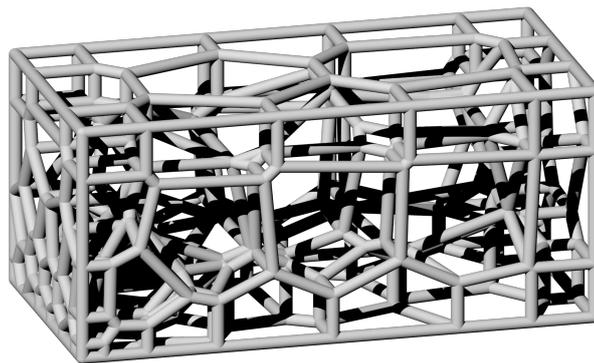


MASTERARBEIT ZUM THEMA

UNTERSUCHUNG VON EIGENSCHWINGUNG UND
LEICHTBAUPOTENZIAL UNTERSCHIEDLICHER
GITTERSTRUKTUREN AM BEISPIEL VON
MAGNETUNTERGESTELLEN VON TEILCHENBESCHLEUNIGERN

ANALYSIS OF NATURAL VIBRATIONS AND LIGHTWEIGHT POTENTIAL OF
DIFFERENT LATTICE STRUCTURES USING THE EXAMPLE OF MAGNET
UNDERFRAMES OF PARTICLE ACCELERATORS

SIMONE ANDRESEN B.SC.
Matrikel-Nr.: 3066897



1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Reinhold Kienzler
 2. Gutachterin: Prof. Dr.-Ing. Susanna Labisch
- Betreuer: Dr. Christian Hamm, Robert Naguschewski

Fachbereich 4 – Produktionstechnik
Vertiefungsrichtung Allgemeiner Maschinenbau

26. September 2017

ABSTRACT

In nature there are various regular and irregular lattice and honeycomb structures, which have been evolved over the course of millions of years of ongoing evolution and mostly serve different functions. The frequently irregular structures of diatoms for example are characterized by high strength at low mass. At the same time, a positive influence of the structural irregularity on the vibrational behavior of the structures is assumed.

Within biomimetic approaches biological structures serve as a source of inspiration for different technical applications. In this work a magnet underframes of particle accelerators is considered which is to be optimized towards a high first eigenfrequency and stiffness and a low mass. Following the calculation of the reference structure, the reference structure is replaced by irregular and regular 3D lattice structures based on biomimetic algorithms. Parameterized constructions and optimization calculations using the evolution strategy reveal the best possible structures, which represent compromises between a high eigenfrequency and stiffness and a low mass. The results show that irregular structures have, on average, a higher first eigenfrequency and stiffness than regular lattices.

In a next step, topology optimizations of the magnet support structure are performed with the goals of minimum compliance and a maximum first eigenfrequency. The results reveal necessary structural elements for reaching the defined targets at low mass. The subsequent transfer of the design suggestions from the topology optimizations to parameterized models allows a further, advanced optimization with the evolution strategy generating a large number of optimized structures.

In summary, the results of both optimization calculations show a large range of structures. Best structures combine both a higher first eigenfrequency as well as a higher stiffness compared to the reference structure. The irregular lattice structures for example reveal an increase of the first eigenfrequency by a factor of 1.43 with a simultaneous stiffness gain by a factor of 1.82 compared to the reference structure. The optimized structures based on the results of topology optimizations lead to an increase in the first eigenfrequency by a factor of 1.38 while the stiffness rises by a factor of 3.17. The structural masses always remain within the permitted values.

The great potential of the generated structures is shown by the fact that many structures with different eigenfrequencies can have the same stiffness. Furthermore, many developed structures with the same first eigenfrequency show a wide range in stiffness. The results indicate that a variation of the geometry, and therefore the resulting change in the mass distribution can be used to shift eigenfrequencies. However, further studies are necessary.

Keywords: biomimetics, eigenfrequency, evolution strategy, grid, multicriteria optimization, topology optimization, irregularity

ZUSAMMENFASSUNG

In der Natur finden sich verschiedenste reguläre und irreguläre Gitter- und Wabenstrukturen, die sich im Laufe der über Jahrmillionen andauernden Evolution entwickelt haben und meistens unterschiedliche Funktionen erfüllen. Die häufig irregulären Strukturen von Kieselalgen (Diatomeen) beispielsweise besitzen eine hohe Festigkeit bei geringer Masse. Gleichzeitig wird ein positiver Einfluss der Strukturirregularität auf das Schwingungsverhalten der Strukturen vermutet.

In der Bionik dienen biologische Strukturen als Inspirationsquelle für unterschiedliche technische Anwendungen. So wird hier ein Magnetuntergestell von Teilchenbeschleunigern betrachtet, für das eine hohe erste Eigenfrequenz und Steifigkeit sowie eine geringe Masse von Bedeutung sind. Nach der Berechnung der Referenzstruktur wird diese durch 3D-Gitterstrukturen, die auf bionischen Algorithmen basieren, ersetzt. Parametrisierte Konstruktionen und Optimierungsrechnungen unter Einsatz der Evolutionsstrategie decken bestmögliche Gitter auf, die Kompromisse zwischen einer hohen Eigenfrequenz und Steifigkeit sowie einer geringen Masse darstellen. Die Ergebnisse zeigen für unregelmäßige Strukturen eine durchschnittlich höhere erste Eigenfrequenz und Steifigkeit als für regelmäßige Gitter.

Im Anschluss werden Topologieoptimierungen des Magnetuntergestells mit den Zielen einer minimalen Nachgiebigkeit und einer maximalen ersten Eigenfrequenz durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen notwendige Strukturelemente zum Erreichen der definierten Ziele bei geringer Masse auf. Die anschließende Übertragung der Designvorschläge aus den Topologieoptimierungen auf parametrisierte Modelle erlaubt eine erneute Durchführung von Optimierungsrechnungen mit der Evolutionsstrategie, wodurch eine Vielzahl an optimierten Strukturen generiert wird.

Schlussendlich zeigen die Ergebnisse beider Optimierungsrechnungen eine große Bandbreite an Strukturen auf. Die besten Strukturen besitzen sowohl höhere erste Eigenfrequenzen, als auch höhere Steifigkeiten als die Referenzstruktur. So erreichen die unregelmäßigen Gitterstrukturen im Vergleich zur Referenzstruktur Zunahmen der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,43. Gleichzeitig steigt die Steifigkeit um den Faktor 1,82. Die optimierten Strukturen in Anlehnung an die Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen führen zu einer Zunahme der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,38, während die Steifigkeit um den Faktor 3,17 ansteigt. Dabei bleiben die Strukturmassen innerhalb der zulässigen Werte.

Das große Potenzial der generierten Strukturen zeigt sich darin, dass viele Strukturen mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen die gleiche Steifigkeit aufweisen können. Umgekehrt sind viele Strukturen mit gleicher erster Eigenfrequenz gebildet worden, die zum Teil sehr unterschiedliche Steifigkeiten besitzen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass durch eine Variation der Geometrie, die gleichzeitig eine Veränderung der Massenverteilung bedeuten kann, Eigenfrequenzen gezielt verschoben werden können. Jedoch sind diesbezüglich weiterführende Untersuchungen notwendig.

Schlagwörter: *Bionik, Eigenfrequenz, Evolutionsstrategie, Gitter, multikriterielle Optimierung, Topologieoptimierung, Unregelmäßigkeit*

DANKSAGUNG

Ich möchte mich bei den vielen Menschen bedanken, die mich im Rahmen der Masterarbeit und auch des Studiums unterstützt haben.

Zunächst geht mein Dank an meine Gutachter Herrn Prof. Kienzler und Frau Prof. Labisch für die Unterstützung des Themas und die konstruktive Kritik bei den Besprechungen während der Durchführung der Arbeit. Des Weiteren bedanke ich mich bei Dr. Hamm von der Arbeitsgruppe „Bionischer Leichtbau“ des Alfred-Wegener-Instituts in Bremerhaven für die Bereitstellung des Themas und des Arbeitsplatzes sowie den Kontakt zum Deutschen Elektronen-Synchrotron ([DESY](#)) in Hamburg.

Mein Dank gilt weiter Herrn Körfer und Frau Engling vom [DESY](#), die sich bei kurzfristigen Fragen stets schnell um eine Antwort bemühten und auch bei den Treffen immer ein großes Interesse an der Thematik zeigten und mich mit konstruktiver Kritik unterstützten.

Einen ganz besonderen Dank richte ich an meinen Betreuer Robert Naguschewski und die gesamte Arbeitsgruppe „Bionischer Leichtbau“ für die Hilfe bei der Einarbeitung in die Programme, die Ratschläge bei Problemen und die insgesamt sehr schöne Zusammenarbeit.

Abschließend möchte ich mich sehr herzlich bei meiner Familie, meinen Freunden und besonders meinem Freund Mauricio Gélvez bedanken, die mich während meines gesamten Masterstudiums begleiteten und mich in stressigen Momenten motivierten und stärkten.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1
1.1	Gitterstrukturen	1
1.1.1	Motivation für Gitterstrukturen	1
1.1.2	Stand der Forschung	2
1.2	Technische Problemstellung	4
1.3	Optimierungsansätze	6
1.3.1	Topologieoptimierung	6
1.3.2	Multikriterielle Optimierung mit Evolutionsstrategie	8
1.4	Zielsetzung	9
2	MATERIAL UND METHODEN	11
2.1	Theoretischer Hintergrund	11
2.1.1	Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	11
2.1.2	Finite Elemente Methode	12
2.1.3	Technische Schwingungen	14
2.1.4	Mechanik der Stäbe, Federn und Balken	16
2.2	Analytische Abschätzung	18
2.3	Referenzstruktur	19
2.3.1	Abstraktion der gegebenen Referenzstruktur	19
2.3.2	Ermittlung der Federsteifigkeiten	20
2.3.3	Numerische Berechnung der Referenzstruktur	21
2.4	Gitterstrukturen	22
2.4.1	Parametrische Konstruktion der Gitter	22
2.4.2	Numerische Berechnung der Gitter	26
2.5	Topologieoptimierungen	30
2.5.1	Maximale Steifigkeit	32
2.5.2	Maximale Eigenfrequenz	32
2.6	Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	33
2.6.1	Parametrische Konstruktion	33
2.6.2	Numerische Berechnung	34
2.7	Zusammenfassende Darstellungen der Ergebnisse	35
3	ERGEBNISSE	36
3.1	Analytische Abschätzung	36
3.2	Referenzstruktur	36
3.2.1	Abstraktion der gegebenen Referenzstruktur	36
3.2.2	Ermittlung der Federsteifigkeiten	37
3.2.3	Numerische Berechnung der Referenzstruktur	37
3.3	Gitterstrukturen	39
3.3.1	Numerische Berechnung der Gitter	39
3.4	Topologieoptimierungen	42
3.4.1	Maximale Steifigkeit	42

3.4.2	Maximale Eigenfrequenz	43
3.5	Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	46
3.5.1	Parametrische Konstruktion	46
3.5.2	Numerische Berechnung	47
3.6	Zusammenfassende Darstellungen der Ergebnisse	49
3.6.1	Vergleich der besten Strukturen	49
3.6.2	Variation der Randbedingungen	51
3.6.3	Variation des Materials	53
4	DISKUSSION	55
4.1	Analytische Abschätzung	55
4.2	Referenzstruktur	55
4.3	Gitterstrukturen	57
4.4	Topologieoptimierungen	58
4.5	Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	59
4.6	Zusammenfassende Darstellungen der Ergebnisse	60
4.7	Numerische Fehlerquellen	61
4.8	Fazit	62
	LITERATURVERZEICHNIS	63
A	ANHANG	68
A.1	Analytische Abschätzung	68
A.2	Referenzstruktur	69
A.2.1	CAD-Modell der Referenzstruktur	69
A.2.2	Abstrahierte Referenzstruktur	71
A.2.3	Hinreichende Vernetzung der Referenzstruktur	72
A.2.4	Numerische Berechnung der Federsteifigkeiten	72
A.2.5	Eigenfrequenzen und Eigenformen der Referenzstruktur	74
A.3	Gitterstrukturen im Designraum	75
A.3.1	Begriffe der Evolutionsstrategie	75
A.3.2	Hinreichende Vernetzung der Gitterstrukturen	76
A.3.3	Aufbau des Designraums	77
A.3.4	Funktionen der Grasshopper-Programmbibliothek	78
A.3.5	Parameter der Gitterstrukturen	80
A.3.6	Beste Strukturen	82
A.4	Topologieoptimierungen	84
A.4.1	Maximale Steifigkeit	84
A.4.2	Maximale Eigenfrequenz	86
A.5	Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	88
A.5.1	Strukturparameter	88
A.5.2	Beste Strukturen	89
A.6	Zusammenfassende Darstellungen der Ergebnisse	91
A.6.1	Einfluss des Materials	91

