises von der Temperatur  $\delta$  drückte S. N. Royen (38) durch die empirische Formel [2] aus.

$$\eta = \eta(\vartheta) = \eta_0 (1 - \vartheta) \quad [2]$$

Aber die Streuung der Resultate zahlreicher Bestimmungen des Viskositätskoeffizienten betrug zunächst sechs Größenordnungen ( $10^{10}$  —  $10^{16}$  Poises) und übertraf selbst bei sorgfältigst ausgearbeiteter Methodik der Durchführung der Versuche und Herstellung polykristallinen Eises mit ungeordneter C-Achsenorientierung erheblich den Fehler der Experimente (2, 4).

Eine Erklärung dieser Tatsachen wurde dank den Erfolgen in der Erforschung der Verformungsvorgänge kristalliner Körper gefunden. Im Jahre 1941 zeigte Höppler (27), daß das Eis keine viskose, sondern eine plastische Substanz darstellt, und sein Viskositätskoeffizient keine Konstante ist, sondern sich in Abhängigkeit von Temperatur, Spannung und der Orientierung der Kristalle ändert. Orowan (36) schlug vor, das Fließgesetz des Eises nach dem Schema von Prandtl für den ideal starr-plastischen Körper zu approximieren, und schätzte den Wert der Fließspannung aus den in Gletschern vorkommenden Strömungsgeschwindigkeiten zu 0,5 — 1,5 bar (1 bar =  $10^6$  dyn cm<sup>-2</sup>).

Im Jahre 1950 verglich Perutz (37) das Verhalten von Eis und Metall unter Belastung und schlug für das Eis das folgende Fließgesetz [3] vor (B und n Konstanten), auf dessen

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^n \quad [3]$$

Grundlage seitdem die Analyse der meisten experimentellen Ergebnisse durchgeführt wurde. Bald danach führte Nye (35) tensorielle Beziehungen ein und gab mit Hilfe der exponentiellen Abhängigkeit der zweiten Invarianten des Tensors der Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ik}$  und des Spannungsdeviators  $\sigma_{ik}$  der Beziehung zwischen den Komponenten dieser Tensoren bei zusammengesetzten Spannungszuständen die Form [4] (A = Konstante;  $\sigma$  = Schubspannung):

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{\sigma^{n-1}}{A^n} \sigma_{ik} \quad [4]$$

Im Jahre 1958 bestätigte Steinemann (42) experimentell, daß der hydrostatische Druck für  $p \leq 93$  kg cm<sup>-2</sup> keinen Einfluß auf die Gleitgeschwindigkeit des polykristallinen Eises ausübt. Rigsby (39) fand das gleiche Ergebnis für monokristallines Eis bei  $p \leq 316$  kg cm<sup>-2</sup>. Im Jahre 1955 führte Glen (18) eine Abhängigkeit des Gleitfähigkeitskoeffizienten B von der absoluten Temperatur analog zu der von Metallen ein [5] und bestimmte experi-

$$B = B(T) = B_0 \exp(-\Delta E/RT) \quad [5]$$

mentell die Aktivierungsenergie zu  $\Delta E = 31,8$  kcal/mol.

Aber die Parameter des exponentiellen Fließgesetzes erwiesen sich keineswegs als konstant. 1954 zeigte Steinemann (40, 41), daß bei Anwachsen der Spannung von 0,7 auf 16 kg cm<sup>-2</sup> der Exponent des exponentiellen Fließgesetzes von 1,5 auf 4,2 zunimmt. In der Folgezeit stellte es sich auf Grund zahlreicher Beobachtungen im Labor und in der Natur heraus, daß die Parameter des exponentiellen Gesetzes sich bei verschiedenen Bedingungen in folgenden Bereichen verändern (8, Tab. 4, 5):

$$\begin{aligned} 1 &\leq n \leq 11,5 \\ 7 \cdot 10^{-5} &\leq B \leq 6 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2 \text{ n kg}^{-n} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ 2 &\leq \Delta E \leq 45 \text{ kcal/mol} \end{aligned}$$

Daher wurden zwischen 1958 und 1971 eine Anzahl Gleichungen für die Beziehung zwischen Formänderungsgeschwindigkeit und Spannung mit temperaturabhängigen Propor-

tionalitätsfaktoren vorgeschlagen. Im folgenden sind sie in einfachster Form als Beziehungen zwischen Invarianten aufgeführt:

$$\dot{\epsilon} = B_0\sigma + B_1\sigma^n \quad [6]$$

mit  $n = 3$  (12),  $n = 3,5$  (34,11),  $n = 4$  (7),  $n = 4,5$  (32,33);

$$\dot{\epsilon} = B_0\sigma + B_1\sigma^3 + B_2\sigma^5 \quad [7]$$

[7] aus (29) nach den Daten (18) und (32, 33) mit Koeffizienten  $B_i$ , die sich untereinander in diesen beiden Fällen bis zu einem Faktor 25 unterscheiden;

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad [8]$$

aus (15) mit verschiedenen Parametern  $\dot{\epsilon}_0$ ,  $\sigma_0$  für große und kleine Spannungen und Fließgeschwindigkeiten;

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \operatorname{sh}^n \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad [9]$$

nach (10) mit  $2,92 \leq n \leq 3,16$  und  $10^{-9} \leq \dot{\epsilon} \leq 10^{-2} \operatorname{sec}^{-1}$ .

Gleichung [7] ähnelt dem hyperbolischen Sinus [8], ist jedoch auf die drei ersten Glieder

$$\dot{\epsilon} = \operatorname{sh}(B_0\sigma) = B_0\sigma + \frac{(B_0\sigma)^3}{3!} + \frac{(B_0\sigma)^5}{5!} + \dots,$$

der unendlichen Reihe mit etwas veränderten Koeffizienten beschränkt.

Die Mehrzahl der aufgeführten Beziehungen zeigt merkliche Abweichungen von Teilen der experimentellen Daten, zu deren Beschreibung sie vorgeschlagen werden (so z. B. [7] bis 63%, obwohl im Durchschnitt noch erheblich besser als [3]), aber keine der Beziehungen ist ausreichend zur Beschreibung aller Daten. Im einzelnen: Die algebraischen Polynome ergeben keine größere Neigung für die Kurve  $\dot{\epsilon}(\sigma)$  als die, welche dem höchsten Grad des Polynoms entspricht; der hyperbolische Sinus verlangt für die Beschreibung der wahren Krümmung eine glatte Veränderung der Parameter, ist jedoch in der dritten Potenz [9] ungeeignet für die Beschreibung des größten Teils der experimentellen Daten, die durch die Exponentialform mit  $1 \leq n \leq 3$  beschrieben werden.

Die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Formänderungsgeschwindigkeit und der Temperatur wurde ein wenig verbessert (15) durch die Einführung der Beziehung zwischen der Aktivierungsenergie und der mechanischen Relaxation, entsprechend der thermodynamischen Gleichung [10].

$$\Delta E = \Delta H - T\Delta S \quad [10]$$

Die Aktivierungswärme  $\Delta H$  und die Aktivierungsentropie  $\Delta S$  von Eis ergeben sich nach Dillon und Andersland (15) aus Versuchsergebnissen bei Temperaturen von  $-1,5^\circ$  bis  $-10^\circ\text{C}$  zu:

$$\begin{aligned} \Delta H &= 22,44 \text{ kcal/mol} \\ \Delta S &= 0,0361 \text{ kcal/mol } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Bei diesen Werten von  $\Delta H$  und  $\Delta S$  entspricht einem Temperaturanstieg von 0 auf  $273,15^\circ\text{K}$  ein lineares Anwachsen der Aktivierungsenergie von 11,44 auf 21,30 kcal/mol. In den Grenzen der an der Erdoberfläche üblichen Temperaturschwankungen ändert sich die Aktivierungsenergie um nicht mehr als 2 kcal/mol, und zahlreiche experimentelle Werte für  $\Delta E > 21,30$  kcal/mol (18, 42, 22, 9, 10 und andere) können auf diese Weise nicht erklärt werden. Nichtsdestoweniger finden alle Eigenheiten der Verformung des Eises eine qualitativ befriedigende physikalische Erklärung.

Wie Steinemann (42) festgestellt hat, tritt nach dem ersten sich verzögernden und dem

zweiten quasi-viskosen Stadium der Verformung beim Eis ein drittes Stadium unbeschleunigter Verformung auf, das, wie bei der Mehrzahl anderer Substanzen, zur Zerstörung führt, aber als parakristallines Fließen bei konstanter Geschwindigkeit um eine Größenordnung schneller ist als im quasi-viskosen Stadium. Dieser Vorgang ist der Rekristallisation zuzuschreiben, die bei einer Verformung von 1—3% beginnt und bei 10—20% aufhört. Im Verlauf dieses Prozesses zerfallen die Kristalle, deren basale Hauptsymmetrieebene (0001) stark gegen die Hauptscherspannungsebene geneigt ist, und verschwinden; dagegen entstehen und wachsen Kristalle, deren Hauptebene nahe an der Hauptscherspannungsebene liegt. Die Hauptsymmetrieebene ist wegen der größten Flächenbesetzung die Fläche des leichtesten Gleitens in den Eiskristallen. Das Gleiten ist dabei annähernd gleich leicht in beliebiger Richtung auf dieser Fläche (19, 41). Außerdem bestehen in den Eiskristallen noch zwei Systeme nichtbasalen Gleitens: Auf den Ebenen des Prismas  $\{10\bar{1}0\}$ , und in diesen in den Richtungen  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$  (Hauptrichtung) und  $\langle 0001 \rangle$  (Sekundärrichtung) (23, 24, 25, 26). Bei der Verformung von Eiseinkristallen wurde für Gleiten auf diesen Flächen als ein reproduzierbares Resultat die exponentielle Abhängigkeit zwischen Spannung und Formänderungsgeschwindigkeit ermittelt. Die Parameter der verschiedenen Gleitsysteme stellten sich jedoch als völlig unterschiedlich heraus. Der Koeffizient der Gleitfähigkeit  $B$  ist beim Gleiten in der Hauptebene erheblich größer als beim Gleiten in der Prismaebene  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$  (Abb. 1). Der Exponent  $n$  beim basalen Gleiten beträgt  $1,53 \leq n, \leq 1,58$ , und beim nichtbasalen  $n = 6,5$  (23, 24, 25, 26). Die Parameter des Fließgesetzes auf  $\{10\bar{1}0\}$  in der Richtung  $\langle 0001 \rangle$  sind noch nicht erforscht, aber es ist sehr wahrscheinlich, daß die Abweichung vom basalen Gleiten in diesem Falle noch größer sein wird.

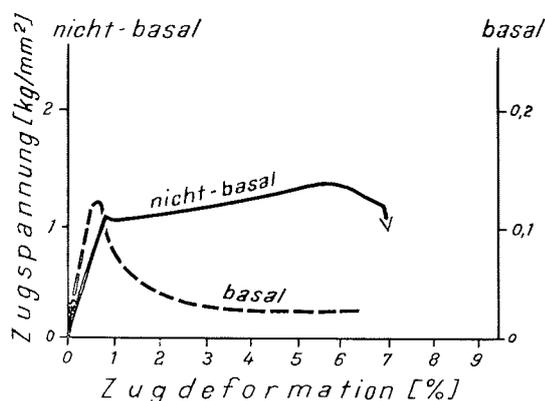


Abb. 1: Spannungs-Dehnungsdiagramm für basales Gleiten und Gleiten in der  $\{10\bar{1}0\}$  Ebene entlang der  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$  Richtung im Eiseinkristall (nach A. Higashi [25, 26]).

Fig. 1: Stress-strain curves for basal glide and glide in  $\{10\bar{1}0\}$  plane along  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$  direction in ice single crystals after A. Higashi (25, 26).

Auf diese Weise scheint eine Zunahme des Exponenten mit zunehmender Spannung beim polykristallinen Eis mit der wachsenden Rolle des nicht-basalen Gleitens verbunden zu sein. Bei tertiärem Fließen polykristallinen Eises ist der Exponent niedriger als beim sekundären. Dennoch ist er bei großer Spannung erheblich größer als bei rein basalem Gleiten und erhöht sich mit der Zunahme der Spannung. Das ist dadurch verursacht, daß die vollständige Herstellung der Strukturordnung bis zum Zusammenfallen der Hauptebenen mit der Scherungsebene beim tertiären Fließen z. B. in Gletschern nicht erreicht wird, da das Eis sich mit einer Geschwindigkeit dreht, die der Scherungsrate gleichkommt.