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1.1	Abbildungen unterschiedlicher Diatomeen	1
Abbildung 1.2	PETRA III: Teilchenbeschleuniger- und Girderaufbau	5
Abbildung 1.3	Kategorien der Strukturoptimierung	6
Abbildung 1.4	Übersicht über das Vorgehen in dieser Arbeit	10
Abbildung 2.1	Kräfte am Einmassenschwinger	14
Abbildung 2.2	Mehrmassenschwinger	15
Abbildung 2.3	Magnettöpfe	19
Abbildung 2.4	Fixpunkte der Strukturen	23
Abbildung 2.5	Rippen der Girderfüße	23
Abbildung 2.6	Beeinflussung einer Punkteverteilung durch Attraktoren	24
Abbildung 2.7	Bildung unregelmäßiger Gitter	25
Abbildung 2.8	Gitterzellen regelmäßiger Rechteck- und Hexagonalgitter	26
Abbildung 2.9	Ablauf der multikriteriellen Optimierung	28
Abbildung 2.10	Ablauf der Evolutionsstrategie	29
Abbildung 2.11	Modellaufbau der Topologieoptimierungen	31
Abbildung 3.1	Ergebnis der Validierungsrechnung	36
Abbildung 3.2	Darstellung der Referenzstruktur	37
Abbildung 3.3	Ergebnis der Gitterstudie der Referenzstruktur	38
Abbildung 3.4	Verformung der Referenzstruktur unter Erdanziehung	39
Abbildung 3.5	Ergebnis der Gitterstudie der Gitterstrukturen	40
Abbildung 3.6	Grafische Darstellung der Ergebnisse für die Gitterstrukturen	41
Abbildung 3.7	Ergebnis der Topologieoptimierung für maximale Steifigkeit	42
Abbildung 3.8	Verformung der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit	43
Abbildung 3.9	Ergebnis der Topologieoptimierung für maximale Eigenfrequenz	44
Abbildung 3.10	Verformung der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz	45
Abbildung 3.11	Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse	46
Abbildung 3.12	Grafische Darstellung der Ergebnisse für die Strukturen nach den Topologieoptimierungsergebnissen	48
Abbildung 3.13	Vielfalt an generierten Strukturen	49
Abbildung 3.14	Vergleichende Darstellung aller Strukturen	50
Abbildung 3.15	Eigenfrequenzen verschiedener Ordnungen für alle Strukturen	51
Abbildung 3.16	Maximale Verformung bei veränderten Randbedingungen	52
Abbildung 3.17	Erste Eigenfrequenzen bei veränderten Randbedingungen	52
Abbildung 3.18	Maximale Verformungen der Strukturen in Abhängigkeit vom Material	54
Abbildung 3.19	Erste Eigenfrequenzen der Strukturen bei unterschiedlichen Materialien	54
Abbildung A.1	Technische Zeichnung der Referenzstruktur	69

Abbildung A.2	Aufsicht auf die Referenzstruktur inklusive der Federn . . .	71
Abbildung A.3	Seitenansicht der Referenzstruktur inklusive der Federn . .	71
Abbildung A.4	Hinreichende Vernetzung der Referenzstruktur	72
Abbildung A.5	Modellaufbau zur Berechnung der Federsteifigkeiten	72
Abbildung A.6	Ergebnis der Federsteifigkeiten	73
Abbildung A.7	Eigenformen und Eigenfrequenzen der Referenzstruktur . .	74
Abbildung A.8	Hinreichende Vernetzung für die Gitterstrukturen	76
Abbildung A.9	Aufbau des Designraumes	77
Abbildung A.10	Beste Gitterstrukturen	82
Abbildung A.11	Gerenderte Darstellung der besten Gitterstrukturen	83
Abbildung A.12	Rekonstruktion des Ergebnisses aus der Topologieoptimie- rung für eine maximale Steifigkeit	84
Abbildung A.13	Eigenformen und Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit . .	85
Abbildung A.14	Rekonstruktion des Ergebnisses aus der Topologieoptimie- rung für eine maximale Eigenfrequenz	86
Abbildung A.15	Eigenformen und Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz	87
Abbildung A.16	Beste Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungser- gebnisse	89
Abbildung A.17	Gerenderte Darstellung der besten Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse	90
Abbildung A.18	Massen der besten Strukturen für verschiedene Materialien	91
Abbildung A.19	Dichtbezogene, maximale Verformungen der Strukturen bei unterschiedlichen Materialien	92

TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 2.1	Eigenwerte unterschiedlich gelagerter Balken	17
Tabelle 2.2	Einstellungen der Gitterstudie für die Referenzstruktur . . .	21
Tabelle 2.3	Einstellungen der Gitterstudie für die Gitterstrukturen . . .	27
Tabelle 2.4	Parameter der Gitterstrukturen	29
Tabelle 2.5	Vernetzungseigenschaften der Topologieoptimierungen . . .	31
Tabelle 2.6	Parameter für die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	34
Tabelle 2.7	Variation der Federsteifigkeiten	35
Tabelle 2.8	Materialeigenschaften für Stahl, Grauguss und Aluminium	35
Tabelle 3.1	Ergebnisse der Federsteifigkeiten	37
Tabelle 3.2	Eigenfrequenzen der Referenzstruktur	38
Tabelle 3.3	Eigenschaften der besten Gitterstrukturen	42
Tabelle 3.4	Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit	43
Tabelle 3.5	Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz	45
Tabelle 3.6	Eigenschaften der Rekonstruktionen aus den Topologieoptimierungsergebnissen	45
Tabelle 3.7	Eigenschaften der besten Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	48
Tabelle A.1	Vernetzungseinstellungen für die numerischen Vergleichsrechnungen	68
Tabelle A.2	Vernetzungseinstellungen für die Federsteifigkeitsermittlung	73
Tabelle A.3	Hinreichende Vernetzungseigenschaften für die Gitterstrukturen	76
Tabelle A.4	Detaillierte Auflistung der Gitterparameter	81
Tabelle A.5	Vernetzungseigenschaften für die Reanalyse des Topologieoptimierungsergebnisses der maximalen Steifigkeit	84
Tabelle A.6	Vernetzungseigenschaften für die Reanalyse des Topologieoptimierungsergebnisses der maximalen Eigenfrequenz . . .	86
Tabelle A.7	Detaillierte Auflistung der Parameter für die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen	88

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, deutsch: bi-direktionale Strukturoptimierung mit Evolutionsalgorithmen
CAD	Computer Aided Design
DESY	Deutsches Elektronen-Synchrotron
ELiSE	Evolutionary Light Structure Engineering
ESO	Evolutionary Structural Optimization, deutsch: Strukturoptimierung mit Evolutionsalgorithmen
FEM	Finite-Elemente-Methode
MEA	Maschinen- und Experimenteaufbau, Abteilung des DESY
NURBS	Nicht-uniforme rationale B-Splines
PETRA	Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage, Ringbeschleuniger des DESY
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization for intermediate densities

FORMELZEICHEN

Zeichen	Einheit	Beschreibung
γ		Scherung
ε		Dehnung
$\boldsymbol{\varepsilon}$		Verzerrungstensor
ε_0		Anfangsverzerrung
κ		Schubkorrekturfaktor
ν		Querkontraktionszahl
ω_0	s^{-1}	erste Eigenkreisfrequenz
$\boldsymbol{\omega}_0$	s^{-1}	Vektor der ersten Eigenkreisfrequenz
$\omega_{0,b}$	s^{-1}	erste Eigenkreisfrequenz eines Bernoulli-Balkens
$\omega_{0,bT}$	s^{-1}	erste Eigenkreisfrequenz eines Timoshenko-Balkens
Ω		Oberfläche eines Körpers
φ_0		Nullphasenwinkel
ρ	$kg\ m^{-3}$	Dichte
$\bar{\rho}$		künstliche Dichte
σ	MPa	Spannung
$\boldsymbol{\sigma}$	MPa	Spannungstensor
σ_0	MPa	Anfangsspannung
τ	MPa	Schubspannung
A	m^2	Querschnittsfläche
b	$N\ m^{-3}$	Volumenkraft
\boldsymbol{b}	$N\ m^{-3}$	Volumenkräfte
\boldsymbol{B}	$N\ m^{-1}$	differenzierte Ansatzfunktionen
c	$N\ m^{-1}$	Steifigkeit
c_1		Konstante
c_2		Konstante
c_3		Konstante
c_4		Konstante
d		Divisor
\boldsymbol{D}		Differentialoperator
E	MPa	Elastizitätsmodul
\boldsymbol{E}	MPa	Elastizitätstensor
f_0	s^{-1}	erste Eigenfrequenz
F	N	äußere Kräfte
\boldsymbol{F}	N	Vektor der äußeren Kräfte
\boldsymbol{F}_k	N	konzentrierte Einzelkräfte
G	MPa	Schubmodul
\boldsymbol{G}		Ansatzfunktionen
i	m	Trägheitsradius
I	m^4	Flächenträgheitsmoment

Zeichen	Einheit	Beschreibung
k	N m^{-1}	Komponenten der Steifigkeitsmatrix
k_b		Eigenwert eines Balkens
\mathbf{K}	N m^{-1}	Gesamt-Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_e	N m^{-1}	Element-Steifigkeitsmatrix
l	m	Länge
Δl_c	m	Längezunahme einer Feder
Δl_s	m	Längezunahme eines Stabes
Δl_z	m	Deformation eines Zylinders in Längsrichtung
m	kg	Masse
m_b	kg	Masse eines Balkens
\mathbf{M}	kg	Gesamt-Massenmatrix
n		natürliche Zahl
p		Benachteiligungsfaktor
q_0	N m^{-1}	Streckenlast
$\bar{\mathbf{t}}$	N m^{-2}	Oberflächenkräfte
u	m	Verschiebung
\mathbf{u}	m	Verschiebungsvektor
$\delta \mathbf{u}$	m	Vektor der virtuellen Verschiebungen
\mathbf{u}_k	m	Vektor der Knotenverschiebungen
$\delta \mathbf{u}_k$	m	Vektor der virtuellen Knotenverschiebungen
V	m^3	Volumen
V_e	m^3	Element-Volumen
w	m	Durchbiegung eines Balkens
δW_a	Nm	äußere virtuelle Arbeit
δW_i	Nm	innere virtuelle Arbeit
x	m	Bewegung
x_b	m	Längenvariable, Variable entlang der Balkenachse
\mathbf{x}	m	Bewegungsvektor
\hat{x}	m	Amplitude
$\hat{\mathbf{x}}$	m	Amplitudenvektor
\ddot{x}	m s^{-2}	Beschleunigung
$\ddot{\mathbf{x}}$	m s^{-2}	Beschleunigungsvektor

1 EINLEITUNG

1.1 GITTERSTRUKTUREN

1.1.1 Motivation für Gitterstrukturen

In der Natur finden sich verschiedenste reguläre und irreguläre Gitter- und Wabenstrukturen, die häufig unterschiedliche Funktionen erfüllen. Als Beispiel seien an dieser Stelle die Zellhüllen von Kieselalgen (Diatomeen) genannt, deren Strukturen sowohl sehr leicht und permeabel sind, als auch eine hohe Festigkeit aufweisen (Hamm et al. 2003; Round et al. 1990). Im Laufe der über Jahrmillionen andauernden Evolution hat sich eine faszinierende Vielfalt an Diatomeenstrukturen aus verschiedensten Wabenkonfigurationen sowie dreidimensionalen Gitterstrukturen gebildet (siehe Beispiele in Abb. 1.1). Häufig weisen die Strukturen Gradienten auf (z. B. Abb. 1.1 a und b), die zu Irregularitäten in der Struktur führen.

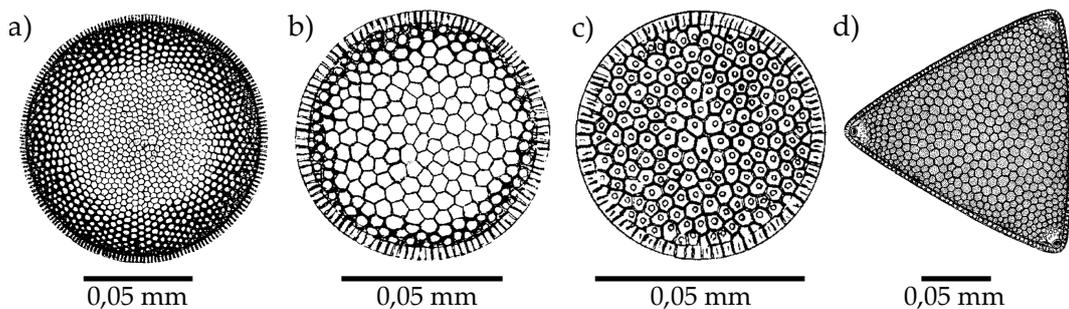


Abbildung 1.1: Darstellungen verschiedener Diatomeenschalen nach Schmidt (1902). a) - c) zeigen unterschiedliche Spezies der Gattung *Coscinodiscus*, d) stellt *Triceratium distinctum* Janssch dar. Die Maßstäbe sind anhand der in der Quelle angegebenen, globalen Vergrößerung errechnet worden.