Beobachtete Fälle der Zunahme des Fließgesetzexponenten im Bereich  $6,5 \leq n \leq 11,5$  erklären sich wahrscheinlich durch elastisches Verbiegen und Brüche des Kristallgitters unter hoher Spannung (27, 6, 20, 21). Vielleicht haben sie aber auch ihre Ursache im

Gleiten nach Systemen, die sich noch stärker von dem basalen unterscheiden als  $\{10\bar{1}0\}$   $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ . Dagegen erklären sich die Abnahme von  $n$ , die Zunahme der Aktivierungsenergie im Bereich  $21,30 < \Delta E \leq 45$  kcal/mol und das Abweichen der Resultate aus der empirischen Formel von Royen von der thermodynamischen Abhängigkeit [5], [10] bei hoher Temperatur des Eises wahrscheinlich aus Phasenübergängen und der Rolle der flüssigen Phase im Verformungsvorgang.

In Schmelzpunktnähe sind offensichtlich Schmelzen an den Kristallgrenzen, die einer höheren Spannung ausgesetzt sind, und Wiedergefrieren (Regelation) an den Grenzen weniger beanspruchter Kristalle an der Verformung beteiligt. Infolge der normalen geringfügigen Verunreinigung durch Salze an den Korngrenzen bei „Süßwasser“-Eis können die flüssige Phase (als ein dünner Film) und Regelation bis dicht an die eutektische Temperatur auftreten, welche bei einer Reihe von Salzen dieser Art  $-11^{\circ}\text{C}$  bis  $-55^{\circ}\text{C}$  (5, Seite 100—102) beträgt. Unabhängig davon wurde die Existenz eines quasi-flüssigen Films auf der Oberfläche vollkommen reiner Eiskristalle theoretisch vorausgesagt; seine Dicke beträgt bis zu einer Temperatur von  $-6^{\circ}\text{C}$  einige Molekularschichten und bei einer Temperatur von  $-1^{\circ}\text{C}$  etwa zehn Molekularschichten (16, 17).

In den letzten Jahren wurde das Vorhandensein der flüssigen Phase in polykristallinem Eis mit der magnetischen Kernresonanz bestätigt. Im Spektrum des polykristallinen Eises wurde neben einer breiten Linie (8,7 Gauss), die durch die feste Phase hervorgerufen ist, eine schmale Komponente von 0,19 Gauss ermittelt. Die ihr entsprechende Masse wechselte in Abhängigkeit von der Temperatur, Reinheit der Probe und seiner Vorgeschichte. Bei  $-12^{\circ}\text{C}$  beträgt sie etwa 0,2 bis 0,4% der Probenmasse. Sie entspricht anscheinend der Flüssigkeit auf der Oberfläche der Kristalle oder den nicht durch Wasserstoff gebundenen Wassermolekülen im Inneren des Eisgitters (13). Die schwache Komponente erwies sich beim polykristallinen Eis in der Folgezeit als erheblich schwächer als beim Reif, der sich durch eine große spezifische Oberfläche auszeichnet (1, 3). Das weist auf eine Verteilung der Flüssigkeit ausschließlich oder vorwiegend auf der Oberfläche der Kristalle hin. Das Vorhandensein eines Wasserfilms an den Korngrenzen ermöglicht leichtes Gleiten an diesen Grenzen bei Verformung (10).

Auf diese Weise führt die Veränderung der Parameter des exponentiellen Fließgesetzes mit der Temperatur und der Spannung zwangsläufig dazu, daß in einer doppelt logarithmischen Darstellung der Kurve  $\dot{\epsilon}$  ( $\sigma$ ) mit der Temperatur als Parameter sich keine Schar von parallelen Geraden ergibt, wie man früher annahm, sondern eine Schar von mehr oder weniger parallelen Kurven (Abb. 2). Die Abweichungen von der Parallelität wird hauptsächlich durch strukturelle Verschiedenheiten und die mit ihnen verbundenen verschiedenen Stadien des Fließens hervorgerufen (primäres, sekundäres und tertiäres Fließen). Teilweise sind sie auch durch unterschiedliche Menge und Zusammensetzung der Salze sowie durch Versuchsfehler zu erklären, die besonders bei Beobachtungen in der Natur aus der ungenauen Bestimmung der Spannung auftreten.

Die Kenntnis der Veränderlichkeit der Parameter des Fließgesetzes führte in letzter Zeit zu dem Versuch, die Fließvorgänge des Eises der Westantarktis zur Erklärung des gegenwärtigen Regimes und der Geschichte seiner Änderungen zu beschreiben, indem die Veränderungen der Parameter in Abhängigkeit von den Änderungen des Druckes, der Temperatur, des Spannungsdeviators, der Orientierung, Dimension und Form der Kristalle, der Dichte und der Zusammensetzung der Verunreinigungen usw. abgeschätzt wurden (28). Als Resultat wurde ein sehr kompliziertes Bild gewonnen, das hypothetische Möglichkeiten instabiler Reaktion auf klimatische Änderungen enthält.

Ein derartiges Verfahren kann kaum als aussichtsreich bezeichnet werden. Alle wesentlichen Einflüsse müssen unmittelbar in die Formulierung des Fließgesetzes mit konstan-

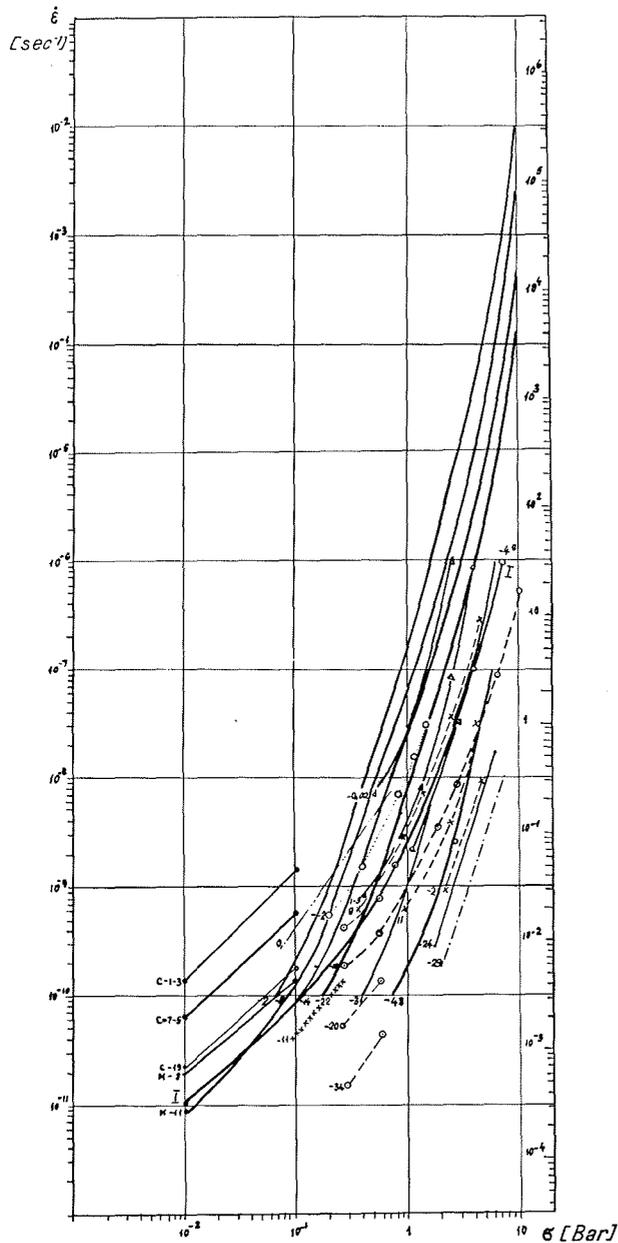
ten Parametern einbezogen werden. Bezüglich des Spannungsdeviators und der Temperatur ist das in der ersten Annäherung schon jetzt möglich. Der Druck übt im Bereich seiner Veränderungen über die größten Eismächtigkeiten keinen merklichen Einfluß aus. Im Verformungsvorgang des Eises geht eine gesetzmäßige Transformation seiner Struktur vor sich. Daher wird ungeachtet dessen, daß Eisproben verschiedener Herkunft und Struktur anfangs ganz verschieden auf Belastung reagieren, ihr tertiäres Fließen (nach Verformung um 10—20%) unter gleichen Bedingungen identisch sein, da sich eine gleichartige Struktur herausbildet. Unterschiede werden nur auf Grund verschiedener Mengen und Zusammensetzungen von Beimischungen möglich sein. Eine zweckmäßige Methode der Berechnung des wechselseitigen Einflusses der Zusammensetzung und der Struktur des Eises stellt die Vererbungstheorie dar, die die Vorgeschichte des Materials berücksichtigt. Gegenwärtig ist der Stand der Kenntnis dieses komplizierten Komplexes von Verformungs- und Rekristallisationsvorgängen noch nicht hinreichend für ein derartiges Verfahren. Daher muß man sich im Rahmen der Fließtheorie mit der Unmöglichkeit einer Berechnung des Einflusses der primären Strukturunterschiede abfinden und versuchen, einen charakteristischen mittleren Ausdruck für den Zusammenhang zwischen der Fließgeschwindigkeit und ihren wichtigsten Bestimmungsgrößen (Spannungsdeviator und Temperatur) zu finden. Diese Beziehung zwischen ihnen muß jedoch konstante Parameter enthalten, die den gesamten möglichen Bereich von Veränderungen unter den an der Erdoberfläche auftretenden Bedingungen einschließt.

Das Fließen ist vektoriell, und die daran beteiligten physikalischen Prozesse stehen in verschiedenen quantitativen Verhältnissen, je nach den existierenden Bedingungen; daher ist es kaum möglich, diese Aufgabe analytisch-theoretisch zu lösen. Die Methoden der statistischen Physik ermöglichen es zwar, einige Parameter eines Fließgesetzes, das auf diesem oder jenem Mikromechanismus beruht, anzugeben, nicht aber das Resultat einer wechselseitigen gemeinsamen Beteiligung einer ganzen Reihe verschiedener Mechanismen. Daher ist bisher ein rein empirisches Verfahren realistischer.

Für die empirische Lösung des Fließgesetzproblems ist es wichtig, ein möglichst vollständiges Experimentiermaterial auszuwerten. Da bedauerlicherweise ein großer Teil der Resultate experimenteller Untersuchungen in verallgemeinernder und vorwiegend graphischer Form veröffentlicht wurde, kann ihre Auswertung nur mit der Genauigkeit einer graphischen Bestimmung durchgeführt werden. Die Erhöhung der Genauigkeit durch Ausnutzung allein der numerischen Primärdaten bringt keinen Gewinn, da der Umfang des Ausgangsmaterials in diesem Falle sich zu sehr reduzieren würde.

Zu diesem Zweck wurden die von Budd (11) gesammelten Daten, ergänzt durch einige neue Werte, sowohl in doppelt-logarithmischen als auch linearen Maßstäben aufgetragen (Abb. 2, 3). Die Daten beziehen sich auf verschiedene Stadien des Fließens. Teilweise wurden die Geschwindigkeiten primären Fließens in die des sekundären Fließens nach theoretischen Formeln umgerechnet. Für einige Daten sind die Stadien des Fließens unbekannt. Mit Bestimmtheit hat das tertiäre Fließen nur Steinemann beobachtet.