Die beeindruckenden Zellhüllen mit ihren Leichtbauprinzipien dienen als Inspiration für verschiedenste technische Anwendungen im Rahmen des bionischen Leichtbaus (Maier et al. 2015). Neben den bereits genannten, für die Technik interessanten Eigenschaften der Zellhüllen - hohe Festigkeit, geringe Masse und hohe Permeabilität - wird ebenfalls ein Einfluss der Strukturirregularität auf die Eigenfrequenzen der Struktur vermutet. Kieselalgen werden von ihren Fressfeinden, den Ruderfußkrebsen, nicht nur „aufgeknackt“, sondern oft gleichzeitig mit hoher Frequenz geschüttelt. Für das Überleben dieses Angriffs sind somit neben einer hohen Festigkeit der Struktur ebenfalls gute Schwingungseigenschaften der Zellhülle notwendig. Jedoch ist dies bisher kaum untersucht worden.

Reguläre und irreguläre Gitter und Waben können in vielen technischen Gebieten Einsatz finden. In vielen Fällen sind sie Bestandteil von Leichtbaukonstruktionen, deren Ziel darin besteht, eine Struktur mit minimaler Masse sowie bestimmter Lebensdauer und Zuverlässigkeit unter gegebenen Randbedingungen zu verwirkli-

chen (Klein 2013). Dies ist auch im Sinne des Umweltschutzes von großem Interesse. Bei einem Pkw beispielsweise führt eine Massenersparnis von 100 kg zu einer Reduktion des Kraftstoffs um 0,5 l Kraftstoff pro 100 km sowie einer Verringerung der CO₂-Emission von 12 g pro km (Klein 2013). Wichtig für das Interesse der Automobilindustrie und der Verbraucher am Leichtbau ist die Kompensierung des häufig vorhandenen Aufpreises für die Gewichtsersparnis durch die Kraftstoffeinsparung während der Lebensdauer des Pkws.

Gitter und Waben finden sich beispielsweise in Sandwichkonstruktionen oder bei Tragwerken. Durch die Feingliederung der Struktur kommt es zu einer hohen Versteifung (Klein 2013). Vor allem der Einsatz von Strukturelementen entlang von Lastpfaden verspricht eine hohe Steifigkeit bei geringem Gewicht.

Neben dem Leichtbauaspekt sind auch die Schwingungseigenschaften von Strukturen Gegenstand verschiedenster technischer Bereiche. In vielen Anwendungen gilt es, Strukturen so auszulegen, dass keine Resonanzereignisse auftreten. Demzufolge ist die Untersuchung des Einflusses struktureller Komponenten auf die Eigenschwingungen von Strukturen für viele Anwendungsbereiche von großem Interesse.

Exemplarisch sollen in dieser Arbeit Magnetuntergestelle von Teilchenbeschleunigern betrachtet werden, für die sowohl eine hohe Eigenfrequenz, als auch ein geringes Gewicht und eine hinreichende Steifigkeit von Bedeutung sind.

1.1.2 *Stand der Forschung*

Die strukturellen Eigenschaften eines Gitters werden vor allem durch das Material, die Topologie und die relative Dichte des Gitters beeinflusst (Aremu et al. 2014; Li et al. 2005). Im Hinblick auf die mechanischen Eigenschaften von Gittern sind mehrfach regelmäßige Gitter untersucht worden. Beispielsweise betrachteten Wallach und Gibson (2001) das mechanische Verhalten von regelmäßigen 3D-Fachwerkstrukturen aus Aluminium und ermittelten eine höhere uniaxiale Druckfestigkeit und Schubfestigkeit bezogen auf die Dichte als sie kommerziell erwerbliche Aluminiumschäume aufweisen. Deshpande et al. (2001) beschäftigten sich mit den mechanischen Eigenschaften eines regelmäßigen Oktett-Streben-Gittermaterials und errechneten deutlich höhere, spezifische Festigkeiten als bei Metallschäumen.

Sehr spannend ist die Untersuchung struktureller Unregelmäßigkeiten. Aufgrund ihres hohen Vorkommens in der Natur, deren Strukturen in einem lang andauernden Prozess (Evolution) optimiert wurden, sind Vorteile von Strukturirregularitäten gegenüber regelmäßigen Strukturen zu erwarten. In vielen Publikationen ist bereits der Einfluss unterschiedlicher Unregelmäßigkeiten auf die mechanischen Eigenschaften von zweidimensionalen Waben- und Gitterstrukturen thematisiert worden. So ermittelten beispielsweise Silva et al. (1995), dass die Unregelmäßigkeit von 2D-Voronoi¹-Waben keine signifikanten Unterschiede in den elastischen Eigenschaften von Waben geringer Dichte hervorruft. Simone und Gibson (1998) beschäftigten sich mit dem Umverteilen des Materials von den Zellkanten in die Zellecken, was zunächst zu einem Ansteigen und später zu einem Abfallen des E-Moduls in einer 2D-Wabenstruktur führte. Im Hinblick auf den Einfluss ver-

¹ Voronoi-Waben sind konvexe Polyeder, die im Abschnitt 2.4.1 detaillierter erläutert werden.

schiedener Zellformen auf das E-Modul stellten Zhu et al. (2001) einen Anstieg des E-Moduls mit steigender Zellirregularität (Unregelmäßigkeiten der Zellen) fest, was den Aussagen von Silva et al. (1995) in gewisser Weise widerspricht. Auch Fazekas et al. (2002) entdeckten einen hohen Einfluss der Zellgeometrie auf die mechanischen Eigenschaften der Gesamtstruktur. Weiter simulierten Zheng et al. (2005) einen Druckversuch von 2D-Schäumen bei hohen Geschwindigkeiten und ermittelten, dass die Kapazität zur Energieabsorption der Struktur mit zunehmender Zellirregularität steigt. Während in den genannten Publikationen jeweils nur die Unregelmäßigkeit einer Struktureigenschaft betrachtet wurde, untersuchten Li et al. (2005) die elastischen Eigenschaften von unregelmäßigen, zweidimensionalen Zellstrukturen mit gleichzeitig ebenfalls ungleichmäßigen Wanddicken. Die Ergebnisse verdeutlichten u. a. einen Anstieg des E-Moduls mit Zunahme der Zellformunregelmäßigkeit bei konstanter Wanddicke, was mit den bereits genannten Ergebnissen von u. a. Zhu et al. (2001) übereinstimmt.

Die elastischen Eigenschaften von unregelmäßigen, schaumartigen 3D-Strukturen auf Grundlage von Voronoi-Waben sind von Zhu et al. (2000) untersucht worden. Analog zu den 2D-Ergebnissen von Li et al. (2005) konnte gezeigt werden, dass mit zunehmender Unregelmäßigkeit der Struktur eine Zunahme des E-Moduls zu verzeichnen ist. Auch Van der Burg et al. (1997) hatten diese Tatsache bereits in ihren Untersuchungen von schaumartigen 3D-Strukturen auf Grundlage von Voronoi-Waben gezeigt. Gan et al. (2005) beschäftigten sich ebenfalls mit den mechanischen Eigenschaften schaumartiger 3D-Voronoistrukturen und zeigten u. a. auf, dass das Versagen unter Druck meistens durch Beulen einzelner Zellkanten geschieht. In anderen Untersuchungen von Zhu und Windle (2002) wurde die unregelmäßige 3D-Schaumstruktur Druck mit hohen Dehnraten ausgesetzt und das Strukturverhalten analysiert. Auch Li et al. (2014) untersuchten 3D-Schäume auf Grundlage von Voronoi-Waben und simulierten das Strukturverhalten unter Druck mit hohen Deformationsgeschwindigkeiten. Sie konnten nachweisen, dass bei hinreichender Wabendichte die Plateau-Spannung mit Zunahme der Wabenirregularität analog zu den 2D-Ergebnissen von Zheng et al. (2005) tendenziell steigt. Ähnliche Ergebnisse im Hinblick auf den Zusammenhang zwischen Wabenirregularität und Plateau-Spannung publizierten Song et al. (2010).

Neben der hohen Zahl an Untersuchungen der mechanischen Eigenschaften von Waben- und Gitterstrukturen sind die Schwingungseigenschaften weniger häufig untersucht worden. Xu und Qiu (2013) untersuchten z. B. einen Sandwichbalken mit einem Fachwerkkern und verdeutlichten u. a. eine Zunahme der Eigenfrequenz mit zunehmendem E-Modul oder abnehmender Dichte. Yang et al. (2013) betrachteten die Schwingungs- und Dämpfungseigenschaften von Faserverbundplatten mit Fachwerkkern. Nach ihren Ergebnissen führt der Einbau von viskoelastischen Schichten in eine Sandwichplatte zu verbesserten Dämpfungseigenschaften bei nahezu gleichbleibender Eigenfrequenz. Yu und Cleghorn (2005) beschäftigten sich mit der freien Biegeschwingung von Wabenplatten und verglichen die Ergebnisse unterschiedlicher Plattentheorien miteinander. Sehr interessant ist die vor kurzem durchgeführte Bachelorarbeit von Syring (2017), in der regelmäßige und unregelmäßige 2D-Wabenkerne von Sandwichplatten hinsichtlich Schwingungsverhalten und Steifigkeit miteinander verglichen wurden. Die Ergebnisse zeigen, dass unregel-

mäßige Waben bei gleicher Masse höhere Steifigkeiten und erste Eigenfrequenzen als regelmäßige Waben aufweisen. Des Weiteren wurde ein hoher Einfluss der Anordnung unregelmäßiger Waben auf die Eigenfrequenzen und die Steifigkeiten der Sandwichplatten ermittelt.

Es sind jedoch bisher keine Untersuchungen zu dem Einfluss mechanischer Eigenschaften auf die Eigenfrequenzen von unregelmäßigen 3D-Gitterstrukturen publiziert worden.

Im Hinblick auf die Problematik der nicht gewünschten und zu verhindernden Resonanzerscheinungen jeglicher Strukturen gibt es viele Ansätze zur Dämpfung. Dabei können beispielsweise die Dämpfungseigenschaften von Honigwaben durch Einbringen von Material in das Wabeninnere verbessert werden. Boucher et al. (2013) untersuchten Waben, die teilweise oder vollständig mit Schäumen, viskoelastischen Materialien oder Partikeln (meist Metall oder Keramik) gefüllt wurden. Der Vorteil der Partikel besteht darin, dass Energiedissipation durch inelastische Stöße und Reibung erfolgt, wodurch Dämpfung bei jedem Lastfall und über eine weite Frequenzbreite möglich ist, während die Struktur nahezu konstant bleibt. Analog dazu füllten Jehring et al. (2009) Hohlkugelstrukturen mit feinen Keramikpartikeln. Sie erzielten Dämpfungswerte, die bei vergleichbarer Dichte ca. zehnmal so hoch wie bei z. B. Aluminiumschaum oder Magnesium ausfielen. Allen Arten des Füllens der Gitterzellräume oder Waben ist jedoch eine gleichzeitige Massenzunahme gemein. Aus diesem Grund ist die Untersuchung des Struktureinflusses auf die Schwingungseigenschaften von großem Interesse.

1.2 TECHNISCHE PROBLEMSTELLUNG

Teilchenbeschleuniger spielen eine wichtige Rolle in verschiedensten Forschungsfeldern. Dabei werden elektrisch geladene Teilchen bis auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und durch Magnetfelder auf ihrer Bahn gehalten. Während Teilchenphysiker mit Hilfe frontal aufeinandertreffender Teilchen den Ursprung der Materie untersuchen, nutzen Biologen, Materialwissenschaftler und Mediziner die energiereiche Röntgenstrahlung, um Materialien und Strukturen zu analysieren oder Vorgänge in der Natur in kleinsten Maßstäben zu filmen (Grotelüschen 2012). Die Forschungsanwendungen erfordern immer kleinere Strahlgrößen der Teilchenpakete (Bunche) für die Experimente, um kleinere Skalen aufzulösen. Dabei wird die Strahlgröße durch Schwingungen der Magnetuntergestelle und Vibrationen in den natürlichen Umgebungsbedingungen von Mensch, Maschinen und Gebäuden beeinflusst. Dies führt zur Aufweitung des Strahls.

Es gilt, die durch (äußere) Schwingungen hervorgerufenen Abweichungen während der gesamten Beschleunigungsstrecke möglichst gering zu halten. Dabei sollen die Magnetuntergestelle eine möglichst hohe erste Eigenfrequenz sowie keine bzw. wenige Eigenfrequenzen im relevanten Frequenzspektrum von 1 bis 50 Hz haben und den Einfluss der Umgebungsbedingungen erfolgreich dämpfen. Dies ist von großer Bedeutung, da die Beschleuniger zum Teil mehrere Kilometer lang sind und unterschiedliche geologische und bauliche Bedingungen vorliegen.

In Abbildung 1.2 ist der Aufbau des PETRA III-Ringbeschleunigers (Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage) beim DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron)

in Hamburg dargestellt. Die beschleunigten Teilchen strahlen tangential zu ihrer Bewegungsrichtung energiereiche Strahlung ab, die zur Untersuchung von kleinsten Strukturen genutzt wird. Die Teilchenbeschleunigung und -bündelung erfolgt durch Magnete, welche auf die nebeneinander stehenden Magnetuntergestelle platziert werden. Das Magnetuntergestell des Teilchenbeschleunigers besteht gewöhnlich aus einem mehrere Meter langen Betonträger mit speziellen Magnetträgerkonstruktionen. Der Betonträger wird als Girder bezeichnet. Er besitzt eine hohe Masse und ist auch im Hinblick auf die aufliegenden Lasten und die möglichen Anregungsfrequenzen von Schwingungen weniger gut ausgelegt. Im Rahmen dieser Thematik sind von Schlösser (2006) praktische Modalanalysen an einem aktuellen eingesetzten Girder durchgeführt worden, der vereinfacht mit den drei schwersten Magneten beladen war. In den Untersuchungen war der Girder am oberen, äußeren Rand gelagert, was der Lagerung der aktuell im Teilchenbeschleuniger PETRA III eingesetzten Girder entspricht. Die ermittelte, erste Eigenfrequenz lag bei 41 Hz. Numerisch ist bisher lediglich eine Modalanalyse von einem einzelnen Magneten inklusive dem Untergestell berechnet worden (Reichelt 2014). Referenzen zu numerischen Untersuchungen des gesamten Girders sind nicht zu finden.

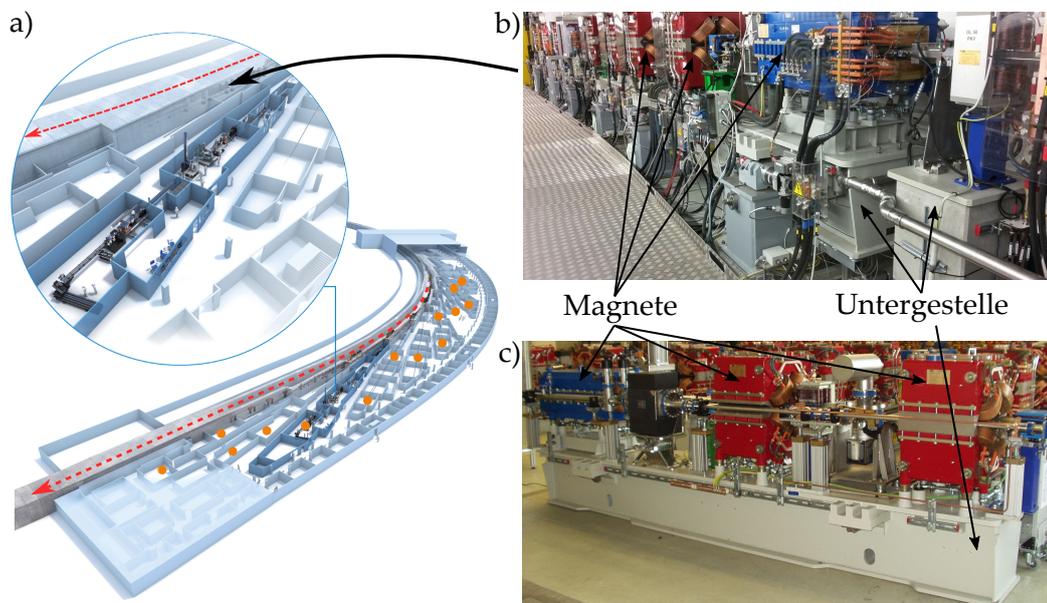


Abbildung 1.2: a) Schematische Darstellung des Teilchenbeschleunigers PETRA III nach DESY (2017). Der rote Pfeil stellt die Bewegungsrichtung des Teilchenstrahls dar. Die orangenen Punkte markieren Labore innerhalb der Experimentierhalle, in denen Strukturen mit Hilfe der tangential abgestrahlten Synchrotronstrahlung untersucht werden. In dem Tunnel sind die Magnete auf ihren Untergestellen wie in b) erkennbar aneinandergereiht. c) zeigt einen beladenen Girder des Beschleunigers außerhalb des Tunnels. Fotoquelle für b) und c): DESY-MEA.

Am DESY soll ein neuer Ringbeschleuniger PETRA IV mit einer sehr geringen Strahlbreite entwickelt und konstruiert werden. Somit ist eine hohe Fokussierung des Strahls von großer Bedeutung, für die verschiedene Komponenten des Beschleunigers optimiert werden müssen. So sollen im Rahmen dieser Arbeit Ansätze für eine Alternative zu den aktuell eingesetzten Magnetuntergestellen erarbeitet

werden. Wichtig sind dabei neben der bereits beschriebenen Betrachtung der Eigenfrequenzen auch das Erreichen einer möglichst geringen Masse sowie einer hohen Steifigkeit. Des Weiteren sollen die aktuell eingesetzten Auflager verändert werden. Die Auflager der aktuellen Girder ermöglichen eine spätere Nachjustierung der installierten Struktur, sind aber gleichzeitig mit hohen Kosten verbunden. Aus diesem Grund besteht eine weitere Anforderung des **DESY** darin, den Girder auf drei Punkten zu lagern, was im Abschnitt 2.3.1 detaillierter erläutert wird.

1.3 OPTIMIERUNGSANSÄTZE

1.3.1 Topologieoptimierung

Strukturelle Designprobleme lassen sich einteilen in Größen- und Formoptimierung sowie Topologieoptimierung (Abbildung 1.3). Bei der Größenoptimierung wird nach einer optimalen Dickenverteilung einer gegebenen Struktur gesucht. Die Formoptimierung resultiert in eine optimierte Form innerhalb eines gegebenen Designbereichs, während die Topologie konstant bleibt.

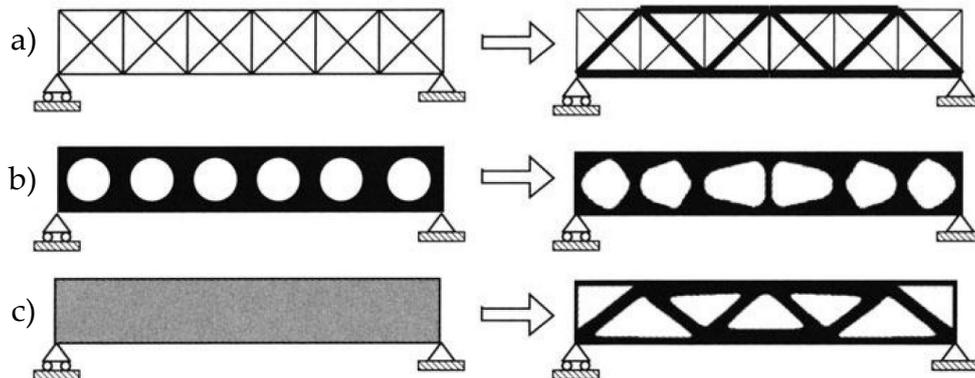


Abbildung 1.3: Darstellung der drei Kategorien der Strukturoptimierung nach Bendsøe und Sigmund (2004): a) Größenoptimierung, b) Formoptimierung und c) Topologieoptimierung.

Bei der Topologieoptimierung hingegen sind die einzigen bekannten Größen die aufgebracht Lasten, die festgelegten Randbedingungen und das Zielvolumen der zu generierenden Struktur. Häufig sind auch weitere Designbegrenzungen wie beispielsweise der Ort und die Größe von festgelegten Löchern vorgegeben. Größe, Form und Konnektivität der Struktur sind im Vorfeld nicht bekannt. So besteht das Ziel der Topologieoptimierung darin, eine bestimmte Anordnung von makroskopischen Festkörper- und Hohlraumregionen innerhalb des vorgegebenen Designraums zu finden, wodurch eine eingangs definierte Funktionalität optimiert wird. Bei dieser optimierten Funktionalität kann es sich beispielsweise um eine minimale Nachgiebigkeit oder eine maximale Eigenfrequenz handeln (Bendsøe und Sigmund 2004; Jog 2002).

Topologieoptimierungen werden mit der **FEM** (Finiten Elemente Methode) gelöst. Dies ist auf das Vorgehen zurückzuführen, nach dem das Problemgebiet analog zur **FEM** in diskrete Elemente unterteilt und jedem Element eine bestimmte Materialei-

genschaft zugeordnet wird. Iterativ wird die optimale Materialverteilung innerhalb des Designraums ermittelt. Beginnend mit der Publikation von Bendsoe und Kikuchi (1988) sind verschiedene numerische Methoden für Topologieoptimierungen immer weiterentwickelt worden. Zwei bekannte numerische Methoden sind die SIMP- und die ESO-Methode.

Bei der ESO-Methode (Evolutionary Structural Optimization) wird für jedes Element ein bestimmter Parameter (z. B. Von Mises Vergleichsspannung) berechnet. So werden die Elemente mit dem geringsten Parameterwert in jeder Iteration entfernt, bis das gewünschte Ergebnis erzielt wird. Eine Variante der Methode ist die BESO-Methode (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization), welche außerdem das Hinzufügen von zusätzlichen Elementen neben Elementen mit hohen Parameterwerten ermöglicht. Die ESO-Methode findet jedoch nur in vereinzelt Fällen in der Industrie Einsatz (Querin et al. 2000; Rozvany 2009).

Die am weitesten verbreitete Methode für die Lösung von Topologieoptimierungsproblemen ist die SIMP-Methode (Solid Isotropic Microstructure with Penalization for intermediate densities). Hierbei wird der Designraum in ein Netz aus n Elementen unterteilt. Eine künstliche Dichte wird als Designvariable definiert, welche Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Das aktuelle Volumen jedes Elements entspricht dem Produkt aus dem Elementvolumen und der künstlichen Dichte. Aus der Summe aller aktuellen Elementvolumina ergibt sich das Gesamtvolumen des Gebiets. Die Steifigkeit wird analog zum allgemeinen Verständnis von Materialien als linear abhängig von der Dichte angesehen (Bendsoe und Sigmund 2004). Im Allgemeinen weist die optimale Lösung einer Topologieoptimierung große Bereiche mittlerer Dichten zwischen 0 und 1 auf. Da jedoch für jedes Element ein diskreter Dichtewert von 0 (leer) oder 1 (voll) notwendig ist, wird folgende Benachteiligungsfunktion auf die Steifigkeitsmatrix K angewandt:

$$K(\bar{\rho}) = \bar{\rho}^p \cdot K \quad (1.1)$$

Durch diese Funktion mit dem auf die künstliche Dichte $\bar{\rho}$ angewendeten Benachteiligungsfaktor $p > 1$ werden Zwischendichten unwahrscheinlich. Es resultiert eine Dichteverteilung mit Werten von lediglich 0 und 1 (Bendsoe und Sigmund 2004). Die Ergebnisse von Topologieoptimierungen stellen Inspirationsquellen dar, die in einem weiteren Schritt interpretiert und als Grundlage für die Entwicklung von Designs genutzt werden können.

Publikationen über durchgeführte Topologieoptimierungen mit dem Ziel der minimalen Nachgiebigkeit sind weit verbreitet (z. B. Boucher et al. 2013 oder Krog et al. 2004). Jedoch gibt es auch Veröffentlichungen, die sich mit der Maximierung der Struktureigenfrequenzen beschäftigen (z. B. Díaz und Kikuchi 1992; Kim et al. 2004 oder Pedersen 2000). Hierbei werden in vielen Schwingungsoptimierungen die Eigenfrequenzen maximiert, um Resonanzphänomene in den mechanischen Strukturen zu verhindern und gleichzeitig eine hohe Wahrscheinlichkeit für dynamische Stabilität zu erreichen.

In vielen Fällen führt die Anwendung von Topologieoptimierungen auf Probleme mit dem Ziel der Eigenfrequenzmaximierung zu mathematischen und numerischen Schwierigkeiten. Eine mögliche Schwierigkeit ist die Veränderung der Eigenmodi durch die Strukturveränderung im Rahmen der Optimierung. So kann sich die

erste Eigenform der Ausgangsstruktur von der ersten Eigenform der optimierten Struktur unterscheiden (Luo et al. 2006; Maeda et al. 2006). Des Weiteren können in Bereichen geringer Dichte lokale Eigenmoden auftreten. Dies ist auf die geringe Steifigkeit dieser Bereiche zurückzuführen, wodurch die Bereiche die geringsten Eigenmodi der gesamten Struktur kontrollieren. Ideen zur Lösung der Problematik lokaler Eigenmodi sind von z. B. Pedersen (2000) publiziert worden.