Dem annähernd parallelen Bogen in Abb. 2 entspricht eine Schar einander ähnlicher Kurven, deren unterschiedliche Steigungen im Koordinatenursprung ungefähr den verschiedenen Temperaturen proportional sind und deren Krümmung sich allmählich mit wachsendem Abstand vom Ursprung verringert (Abb. 3). Die scheinbar großen Unterschiede im Bereich der geringen Spannungen und Formänderungsgeschwindigkeiten in Abb. 2 sind dadurch bedingt, daß es nicht möglich ist, bei solchen Geschwindigkeiten sekundäres Fließen zu erreichen. Daher sind sie absolut gemessen gering und haben praktisch keine Bedeutung. Ihrem Aussehen nach entsprechen die Kurven Funktionen zweiten Grades. Zur Nachprüfung dieser Annahme wurde im Bereich größter Häufung experimenteller Daten eine typische Kurvenform gezogen, die der Temperatur von  $-4^{\circ}\text{C}$



*Labormessung*

- △—△ Glen
- x—x Steinemann
- Voitkovsky
- Mellor u. Smith
- Butkovich u. Landauer
- Barnes, Tabor u. Walker

*Feldmessung*

- Gerrard, Perutz u. Roch (Jungfraufirn)
- Hansen u. Landauer (Grönland)
- Gow (Byrd)
- xxxxxxx Wilson (Grönland)

Abb. 2: Beziehung zwischen Spannung und Formänderungsgeschwindigkeit in doppel-logarithmischem Maßstab (Erweiterte Zusammenfassung von W. Budd). Die Kurve I ist das Ergebnis graphischer Mittelung für  $-4^{\circ}\text{C}$ . Die Kurven von Barnes, Tabor und Walker sind das Ergebnis einer Umrechnung auf theoretischer Basis von primärem in sekundäres Fließen.

Fig. 2: Stress-strain rate dependence for ice in a double logarithmic scale (W. Budd's summary with additions). I-I — a curve chosen for  $-4^{\circ}\text{C}$  as a result of graphical averaging. Barnes, Tabor and Walker's curves are results of a theoretical recalculation of primary flow to secondary flow.

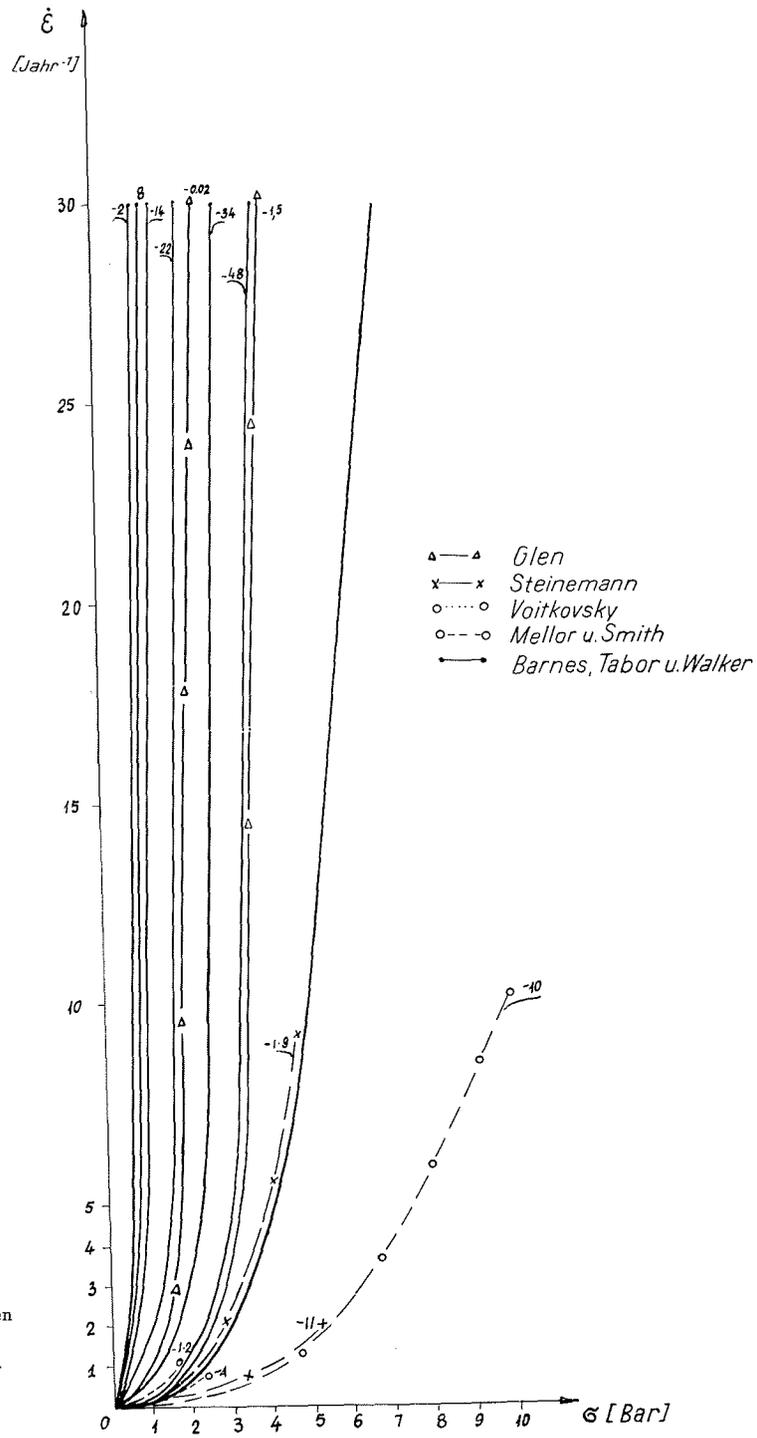


Abb. 3: Beziehung zwischen Spannung und Formänderungsgeschwindigkeit wie in Abb. 2 in linearer Darstellung.  
 Fig. 3: Stress-strain rate dependence for ice as in Fig. 2 in a linear scale.

entspricht. Auf dieser Kurve wurden 5 Punkte ausgewählt, die die Kurve genau bestimmen. Die Werte dieser Punkte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

	1	2	3	4	5	Dimension
$\sigma_0$	0	1	2	4	7	bar
$\dot{\epsilon}_0$	0	0,081	0,31	3,1	30	Jahr <sup>-1</sup>

$\sigma_0$ : Oktaeder — Spannung  
 $\dot{\epsilon}_0$ : Oktaeder — Formänderungsgeschwindigkeit

Tab. 1: Koordinaten  $\sigma$ ,  $\dot{\epsilon}$  der Ausgangswerte zur Bestimmung des Fließgesetzes für polykristallines Eis.