Ein weiteres häufig auftretendes Problem besteht darin, dass in vielen Fällen mehrere Eigenfrequenzen im Rahmen einer Topologieoptimierung betrachtet werden müssten. Das Ziel der Optimierung kann jedoch nur die Maximierung einer Eigenfrequenz beinhalten. Wird beispielsweise eine Maximierung der zweiten Eigenfrequenz angestrebt, kann es zu einem großen Abstand zwischen der ersten und zweiten Eigenfrequenz kommen. Gleichzeitig ist es ebenfalls möglich, dass sich im Rahmen der Topologieoptimierung die erste und zweite Eigenfrequenz annähern. In beiden Fällen wäre eine gleichzeitige Maximierung mehrerer Eigenfrequenzen von Vorteil. Erste Ansätze zur Durchführung von Topologieoptimierungen mit diesem Ziel haben Du und Olhoff (2007) zusammengetragen.

In der Praxis finden sich viele multikriterielle Optimierungsprobleme, in denen beispielsweise sowohl die Nachgiebigkeit minimiert, als auch die Eigenfrequenzen maximiert werden sollen (z. B. Min et al. 2000 oder Luo et al. 2006). Dabei können meistens nicht alle Ziele gleichzeitig optimiert werden. Vielmehr geht es häufig darum, eine Kompromisslösung zu finden. Im folgenden Abschnitt wird diese Thematik vorgestellt.

1.3.2 Multikriterielle Optimierung mit Evolutionsstrategie

Häufig liegt das Bestreben einer Strukturoptimierung darin, mehrere möglicherweise auch gegensätzliche Ziele zu erreichen. Solche multikriteriellen Optimierungen ergeben nicht eine einzige Lösung, sondern zeigen eine Menge an Lösungen auf, aus der im Anschluss der beste Kompromiss bestimmt werden muss. 1986 sprach Pareto erstmals die Problematik widersprüchlicher Ziele an. Nach ihm gelten Lösungsalternativen als Pareto-optimale Lösungen, wenn eine weitere Minimierung eines der Ziele zu einer gleichzeitigen Maximierung eines anderen Ziels führt. Dabei ist jede Zielfunktion so formuliert, dass eine Minimierung der Funktion angestrebt wird (Ehrgott 2005).

Das Ergebnis einer multikriteriellen Optimierung ist eine Menge an Pareto-optimalen Lösungen, die sogenannte Pareto Front. Im Anschluss folgt die Untersuchung der Pareto Front mit Hilfe festgelegter Kriterien, um aus der Menge an möglichen Lösungen den besten Kompromiss zu wählen. Da der beste Kompromiss meistens von unterschiedlichen Faktoren abhängig ist, gibt es hierfür kein universell akzeptiertes Vorgehen (Coello Coello et al. 2002).

Es gibt verschiedene Methoden zur Durchführung einer Optimierung. In dieser Arbeit wird die Optimierungsmethode mittels evolutionärer Algorithmen verwendet, die zur Gruppe der stochastischen Methoden gehört. Evolutionäre Algorithmen sind vor allem für multikriterielle Probleme von Vorteil, weil sie gleichzeitig mit einer Menge an möglichen Lösungen arbeiten, was das Auffinden einer Menge an Pareto-optimalen Lösungen im Laufe einer Iteration ermöglicht (Coello Coello

1999). Es sind bereits eine Vielzahl an Untersuchungen zu evolutionären, multikriteriellen Algorithmen durchgeführt worden, die insgesamt auf die große Anzahl an unterschiedlichen evolutionären Ansätzen im Rahmen von multikriteriellen Optimierungen hindeuten. Aus diesem Grund gibt es keine allgemeingültigen Vorgaben zu einem bestmöglichen Aufbau eines evolutionären Algorithmus für multikriterielle Problemstellungen (Laumanns et al. 2001).

Die Evolutionsstrategie orientiert sich im weiteren Sinne an der biologischen Evolution und den Aussagen Darwins, nach denen nur die Organismen mit der höchsten Fitness überleben und sich fortpflanzen. So gibt es eine Elternpopulation, die sich aus Individuen (Strukturen) mit bestimmten Genen (Parametern) zusammensetzt. Auf die Population wirkt ein Selektionsdruck, wodurch nur den Individuen mit der höchsten Fitness eine Fortpflanzung ermöglicht wird. Diese selektierten Individuen bilden die Elternpopulation. Mit Hilfe von Rekombination und Mutation wird die Vielfalt an Individuen erhöht. Dabei ist Rekombination der Austausch von Genen zwischen Eltern. Mutation bedeutet eine zufällige Veränderung eines Gens. Die resultierende Kinderpopulation stellt anschließend die neue Ausgangspopulation dar, auf die wiederum der Selektionsdruck wirkt. Der Prozess läuft über eine festgelegte Anzahl an Generationen (Iterationen) ab. Hierbei besteht das Ziel der Evolutionsstrategie darin, Lösungen mit immer höherer Fitness zu generieren (Coello Coello et al. 2002).

1.4 ZIELSETZUNG

Unregelmäßige und regelmäßige 3D-Gitterstrukturen sollen hinsichtlich ihrer Eigenfrequenz, Steifigkeit und Masse untersucht werden. Dabei steht die Betrachtung des Struktureinflusses bei konstantem Material im Vordergrund. Durch parametrisierte Konstruktionen und Optimierungsrechnungen sollen bestmögliche Strukturen gefunden werden. Die Gitterstrukturen sollen die gegebene Referenzstruktur eines Magnetuntergestells für Teilchenbeschleuniger ersetzen und mit der ebenfalls zu berechnenden Referenz verglichen werden.

Des Weiteren soll die Durchführung von Topologieoptimierungen Hinweise auf wichtige Strukturelemente zum Erreichen der definierten Ziele geben. Eine Übertragung der Hinweise auf parametrisierte Modelle soll optimale Konstruktionsparameter aufzeigen, um die gewünschten Ziele zu erreichen.

Im Anschluss sollen die bestmöglichen Strukturen mit anderen Randbedingungen und Materialien untersucht werden.

Das Vorgehen in dieser Arbeit ist in [Abbildung 1.4](#) dargestellt.

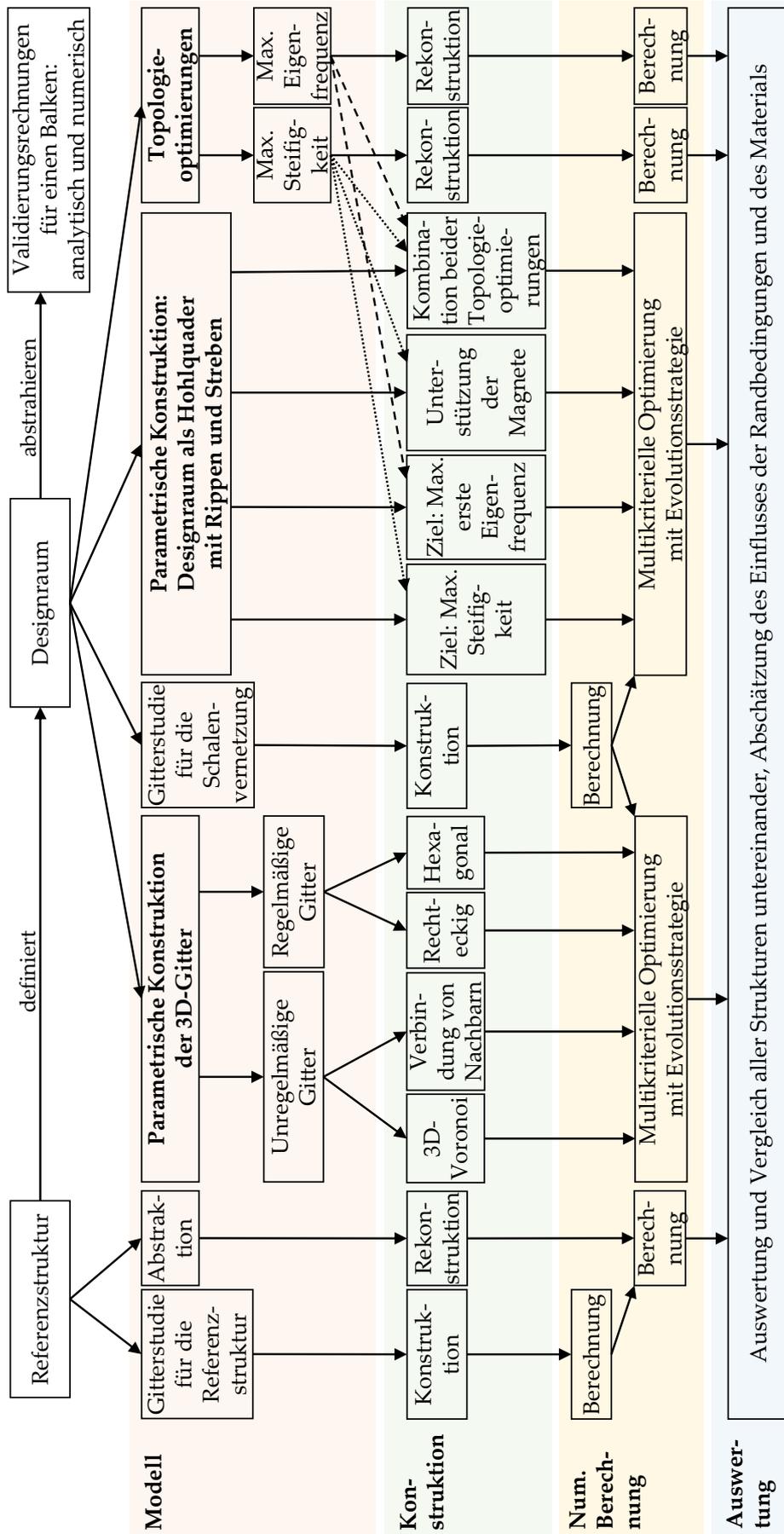


Abbildung 1.4: Übersicht über das Vorgehen in der vorliegenden Arbeit.

2 MATERIAL UND METHODEN

2.1 THEORETISCHER HINTERGRUND

2.1.1 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

In dieser Arbeit werden linear-elastische Körper untersucht, deren Verformungen als klein, stetig und stationär angenommen werden (Klein 2012). Die Beschreibung des elastomechanischen Verhaltens der Körper erfolgt mit insgesamt 15 Gleichungen.

- Sechs Verschiebungs-Verzerrungsgleichungen

Die Dehnungen ε und Scherungen γ lassen sich durch Differenziation der Verschiebungen u ermitteln. Die Komponenten des Verzerrungstensors ε können als Vektor geschrieben werden. Der Vektor ergibt sich aus der Anwendung der Differenzialoperatorenmatrix D auf den Verschiebungsvektor u .

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = D \cdot u \quad (2.1)$$

- Sechs Verzerrungs-Spannungsgleichungen

Werden die Verzerrungen mit dem Werkstoffgesetz kombiniert, so ergeben sich die Spannungen. Betrachtet wird hier lineares, isotropes Werkstoffverhalten im dreidimensionalen Raum mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν . Die Berechnung des Spannungstensor σ erfolgt durch das Produkt aus dem Elastizitätstensor E und dem Verzerrungstensor ε .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E(1+\nu)^{-1}}{(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

In verkürzter Schreibweise lautet die Gleichung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot D \cdot u \quad (2.3)$$

Liegen Anfangsspannungen σ_0 und/oder -verzerrungen ε_0 vor so gilt:

$$\sigma = (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot E + \sigma_0 \quad (2.4)$$

- Drei Gleichgewichtsgleichungen Es liegt ein statisches Gleichgewicht vor, wenn die inneren Spannungen σ und τ eines Körpers und die auf ihn wirkenden Volumenkräfte b keine resultierende Kraft ergeben.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - b_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - b_y = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - b_z = 0 \quad (2.7)$$

2.1.2 Finite Elemente Methode

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen, die z. B. physikalische Vorgänge wie die Verformung von Festkörpern unter Einwirkung von Kräften oder thermodynamische Ereignisse wie Wärmeleitung beschreiben.

Im Rahmen einer räumlichen Diskretisierung wird der Körper in geometrisch einfache Teilbereiche (Elemente) unterteilt. Dabei ist der Feinheitsgrad der Diskretisierung von großer Bedeutung für die Genauigkeit des Ergebnisses. Innerhalb eines Elements wird die gesuchte Größe, z. B. die Verschiebung, durch eine Linearkombination von Ansatzfunktionen (z. B. Polynome 1. oder 2. Grades) vereinfacht ausgedrückt. Durch Ableitung der Ansatzfunktionen in den Elementen kann die das Phänomen beschreibende Differenzialgleichung näherungsweise ermittelt werden. Die näherungsweise Lösung der Differenzialgleichungen ist sowohl durch die Formulierung einer Ersatzgleichgewichtsgleichung mit Hilfe des Variationsprinzips, als auch durch die Umwandlung der Differenzialgleichung in ein Funktional nach dem Ansatz von Galerkin möglich (Klein 2013). Bei beiden Vorgehen wird die Differenzialgleichung unabhängig von ihrer Ordnung jeweils linearisiert. Im Folgenden wird exemplarisch das Variationsprinzip dargestellt.

Das Variationsprinzip nutzt das Prinzip der virtuellen Arbeit: Die Anwendung von äußeren Kräften auf einen Körper führt zu virtuellen Verschiebungen. Es wird eine äußere virtuelle Arbeit am Körper verrichtet. Ein Gleichgewicht liegt vor, wenn die äußere virtuelle Arbeit δW_a gleich der inneren virtuellen Arbeit δW_i ist.

$$\delta W_a = \delta W_i \quad (2.8)$$

Die äußere Arbeit resultiert aus den konzentrierten Einzelkräften F_k , den Volumenkräften b und den auf die Körperoberfläche Ω wirkenden Flächenkräften \bar{t} .

$$\delta W_a = \delta u^T \cdot F_k + \int_V \delta u^T \cdot b \, dV + \int_{\Omega} \delta u^T \cdot \bar{t} \, d\Omega \quad (2.9)$$

Die innere Arbeit ist wie folgt definiert:

$$\delta W_i = \int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \, dV \quad (2.10)$$

Aus den Gleichungen 2.9 und 2.10 resultiert die Gleichgewichtsbedingung.

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV = \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{F}_k + \int_V \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{b} \, dV + \int_\Omega \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Omega \quad (2.11)$$

Ein Einsetzen der Gleichung 2.1 für die Verzerrung, der Transponierten dieser Gleichung sowie der Gleichung 2.3 für die Spannung ergibt die Variationsgleichung.

$$\int_V \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \, dV \cdot \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{F}_k + \int_V \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{b} \, dV + \int_\Omega \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Omega \quad (2.12)$$

Wird in diese Gleichung die exakte, tatsächliche Verschiebung \boldsymbol{u} eingesetzt, ist die Lösung noch exakt. Jedoch setzt hier die Näherung der FEM ein, in dem für die Verschiebung eines Elements ein Ansatz gemacht wird. Das unbekannte Verschiebungsfeld $\delta \boldsymbol{u}$ wird somit durch die Knotenverschiebungen \boldsymbol{u}_k der Elemente und die Ansatzfunktionen \boldsymbol{G} approximiert. Die Ansatzfunktionen entsprechen den Interpolationen zwischen den Knotenverschiebungen und können beispielsweise lineare oder quadratische Funktionen sein.

$$\delta \boldsymbol{u}^T = \delta \boldsymbol{u}_k^T \cdot \boldsymbol{G}^T \quad (2.13)$$

In diese Beziehung wird die Gleichung 2.12 eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \boldsymbol{u}_k^T \cdot \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \, dV \cdot \boldsymbol{u}_k \\ &= \delta \boldsymbol{u}_k^T \cdot \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{F}_k + \int_V \delta \boldsymbol{u}_k^T \cdot \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{b} \, dV + \int_\Omega \delta \boldsymbol{u}_k^T \cdot \boldsymbol{G}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da dies für alle virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \boldsymbol{u}_k$ gelten muss, lässt sich die Gleichung vereinfachen zu:

$$\int_V (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{G})^T \cdot \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{G}) \, dV \cdot \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{F}_k + \int_V \boldsymbol{G}^T \cdot \boldsymbol{b} \, dV + \int_\Omega \boldsymbol{G}^T \cdot \bar{\boldsymbol{t}} \, d\Omega \quad (2.15)$$

Diese Gleichung besagt, dass das Produkt aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix \boldsymbol{K} und den Knotenverschiebungen \boldsymbol{u}_k auf der linken Seite des Gleichheitszeichens gleich der Summe der angreifenden, äußeren Kräfte rechts vom Gleichheitszeichen ist. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix beinhaltet die Elementsteifigkeitsmatrizen aller Elemente. Für die Steifigkeitsmatrix eines Elements \boldsymbol{K}_e gilt:

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{E} \boldsymbol{B} \, dV_e \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{G} \quad (2.16)$$

Dabei ist V_e das Volumen eines Elements und \boldsymbol{B} die differenzierte Ansatzfunktion des Elements. Schlussendlich lautet die finite Grundgleichung mit den unter \boldsymbol{F} zusammengefassten äußeren Kräften:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{F} \quad (2.17)$$

Die finite Grundgleichung kann durch Invertieren der Gesamtsteifigkeitsmatrix oder durch iterative Lösungsverfahren nach den gesuchten Knotenverschiebungen aufgelöst werden. Durch Differenziation des ermittelten Verschiebungsfeldes können mit Hilfe der im Abschnitt 2.1.1 aufgeführten Gleichungen die Verzerrungen und Spannungen berechnet werden.

2.1.3 Technische Schwingungen

Schwingungen lassen sich nach Jäger et al. (2016) unterteilen in

- Freie und erzwungene Schwingungen:
Freie Schwingungen sind Schwingungen nach einmaliger Auslenkung eines Schwingungssystems und können als Überlagerungen von Eigenschwingungen aufgefasst werden. Im Gegensatz dazu kann eine Schwingungsbewegung auch durch periodische Kräfte oder Momente erzwungen werden.
- Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen:
Einer gedämpften Schwingung wird Energie entzogen, was zu einer abnehmenden Schwingungsamplitude führt. Ungedämpfte Schwingungen weisen dagegen konstante Schwingungsamplituden auf, da Energie weder zugeführt noch entzogen wird.

Lineare mechanische Schwingungssysteme zeichnen sich durch lineare Zusammenhänge zwischen Kraft- und Bewegungsgrößen aus. Dabei werden beispielsweise nichtlinear geschwindigkeitsabhängige Dämpfungen wie Luftwiderstand vernachlässigt (Jäger et al. 2016).

Betrachtet wird zunächst ein ungedämpftes, lineares Feder-Masse-System (Einmassenschwinger) mit vernachlässigbar kleiner Federmasse, dargestellt in Abbildung 2.1.

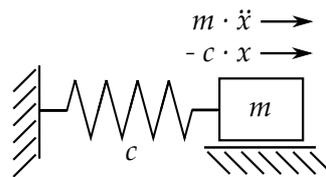


Abbildung 2.1: Kräfte am Einmassenschwinger mit der Steifigkeit c und der Masse m nach Gross et al. (2015).

Gemäß dem zweiten Newtonschen Gesetz entspricht die Kraft, die auf das System wirkt und es aus der Ruhelage auslenkt, dem Produkt aus Masse und Beschleunigung. Das Schwingungsverhalten kann mit folgender Differentialgleichung, die sich aus dem Kräftegleichgewicht in Abbildung 2.1 ergibt, beschrieben werden (Freymann 2011):

$$m\ddot{x}(t) + cx(t) = 0 \quad (2.18)$$

Dabei sind \ddot{x} die Beschleunigung, x die Bewegung, m die Masse und c die Steifigkeit. Die lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten kann mit folgendem Ansatz mit der Schwingungsamplitude \hat{x} und dem Nullphasenwinkel φ_0 gelöst werden.

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (2.19)$$

Ein Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung 2.18 ergibt:

$$-m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + c \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = 0 \quad (2.20)$$

Daraus lassen sich die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Eigenfrequenz f_0 des ungedämpften Systems berechnen, die von der Steifigkeit c und der Masse m abhängig sind.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{und} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2.21)$$

Die Anzahl an Eigenschwingungsformen eines Schwingungssystems ist gleich der Anzahl an Freiheitsgraden. Der betrachtete Einmassenschwinger besitzt somit nur eine Eigenform. In dieser Arbeit werden jedoch komplexe Gitterstrukturen mit einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden untersucht, woraus sich eine Vielzahl an Eigenformen ergibt. Des Weiteren bestehen die Strukturen aus einer großen Anzahl unterschiedlich verteilter Massen. Die Eigenkreisfrequenzen solch komplexer Systeme lassen sich nur numerisch ermitteln (Jäger et al. 2016). Gegeben sei eine Schwingerkette aus $n > 2$ Massen, dargestellt in Abbildung 2.2.

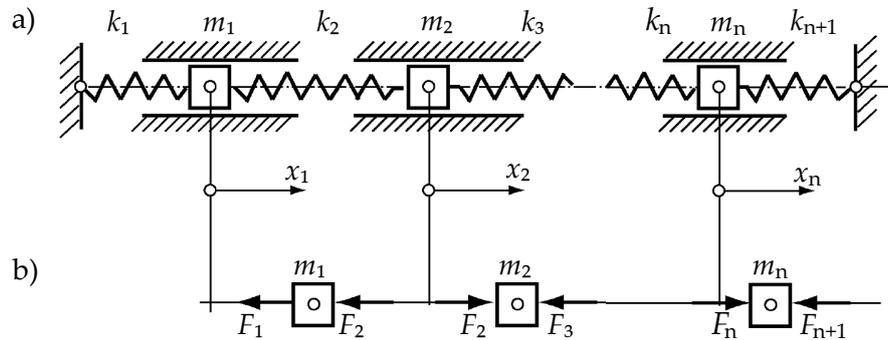


Abbildung 2.2: Schwingerkette mit n Massen und den Steifigkeiten k nach Jäger et al. (2016), wobei in a) die statische Gleichgewichtslage und in b) die freigeschnittenen Massen in ausgelenkter Lage dargestellt sind.

Die Differentialgleichungen in Matrixschreibweise mit der Massenmatrix \mathbf{M} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} lauten:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{mit :} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

Das harmonische Differentialgleichungssystem wird mit dem folgenden Ansatz mit dem Bewegungsvektor \mathbf{x} , dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{x}}$, dem Amplitudenvektor $\hat{\mathbf{x}}$ und dem Vektor der Eigenkreisfrequenzen ω_0 gelöst.

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad \text{mit :} \quad \hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T \quad (2.23)$$

Wird der Ansatz in die Matrixgleichung 2.22 integriert, resultiert die Beziehung:

$$\mathbf{M} (-\omega_0^2 \hat{\mathbf{x}} \sin(\omega_0 t)) + \mathbf{K} (\omega_0 \hat{\mathbf{x}} \sin(\omega_0 t)) = 0 \quad (2.24)$$

Dies führt zu einem linearen, homogenen Gleichungssystem.

$$(-\omega_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.25)$$

Die triviale Lösung dieses Gleichungssystems führt zu keinen Ausschlägen. Die Bedingung für eine nichttriviale Lösung besagt, dass folgende Determinante der Koeffizienten gleich null sein muss.

$$\det(-\omega_0^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.26)$$

Aus der Beziehung resultiert ein Polynom n -ten Grades, dessen Nullstellen die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ sind.

$$a_n (\omega_0^2)^n + a_{n-1} (\omega_0^2)^{n-1} + \dots + a_1 \omega_0^2 + a_0 = 0 \quad (2.27)$$

2.1.4 Mechanik der Stäbe, Federn und Balken

Im Folgenden werden die für diese Arbeit relevanten Aspekte und Gleichungen bezüglich Stäben, Federn und Balken zusammengefasst.

Ein Stab ist durch eine kleine Querschnittsabmessung im Vergleich zur Längsabmessung definiert. Der Stab kann Zug- und Druckkräfte in Richtung seiner Längsachse aufnehmen (Gross et al. 2013). Wird ein Zugstab mit einer Länge l , einer Querschnittsfläche A und einem Elastizitätsmodul E unter einer Last F betrachtet, so gilt nach Gross et al. (2014) für Längenzunahme Δl_s :

$$\Delta l_s = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \quad (2.28)$$

Ist eine Feder mit der Federsteifigkeit c gegeben, die mit einer äußeren Kraft F um die Strecke Δl_c aus ihrer Ruhelage verlängert wird, so folgt das lineare Verhältnis (Gross et al. 2013):

$$F = c \cdot \Delta l_c \quad (2.29)$$

Wird nun Δl_c durch Gleichung 2.28 ersetzt und das Ergebnis nach der Federsteifigkeit aufgelöst, so gilt für die Steifigkeit eines als Feder abstrahierten Stabes:

$$c = \frac{E \cdot A}{l} \quad (2.30)$$

Ein Balken ist im Unterschied zum Stab senkrecht zu seiner Längsachse belastet. Hierbei gelten für einen Bernoulli-Balken folgende Bedingungen (Göttsche und Petersen 2015):

- Der Balken weist einen konstanten Querschnitt sowie kleine Querschnittsabmessung im Vergleich zur Balkenlänge auf.
- Die Balkenverformungen sind klein im Vergleich zu den Abmessungen des Balkens.
- Querkräfte greifen am Schubmittelpunkt des Querschnitts an, wodurch kein Torsionsmoment um die Längsachse des Balkens erzeugt wird.
- Im unverformten Zustand ist die Balkenachse eine Gerade.
- Ebene Querschnitte bleiben bei einer Verformung des Balkens eben und senkrecht zur Längsachse.

Die Balkendifferentialgleichung eines Bernoulli-Balkens mit konstanter Biegesteifigkeit $E \cdot I$ bei einer Streckenlast q_0 lautet (Gross et al. 2014):

$$E \cdot I \cdot w^{IV} = q_0 \quad (2.31)$$

Durch vierfache Integration kann aus dieser Gleichung die Durchbiegung w an der Stelle x_b errechnet werden.

$$E \cdot I \cdot w = \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot x_b^4 + \frac{1}{6} \cdot c_1 \cdot x_b^3 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot x_b^2 + c_3 \cdot x_b + c_4 \quad (2.32)$$

Die Integrationskonstanten c_1 , c_2 , c_3 und c_4 werden aus den Randbedingungen bestimmt.