Tab. 1: Basic data ( $\sigma$ ,  $\dot{\epsilon}$ ) for the calculation of the flow law of polycrystalline ice.

Die Parameter der Kurve zweiten Grades wurden von T. B. Larina auf dem Elektrorechner „Nairi“ nach diesen Daten aus folgenden Gleichungssystemen berechnet:

$$\begin{array}{cccccc}
 \sigma^2 & \sigma \dot{\epsilon} & \dot{\epsilon}^2 & \sigma & \dot{\epsilon} & 1 \\
 \sigma_1^2 & \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 & \dot{\epsilon}_1^2 & \sigma_1 & \dot{\epsilon}_1 & 1 \\
 \sigma_2^2 & \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 & \dot{\epsilon}_2^2 & \sigma_2 & \dot{\epsilon}_2 & 1 \\
 \sigma_3^2 & \sigma_3 \dot{\epsilon}_3 & \dot{\epsilon}_3^2 & \sigma_3 & \dot{\epsilon}_3 & 1 \\
 \sigma_4^2 & \sigma_4 \dot{\epsilon}_4 & \dot{\epsilon}_4^2 & \sigma_4 & \dot{\epsilon}_4 & 1 \\
 \sigma_5^2 & \sigma_5 \dot{\epsilon}_5 & \dot{\epsilon}_5^2 & \sigma_5 & \dot{\epsilon}_5 & 1 = 0
 \end{array}$$

Die Koeffizienten der Gleichung zweiten Grades:

$$\alpha_{11}\sigma^2 + 2\alpha_{12}\sigma\dot{\epsilon} + \alpha_{22}\dot{\epsilon}^2 + 2\alpha_{13}\sigma + 2\alpha_{23}\dot{\epsilon} + \alpha_{33} = 0$$

ergaben sich nach der Abrundung zu

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_{11} = 315,065 & \alpha_{12} = 1456,62 & \alpha_{13} = 256,907 \\
 & \alpha_{22} = -263,421 & \alpha_{23} = -6563,04 \\
 \alpha_{ik} = \alpha_{ki} & & \alpha_{33} = 0
 \end{array}$$

und die Invarianten zu

$$I = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 51,6436$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = -1,84655 \cdot 10^{10}$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = -2,20473 \cdot 10^6$$

Da  $D < 0$ , stellt die Kurve den im ersten Quadranten gelegenen Zweig einer fast gleichseitigen Hyperbel dar (mit einem Winkel von  $89^\circ$  zwischen den Asymptoten), die durch den Koordinatenursprung geht. Das Zentrum der Hyperbel befindet sich in Punkt  $\sigma_0 = 4,305$ ,  $\dot{\epsilon}_0 = -1,108$ . Die reelle Achse ist zur Achse  $0\epsilon$  unter dem Winkel  $39^\circ 23'$  geneigt, und die Asymptote im ersten Quadranten unter dem Winkel  $-5^\circ 07'$ . Die Gleichungen des Teils der Hyperbel, der sich im ersten Quadranten befindet, nach  $\dot{\epsilon}_0$  und  $\sigma_0$  aufgelöst, haben folgende Form:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_0 &= A_1 \sigma_0 + B_1 + \sqrt{C_1 \sigma_0^2 + D_1 \sigma_0 + E_1} \\ \sigma_0 &= A_2 \dot{\epsilon}_0 + B_2 + \sqrt{C_2 \dot{\epsilon}_0^2 + D_2 \dot{\epsilon}_0 + E_2}\end{aligned}\quad [11]$$

$$\begin{aligned}A_1 &= 5,530, & B_1 &= -24,915, & C_1 &= 31,773, & D_1 &= -273,59, & E_1 &= 620,74, \\ A_2 &= -4,633, & B_2 &= -0,815, & C_2 &= 22,210, & D_2 &= 49,201, & E_2 &= 0,6649.\end{aligned}$$

Die Abweichungen der Berechnungsergebnisse von den tatsächlichen an anderer Stelle der gewählten Kurve liegen in der Zeichengenauigkeit.

Die Verwendung eines vollständigeren Datenmaterials wird wahrscheinlich die Parameter der Gleichung, aber kaum ihre Form verändern. Daher kann man die hyperbolische Abhängigkeit zwischen der Oktaeder-Spannung und der Oktaeder-Formänderungsgeschwindigkeit als wohlbegründet betrachten. Selbst nach statistischer Behandlung aller Daten werden die Parameter des hyperbolischen Fließgesetzes diesen Prozeß wegen der strukturellen Verschiedenheiten nicht in allen Bedingungen genau erfassen. Trotzdem sollte für die Analyse der experimentellen Daten, die unter verschiedenen Bedingungen gewonnen wurden, das hyperbolische Fließgesetz mit dem Ziel benutzt werden, die Gesetzmäßigkeiten der Veränderung der Parameter als Ausgangsmaterial für die Anwendung der Vererbungstheorie zu erforschen.

Bei Übergang zur Intensität der Schubspannungen  $\sigma = \sqrt{3/2} \sigma_0$  [kg/cm<sup>2</sup>] und zur Intensität der Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = \sqrt{3/2} \dot{\epsilon}_0$  [Jahr<sup>-1</sup>] und nach Einführung der Temperaturabhängigkeit [5], [10] unter Heranziehung der Schmelztemperatur des Eises  $T_0 = 273,15^\circ\text{K}$  bekommt das hyperbolische Gesetz folgende Form:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(\sigma, T) &= (A\sigma + B + \sqrt{C\sigma^2 + D\sigma + E}) \varphi^{-1}(T), \\ \sigma(\dot{\epsilon}, T) &= a\varphi(T)\dot{\epsilon} + b + \sqrt{c\varphi^2(T)\dot{\epsilon}^2 + d\varphi(T)\dot{\epsilon} + e},\end{aligned}\quad [12]$$

$$\begin{aligned}A &= 7,42, & B &= -41,74, & C &= 57,2, & D &= -614,9, & E &= 1742, \\ a &= -3,446, & b &= -1,018, & c &= 12,34, & d &= 45,80, & e &= 1,04,\end{aligned}$$

$$\varphi(T) = \exp \left[ \kappa \left( \frac{T_0}{T} - 1 \right) \right], \quad \kappa = \frac{\Delta H}{RT_0} = 21,08.$$

Bei einer künftigen genaueren Erfassung der Temperaturabhängigkeit der Formänderungsgeschwindigkeit bei Annäherung an die Schmelztemperatur sollte man sich der Primärwerte der hyperbolischen Beziehung zwischen  $\sigma$  und  $\dot{\epsilon}$  nach Gleichung [11] bei  $-4^\circ\text{C}$  bedienen.

Die Abhängigkeit zwischen der Komponenten des Tensors der Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ik}$  und den Komponenten des Spannungsdeviators  $\sigma_{ik}$  wird durch das hyperbolische Fließgesetz [12] in den Gleichungen ausgedrückt:

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \frac{\dot{\epsilon}(\sigma, T)}{\sigma} \sigma_{ik}, \quad \sigma_{ik} = \frac{\sigma(\dot{\epsilon}, T)}{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ik}.\quad [13]$$

Für eine gröbere Approximation des Fließgesetzes in einem schmalen Spannungsbereich kann man bei komplizierten Aufgaben das Exponentialgesetz [3] oder die Gleichung von Bingham für den plastischen Körper benutzen. Der Bingham-Körper fließt nach Über-

schreitung der Fließspannung  $\sigma_0$  mit einer Geschwindigkeit, die der Differenz zwischen  $\sigma$  und  $\sigma_0$  proportional ist.

$$\dot{\epsilon} = \varphi(\sigma - \sigma_0), \quad \sigma = (\dot{\epsilon}_0 + \eta \dot{\epsilon}), \quad [14]$$

wobei  $\zeta$  dem Gleitfähigkeitskoeffizienten und  $\eta$  dem Viskositätskoeffizienten entspricht. Beide Koeffizienten sind Funktionen der Temperatur. Die Beziehung zwischen den Komponenten des Formänderungsgeschwindigkeitstensors und denen des Spannungsdeviators für den Bingham-Körper hat die Form:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ik} &= \varphi(1 - \sigma_0/\sigma) \sigma_{ik}, & \sigma &\geq \sigma_0, \\ \sigma_{ik} &= (\sigma_0/\sigma + \eta) \dot{\epsilon}_{ik}, & \dot{\epsilon} &> 0. \end{aligned} \quad [15]$$

Die Bedeutung der Parameter in angenäherten Fließgesetzen muß separat für jeden Spannungs-, Formänderungsgeschwindigkeits- und Temperaturbereich gefunden werden, die in der vorliegenden Aufgabe vorkommen. Glaziologische Berechnungen insbesondere werden erheblich durch Anwendung des Exponentialgesetzes [3] vereinfacht, das in dem kleinen Bereich der Spannungsveränderungen, die gewöhnlich bei Gletschern mit verhältnismäßig ebenem Untergrund auftreten, eine gute Annäherung gibt. Es muß jedoch gefordert werden, daß sowohl die Formänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_m$  bei der Höchstspannung  $\sigma_m$  als auch ihr Integral von Null bis  $\sigma_m$  (proportional der Geschwindigkeit der Eisbewegung durch Formänderung) denjenigen des hyperbolischen Gesetzes [12] gleich sind. Die Bedingung der Spannungsgleichheit bei einer minimalen (verschwindenden) Fließgeschwindigkeit wird durch das Exponentialgesetz automatisch erfüllt, im Unterschied zu dem Gesetz von Bingham, für das die drei genannten Forderungen gleichzeitig unvereinbar sind. Die genannten Bedingungen führen zu folgenden Deutungen der Parameter des Exponentialgesetzes  $\dot{\epsilon} = K(T) \sigma^n$ :

$$n = \sigma_m \dot{\epsilon}_m / I_m, \quad k(T) = \dot{\epsilon}_m / \sigma_m^n, \quad [16]$$

$$\dot{\epsilon}_m = (A\sigma_m + B + \sqrt{C\sigma_m^2 + D\sigma_m + E}) \varphi^{-1}(T),$$

$$\begin{aligned} I_m = \int_0^{\sigma_m} \dot{\epsilon}(\sigma, T) d\sigma &= \left\{ \frac{1}{2} A\sigma_m^2 + B\sigma_m + \frac{2C\sigma_m + D}{4C} \sqrt{C\sigma_m^2 + D\sigma_m + E} - \frac{D}{4C} \sqrt{E +} \right. \\ &+ \left. \frac{4CE - D^2}{8C\sqrt{C}} \left[ \ln \left| 2C\sigma_m + D + 2\sqrt{C} \sqrt{C\sigma_m^2 + D\sigma_m + E} \right| - \ln \left| D + 2\sqrt{CE} \right| \right] \right\} \varphi^{-1}(T) \quad [17] \end{aligned}$$

#### Literatur

1. Kvlividze, V. I., Kiselev, V. F. und Uščakova, L. A.: O suščestvovanii kvazižidkoj plenki na poverchnosti l'da. [Über das Vorhandensein eines quasiflüssigen Films auf der Oberfläche des Eises.] Doklady AN SSSR, t. 191, No. 5, 1970.
2. Lavrov, V. V.: Vjazkost' l'da v zavisimosti ot temperatury. [Die Zähigkeit des Eises in Abhängigkeit von der Temperatur.] Žurnal tehničeskoj fiziki, t. 7, v. 9, 1947.
3. Uščakova, L. A., Kvlividze, V. L., und Skljankin, A. A.: O voznožnosti suščestvovanija kvazižidkoj plenki na poverchnosti ledjanych kristallov pri otricateľnych temperaturach. [Über die Möglichkeit eines quasiflüssigen Films auf der Oberfläche von Eiskristallen bei negativen Temperaturen.] Sb. „Svjazannaja voda v dispersnyh sistemach“, v. 1. M., Izd. MGU, 1970.
4. Syl'man, A. R.: Tekučest' polikristalličeskogo l'da. [Fließfähigkeit des polykristallinen Eises.] Trady Gos. gidrologičeskogo instituta, v. 7 (61). L., 1948.
5. Sumskij, P. A.: Osnovy strukturnogo ledovedenija. [Grundlagen der strukturellen Glaziologie.] M., Izd. AN SSSR 1955.
6. Sumskij, P. A.: Mechanizm deformirovanija i perekristallizacija l'da. [Deformationsmechanismus und Rekristallisation des Eises.] Sb. „Materialy po laboratornym issledovanijam merzlych gruntov“, No. 4. M., Izd. AN SSSR, 1959.
7. Sumskij, P. A.: K teorii kolebanij lednikov. [Zur Theorie der Gletscherschwankungen.] Materialy glaciolog. issledonanj, v. 10. M., 1965.