Schlussendlich kann die Durchbiegung w als proportional zu dem Produkt aus Streckenlast und der vierten Potenz der Balkenlänge l dividiert durch die Biegesteifigkeit angesehen werden.

$$w \propto \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} \quad (2.33)$$

Im Hinblick auf die Schwingungseigenschaften von Balken gilt nach Gasch et al. (2012) für die Eigenkreisfrequenz eines Balkens $\omega_{0,b}$ mit der Dichte ρ :

$$\omega_{0,b} = k_b^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A \cdot l^4}} \quad (2.34)$$

Wird dahingegen ein Timoshenko-Balken mit dem Schubmodul G betrachtet, so wird die Schubverformung berücksichtigt und die Annahme, dass ebene Querschnitte bei einer Balkenverformung senkrecht zur Längsachse bleiben, verliert ihre Gültigkeit. Nach (Gross et al. 2014) lautet die Eigenkreisfrequenz $\omega_{0,bT}$:

$$\omega_{0,bT} = k_b^2 \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{E \cdot I}{G \cdot A \cdot \kappa} \right) \left(\frac{k_b \cdot \pi \cdot i}{l} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A \cdot l^4}} \quad (2.35)$$

$$\text{mit: } \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \kappa = \frac{5}{6}$$

Hierbei bezeichnet i den Trägheitsradius. Der Schubkorrekturfaktor κ ist für einen Rechteckquerschnitt angegeben.

Der Eigenwert k_b wird in Abhängigkeit der Randbedingungen bestimmt (Tabelle 2.1).

Tabelle 2.1: Eigenwerte unterschiedlich gelagerter Balken nach Gasch et al. (2012)

System	Eigenwerte k_b für $n = 1,2,3,\dots$
einseitige Einspannung	$(n - \frac{1}{2}) \cdot \pi$
beidseitige Einspannung	$(n + \frac{1}{2}) \cdot \pi$
beidseitige gelenkige Lagerung	$n \cdot \pi$

Der Vergleich von Gleichung 2.33 und Gleichung 2.34 und die Berücksichtigung der Beziehung

$$m_b = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l \quad (2.36)$$

für die Balkenmasse m_b mit dem Volumen V zeigen folgende Beziehungen auf:

$$\omega_{0,b}^2 \propto \frac{1}{w} \quad \omega_{0,b}^2 \propto E \cdot I \quad \omega_{0,b}^2 \propto \frac{1}{m_b} \quad (2.37)$$

Das Quadrat der Eigenfrequenz ist somit proportional zur Biegesteifigkeit sowie zu den Kehrwerten von jeweils Durchbiegung und Masse.

2.2 ANALYTISCHE ABSCHÄTZUNG

Im Rahmen einer Validierungsrechnung soll die erste Eigenfrequenz der typischen Biegeschwingung eines Balkens vergleichend analytisch und numerisch berechnet werden. Als Struktur wird ein Quader herangezogen, der eine Länge von 4200 mm, eine Breite von 650 mm und eine Höhe von 525 mm aufweist. Die Maße orientieren sich an der Girderstruktur der Referenzstruktur, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird. Eine analytische Berechnung eines Hohlquaders, der am ehesten der Referenzstruktur entsprechen würde, ist nicht möglich, da die Eigenformen statt der typischen ersten Biegeschwingung ein Beulen der dünnen Wände zeigen. Aus diesem Grund wird der Quader als Vollkörper angenommen.

Als Material wird Stahl mit einem Elastizitätsmodul von $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, einem Schubmodul von $8,08 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, einer Dichte von 7850 kg m^{-3} und einer Querkontraktionszahl von 0,3 verwendet. Vereinfacht ist der Balken an beiden Enden fest eingespannt.

Ausgehend von genannten Maßen des Quaders werden Breite und Höhe schrittweise durch den Divisor d geteilt, der Werte von 1 bis 10 annimmt. So soll untersucht werden, inwiefern das Verhältnis von Breite bzw. Höhe zu Länge die Ergebnisse beeinflusst. Da die Länge des Quaders nicht viel größer als die Höhe und die Breite ist, wird der Balken für die analytische Rechnung sowohl als Bernoulli-, als auch als Timoshenko-Balken angenommen (Gleichungen 2.34 und 2.35).

Die numerische Berechnung erfolgt zunächst mit dem FEM-Programm ANSYS Workbench¹, da dieses für die Untersuchung der Referenzstruktur verwendet wird. Verwendet werden Volumenelemente. Die Elementgröße der Vernetzung liegt bei 28 mm und orientiert sich an der durchschnittlichen Elementgröße der hinreichenden Vernetzung. Letztere wird durch eine im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Gitterstudie ermittelt (siehe Abschnitt 2.3.3: Vernetzung). Anschließend wird die Struktur mit Hilfe des Löser OptiStruct berechnet, der für alle folgenden Rechnungen mit Ausnahme der Berechnung der Referenzstruktur genutzt wird. Hierbei kommen Balkenelemente zum Einsatz. Für detaillierte Informationen zu den Vernetzungseinstellungen der numerischen Rechnungen wird auf den Anhang A.1 verwiesen.

In allen Rechnungen wird als Ergebnis die ermittelte erste Eigenfrequenz notiert. Die Ergebnisse werden anschließend in Abhängigkeit von dem Divisor d dargestellt und miteinander verglichen.

¹ ANSYS Workbench 18.0, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA, USA, www.ansys.com

2.3 REFERENZSTRUKTUR

2.3.1 Abstraktion der gegebenen Referenzstruktur

Zur Untersuchung des Einflusses von Gitterstrukturen auf Eigenfrequenz und Masse am Beispiel von Magnetuntergestellen von Teilchenbeschleunigern wird zunächst die Referenzstruktur betrachtet. Eine technische Zeichnung der gegebenen Struktur ist im Anhang A.2.1 zu finden. Bei der Referenzstruktur handelt es sich um ein Magnetuntergestell des aktuellen Kreisbeschleunigers PETRA III (Abbildung 1.2), das mit dem höchsten, unsymmetrisch verteilten Gewicht belastet und somit als kritischste Struktur betrachtet wird.

Die Struktur besteht aus einem länglichen Girder, auf dem die Magnete zur Beschleunigung und Fokussierung des Teilchenstrahls sowie Komponenten zur Justierung der Magnete befestigt sind. Unter den acht Magneten befinden sich drei große Magnete mit Massen über 1000 kg. Die Befestigung dieser Magnete erfolgt mit Hilfe von auf dem Girder aufgeschweißten Töpfen (Abbildung 2.3). Die Magnete besitzen jeweils vier Füße, die in die Töpfe eingebettet werden. Die Einbettung erfolgt mit Hilfe eines Epoxidharzsystems.

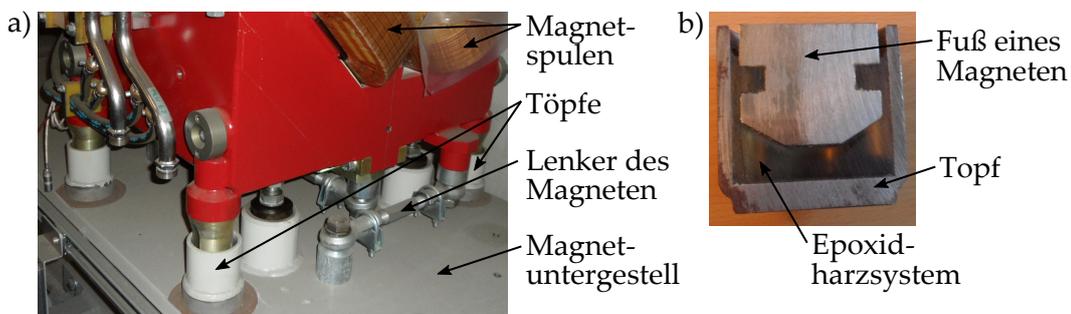


Abbildung 2.3: Die Magnete werden durch Einbettung ihrer Füße in die auf dem Girder festgeschraubten Töpfe befestigt (a). Vor der Einbettung ist eine Nachjustierung des platzierten Magneten über die Lenker möglich. In b) ist in einer Schnittansicht durch den Topf die Einbettung erkennbar.

Die an den Seitenwänden des Girders befestigten, kleineren Komponenten sind u. a. für die Elektronik notwendig und werden in den folgenden Untersuchungen unter Absprache mit dem DESY vernachlässigt. Der Girder ist an den oberen Rändern auf zwei Füßen gelagert, wobei diese Lagerung in dieser Arbeit nach Vorgabe des DESY verändert wird.

Mit Hilfe der CAD-Software SolidWorks² wird das vom DESY zur Verfügung gestellte CAD-Modell vereinfacht sowie die Auflager hinsichtlich neuer Vorgaben angepasst. Nach diesen Vorgaben wird der Girder über drei Punkte mit den Füßen verbunden. Diese Auflagerpunkte befinden sich an den Bessel-Punkten der Girderstruktur, die bei 22,3 % der linken bzw. rechten Außenfläche liegen. Dadurch soll eine möglichst geringe Durchbiegung der Struktur erreicht werden. Ein Auflagerpunkt befindet sich mittig am linken Fuß, die anderen beiden Auflagerpunkte

² SolidWorks Professionell 2017, Dassault Systèmes SolidWorks Corporation, Vélizy-Villacoublay, Frankreich, www.solidworks.com

am rechten Fuß. Die Auflagerpunkte werden als Federn abstrahiert, wodurch sie keinen Einfluss auf horizontale Bewegungen der Girderstruktur nehmen. Sowohl der Girder, als auch die Füße sind innen hohl, wobei der Girder sieben Verstärkungsrippen senkrecht zur länglichen Ausdehnung aufweist.

Auf dem Girder sind die Töpfe der drei größten Magnete, deren Massen bei 1150 kg, 1800 kg und 1150 kg liegen, befestigt.

Ein im Beschleunigungstunnel positionierter Girder soll bei Bedarf nachjustiert werden können. Das Nachjustieren erfolgt über Lenker, welche Schraubverbindungen darstellen und eine Verschiebung des bereits installierten Girders in X- und Y-Richtung ermöglichen (Aufbau der Lenker entspricht den Magnetlenkern, erkennbar in Abbildung 2.3 a). Dazu sind drei Lenker zwischen dem Girder und den Füßen angebracht: An dem rechten Fuß befinden sich ein Lenker in X-Richtung und einer in Y-Richtung sowie am linken Fuß ein Lenker in Y-Richtung. Die Lenker werden in Anlehnung an Reichelt (2014) als Federn vereinfacht. Zur Befestigung der Federn an dem Girder bzw. den Füßen werden jeweils zwei Lenkerbalken konstruiert, von denen einer an der Unterseite des Girders und der andere an der Oberseite der Füße befestigt ist. Diese Lenkerbalken stellen Zylinder mit einem Durchmesser von 30 mm sowie einer Höhe von 15 mm dar.

2.3.2 Ermittlung der Federsteifigkeiten

Die Federsteifigkeiten der Auflager- und Lenkerfedern werden numerisch ermittelt sowie die Ergebnisse mit analytischen Rechnungen bestätigt.

Die Auflagerfedern repräsentieren vereinfacht Zylinder mit einer Länge und einem Durchmesser von jeweils 30 mm. So werden ihre Steifigkeiten entsprechend der Steifigkeit eines Zylinders gleicher Maße definiert. Die Berechnung der Zylindersteifigkeit erfolgt mit Hilfe der FEM-Software ANSYS Workbench. Der im Designmodellierer von ANSYS konstruierte Zylinder wird mit einer frei definierten Flächenlast von 100.000 N belastet und die gegenüberliegende Fläche fest eingespannt. Ausgelesen wird die maximale Verformung Δl_z des Zylinders. In Anlehnung an Gleichung 2.29 wird aus der ermittelten Verformung die Zylindersteifigkeit errechnet.

Die Lenker des Girders lassen sich ebenfalls als Zylinder mit einem Durchmesser von 30 mm sowie eine Länge von 200 mm abstrahieren. Die Ermittlung der Federsteifigkeit erfolgt analog zur numerischen Berechnung der Steifigkeit der Auflagerfedern.

Mit Hilfe der Gleichung 2.30 und einem E-Modul von $210.000 \text{ N mm}^{-2}$ (Stahl) lassen sich die Steifigkeiten analytisch ermitteln, um so die numerische Rechnung zu validieren.

Die numerisch errechneten Steifigkeiten werden den Federn des Referenzmodells sowie aller folgender Rechnungen zugeordnet. Detaillierte Informationen zu dem Modellaufbau und der Vernetzung sind dem Anhang A.2.4 zu entnehmen.

2.3.3 Numerische Berechnung der Referenzstruktur

Die numerische Berechnung der Eigenfrequenzen des Referenzmodells erfolgt analog zu der numerischen Ermittlung der Federsteifigkeiten mit der Simulationssoftware ANSYS Workbench.