8. Sumskij, P. A. : Dinamičeskaja gljaciologija, I. Itogi nauki. [Dynamische Glaziologie, I. Ergebnisse der Wissenschaft.] Ser. geografija. Gidrologija suši. Gljaciologija. M. VINITI, 1969.
9. Barnes, P., and Tabor, D. : Plastic flow and pressure melting in the deformation of ice. I. Nature, Vol. 210, No. 5039, 1966.
10. Barnes, P., Tabor, D., and Walker, J. C. F. : The friction and creep of polycrystalline ice. Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 324, No. 1557, 1971.
11. Budd, W. : The longitudinal velocity profile of large ice masses. IASH Publ. No. 79, 1967.
12. Butkovich, T. R. and Landauer, J. K. : The flow law for ice. IASH Publ. No. 47, 1958. SIPRE Research Report No. 56, 1959.
13. Clifford, J. : Proton magnetic resonance data on ice. Chemical Communications, No. 17, 1967.
14. Deeley, R. M. and Parr, P. H. : The viscosity of glacier ice. Philosoph. Mag., Ser. 6, Vol. 26, No. 151, 1913.
15. Dillon, H. B. and Andersland, O. B. : Deformation rates of polycrystalline ice. Intern. Conference on Low Temperature Science, Vol. 1, Pt. 1, Sapporo 1967.
16. Fletcher, N. H. : Surface structure of water and ice. II. A revised model. Philosoph. Mag., Vol. 18, pp. 1287—1300, 1968.
17. Fletcher, N. H. : The chemical physics of ice. University Press, Cambridge 1969.
18. Glen, J. W. : The creep of polycrystalline ice. Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 228, No. 1175, 1955.
19. Glen, J. W. and Perutz, M. F. : The growth and deformation of ice crystals. Journ. of Glaciology, Vol. 2, No. 16, 1954.
20. Gold, L. W. : Crack formation in ice during creep. Scripta Metallurgica, Vol. 3, No. 6, 1969.
21. Gold, L. W. : The process of failure of columnar-grained ice. Philosophical Mag., Vol. 26, No. 2, 1972.
22. Higashi, A. : Plastic deformation of hollow ice cylinders under hydrostatic pressure. SIPRE Research Report No. 51, 1959.
23. Higashi, A., Koizuma, S. and Mae, S. : Plastic yielding in ice single crystals. Japan. Journ. Appl. Physics, Vol. 3, No. 10, 1964.
24. Higashi, A., Koizuma, S. and Mae, S. : Bending creep of ice single crystals. Japan. Journ. Appl. Physics, Vol. 4, No. 8, 1965.
25. Higashi, A. : Mechanisms of plastic deformation in ice single crystals. Physics of snow and ice. Proc. Intern. Conference on Low Temperature Science, Vol. 1, Pt. 1, Sapporo 1967.
26. Higashi, A. : Mechanical properties of ice single crystals. Physics of ice. Proc. Intern. Symposium on Physics of Ice in Munich, 1968, Plenum Press, New York 1969.
27. Höppler, F. : Die Plastizität des Eises. Kolloid Zeitschr., Bd. 97, H. 2, Dresden 1941.
28. Hughes, T. : Is the West Antarctic Ice Sheet disintegrating? Ice Stream-line Cooperative Antarctic Project Bulletin No. 1. Institute of Polar Studies, Ohio State University. Columbus, Ohio, 1972.
29. Liboutry, L. : The dynamics of temperate glaciers from detailed viewpoint. Journ. of Glaciology, Vol. 8, No. 53, 1969.
30. Main, J. F. : Note on some experiments on the viscosity of ice. Proc. Roy. Soc. London, Vol. 42, pp. 491—501, 1887.
31. McConnell, J. C. and Kidd, D. A. : On the plasticity of glacier and other ice. Proc. Roy. Soc. London, Vol. 44, No. 270, 1888.
32. Meier, M. F. : Vertical profile of velocity and the flow law of glacier ice. IASH Publ. No. 47, 1958.
33. Meier, M. F. : Mode of flow of Saskatchewan Glacier, Alberta, Canada. U. S. Geological Survey Profess. Paper No. 351. Washington, D. C. 1960.
34. Mellor, M. and Smith, J. H. : Creep of snow and ice. U. S. Army CRREL Research Report No. 220, 1960.
35. Nye, J. F. : The flow law of ice from measurements in glacier tunnels, laboratory experiments and Jungfraufirn borehole experiment. Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 219, No. 1139, 1953.
36. Orowan, E. : Joint Meeting of the British Glaciological Society, the British Rheologists Club, and Institute of Metals. Journ. of Glaciology, Vol. 1, No. 5, 1949.
37. Perutz, M. F. : Glaciology — the flow of glaciers. The Observatory, Vol. 70, p. 64, 1950.
38. Royen, N. : Istryck vid temperatur högningar. Hyllningskrift tillägnad F. V. Hansen på sextioårsdagen, Stockholm 1922.
39. Rygsby, G. P. : Effect of hydrostatic pressure on velocity of shear deformation of single ice crystals. Journ. of Glaciology, Vol. 3, No. 24, 1958.
40. Steinemann, S. : Flow and recrystallization of ice. IASH Publ. No. 39, 1954.
41. Steinemann, S. : Results of preliminary experiments on the plasticity of ice crystals. Journ. of Glaciology, Vol. 2, No. 16, 1954.
42. Steinemann, S. : Experimentelle Untersuchungen zur Plastizität von Eis. Beiträge zur Geologie der Schweiz, Hydrologie, No. 10, Bern 1958.
43. Thomson, W. : Polar ice-caps and their influence in changing sea levels. Transact. Geol. Soc. Glasgow, Vol. 8, Pt. 2, 1886.