Vernetzung

Die Vernetzung des Modells erfolgt in Abhängigkeit von der Geometrie. Mit Hilfe einer manuellen Gitterstudie wird eine hinreichende Vernetzung ermittelt, bei der die Ergebnisse ausgelesen werden. Dabei wird die Vernetzung manuell verfeinert, so dass die betrachteten Modelle die in Tabelle 2.2 aufgelisteten Eigenschaften besitzen.

Tabelle 2.2: Eigenschaften der einzelnen Vernetzungen der manuellen Gitterstudie für die Referenzstruktur

Stufe	Anzahl an Knoten	Anzahl an Elementen
1	36.393	18.350
2	123.276	72.174
3	446.798	255.655
4	761.746	465.270
5	989.520	618.054
6	2.496.915	1.588.629

Es wird jeweils die maximale Verformung der Struktur ausgelesen. In Anlehnung an Pegg et al. (2013) wird eine Vernetzung als hinreichend aufgefasst, sobald das betrachtete Ergebnis sich in den folgenden drei Vernetzungsstufen lediglich um maximal 5 % ändert. Die als hinreichend aufgefasste Vernetzung bildet die Grundlage für die numerische Berechnung der Referenzstruktur, für die im Folgenden die Materialeigenschaften und Randbedingungen erläutert werden.

Materialeigenschaften und Randbedingungen

In Anlehnung an die Forderungen vom DESY wird dem gesamten Modell das Material Stahl mit einem Elastizitätsmodul von $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, einer Dichte von 7850 kg m^{-3} sowie einer Querkontraktionszahl von 0,3 zugeordnet. Die Magnete werden als Punktlasten auf die Oberflächen der Töpfe definiert, wobei die Masse jedes Magneten gleichmäßig auf die vier Töpfe verteilt wird. Zur vereinfachten Darstellung der Befestigung der Füße an einer einbetonierten Platte wird die untere Fläche der Füße eingespannt. Wie bereits beschrieben stützen drei Federn in Z-Richtung (Auflager), zwei Federn in Y-Richtung sowie eine Feder in X-Richtung (drei Lenker) die Girderstruktur. Als Federsteifigkeiten werden die im vorherigen Abschnitt 2.3.2 ermittelten Werte definiert.

In einer linear-statischen Berechnung wird die Verformung der Struktur aufgrund der Erdanziehung berechnet. Die anschließende Modalanalyse zeigt die Eigenformen sowie Eigenfrequenzen der Gesamtstruktur auf.

2.4 GITTERSTRUKTUREN

Vier verschiedene Gitter sollen im Folgenden den balkenförmigen Girder ersetzen sowie hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen, Massen und Steifigkeiten miteinander verglichen werden. Für die Gitterkonstruktionen wird die CAD-Software Rhinoceros³ herangezogen. Diese Software ist ein Direktmodellierer, der im Gegensatz zu Feature-basierten Modellierern nicht die Entstehungsgeschichte, sondern die Punkte, Kurven und Flächen eines Modells und deren Konnektivität speichert. Für die Generierung variabler, parametrischer Konstruktionen auf Grundlage von Algorithmen wird das Zusatzmodul Grasshopper⁴ verwendet. Gleichzeitig kommt das FEM-Zusatzmodul Karamba⁵ innerhalb der Grasshopper-Umgebung zum Einsatz. Aufgrund der Registrierung fehlerhafter FEM-Ergebnisse für die Eigenfrequenzen werden die FEM-Inputdateien aus Grasshopper exportiert und über eine Schnittstelle mit dem Löser OptiStruct gelöst, bevor sie anschließend erneut importiert werden. Hierbei ist eine Verwendung von Balken- und Schalenelementen möglich. Neben dem Modul Grasshopper sind zur Generierung der parametrischen Strukturkomponenten aus dem in der Arbeitsgruppe „Bionischer Leichtbau“ entwickelten Zusatzmodul ELiSE innerhalb der Grasshopper-Umgebung notwendig. Im Anhang A.3.4 ist eine Liste der genutzten Komponenten des ELiSE-Zusatzmoduls innerhalb der Grasshopper-Umgebung aufgeführt. Detaillierte Informationen zu den Komponenten und verwendeten Algorithmen dieses Zusatzmoduls sind bei Bomke und Naguschewski (2015) und Naguschewski (2016) zu finden.

2.4.1 Parametrische Konstruktion der Gitter

Alle Gitter werden innerhalb eines fest definierten, quaderförmigen Designraums erstellt. Genauso wie die im Rahmen der Validierungsrechnung betrachtete Struktur orientiert sich der Designraum an der Girderausdehnung der Referenzstruktur. So besitzt er eine Länge von 4200 mm, eine Breite von 650 mm und eine Höhe von 525 mm. Für eine detaillierte Ansicht des Designraums inklusive Maße wird auf den Anhang A.3.3 verwiesen. Um den Vergleich der unterschiedlichen Gitter untereinander sowie mit den Ergebnissen der noch folgenden Strukturen zu gewährleisten, werden die Positionen der aufliegenden Magnete und der Federn in X-, Y- und Z-Richtung, welche die Lenker und Auflager darstellen, konstant gehalten (Fixpunkte, siehe Abbildung 2.4).

Die unterhalb des Girders positionierten Füße werden als quaderförmige Hohlkörper dargestellt. Hierbei entsprechen die Maße von 430 mm Länge, 955 mm Breite und 345 mm Höhe dem Umriss der Referenzstruktur-Füße. Entsprechend des Referenzmodells werden die Füße so positioniert, dass sich ihre vordere Außenfläche 188 mm vor der vorderen Außenfläche des Designraums befindet (vgl. Abbildung im Anhang A.3.3). Gleichzeitig weisen sie einen Innenabstand von 1770 mm voneinander auf und liegen mittig unterhalb des Girders. Zum Erreichen einer höheren

³ Rhinoceros 5.0, Robert McNeel & Associates, Seattle, WA, USA, www.rhino3d.com

⁴ Grasshopper 0.9.0076, Robert McNeel & Associates, Seattle, WA, USA, www.grasshopper3d.com

⁵ Karamba 1.1.0, Clemens Preisinger in Zusammenarbeit mit Bollinger-Grohmann-Schneider ZT GmbH (Preisinger 2013), Wien, Österreich, www.karamba3d.com

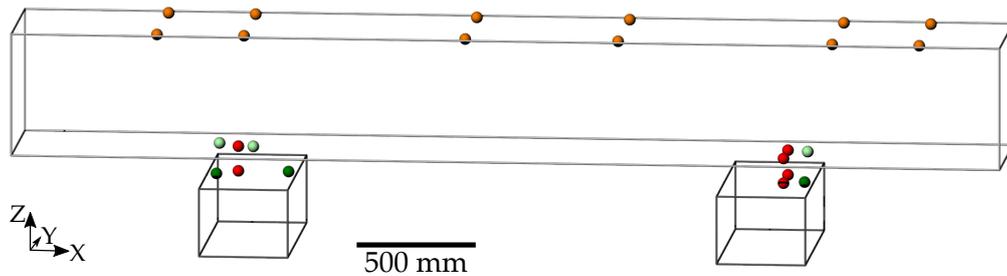


Abbildung 2.4: Positionen der Fixpunkte für alle Strukturen. Für eine bessere Darstellung ist der Abstand zwischen dem Designraum und den Füßen vergrößert dargestellt. Die oberen, orangenen Punkte verdeutlichen die Magnettöpfe. In rot sind die Punkte der Designraumunterseite und Fußoberseite dargestellt, zwischen denen die Federn in Z-Richtung (Auflager) definiert sind. An den hellgrünen Punkten der Designraumunterseite und den dunkelgrünen Punkten der Fußoberseite sind Lenkerbalken befestigt, zwischen denen die Federn in X- und Y-Richtung (Lenker) definiert werden.

Eigenfrequenz der Gesamtstruktur werden die Füße mit inneren Rippen versehen. Die Erhöhung der Eigenfrequenz durch Rippen erfolgt in Anlehnung an Nalluri und Dhekane (2014), die verschiedene Würfelkonfigurationen modellierten und ihre Eigenfrequenzen ermittelten. So führt der Einsatz von Rippen, die die gesamte Struktur durchziehen, zu einer höheren Eigenfrequenz bei lediglich geringer Massezunahme. Da es sich bei den Füßen um Quader handelt, werden sowohl Diagonalrippen, als auch Rippen parallel zu den Außenflächen konstruiert. Die beiden möglichen Varianten für die Füße sind in [Abbildung 2.5](#) dargestellt und bestehen aus zwei bzw. fünf Rippen.

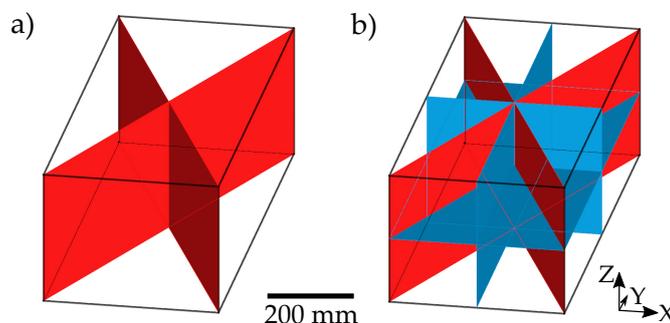


Abbildung 2.5: Mögliche Diagonal- (rot) und Quer- bzw. Längsrippen (blau) der Girderfüße: a) zwei Rippen, b) fünf Rippen.

In den folgenden Abschnitten wird die Konstruktion der unregelmäßigen und regelmäßigen Gitter innerhalb des Designraums erläutert.

Unregelmäßige Gitter: 3D-Voronoi und Verbindung von Nachbarn

Grundlage für das unregelmäßige Gitter bildet eine Verteilung von Punkten. Diese inhomogene Punkteverteilung funktioniert nach einem Algorithmus von Bomke und Naguschewski (2015), welcher die Punkte anhand einer Dichteverteilung in einem dreidimensionalen Körper verteilt. Die Vorgabe einer anfänglichen, regelmäßigen Verteilung von 24 Punkten ist hierbei notwendig. Anschließend wird ein globaler Dichtewert definiert, welcher den durchschnittlichen Abstand von benach-

barten Punkten darstellt. Mit Hilfe von Attraktoren, welche Punkte, Kurven, Flächen oder Volumenkörper darstellen können, lässt sich das Dichtefeld lokal beeinflussen (Abbildung 2.6). So gilt in einem fest definierten Radius um einen Attraktor ein lokal definierter Attraktorwert für den Abstand benachbarter Punkte. Des Weiteren ist die Festlegung eines Abklingfaktors für den Attraktor notwendig, der den linearen Übergang vom lokalen Dichtewert zum globalen Dichtewert beschreibt. Dieser wird in allen folgenden Rechnungen auf 2,0 festgelegt. Dies bedeutet, dass der Wert für den in Abbildung 2.6 d dargestellten Punkt b dem zweifachen Radius entspricht. Detailliertere Erläuterungen zur Dateninterpolation und Dichteverteilung sind bei Naguschewski (2016) zu finden.

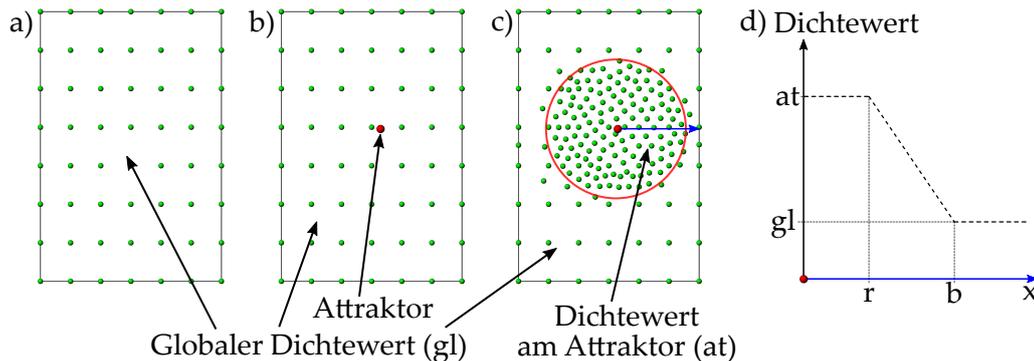


Abbildung 2.6: Beeinflussung einer Punkteverteilung durch Attraktoren. In a) sind Punkte gleichmäßig nach einem definierten, globalen Dichtewert verteilt. Die Festlegung des in b) erkennbaren Attraktors (rot) erlaubt die Verteilung von Punkten in einem Abstand r vom Attraktor mit einem veränderten Dichtewert. Dieser Dichtewert gilt lediglich am Attraktor und ist in diesem Beispiel höher als der globale Dichtewert. In d) ist schematisch dargestellt, wie der Dichtewert im Abstand r vom Attraktor bis zu einem Abstand b , definiert mit Hilfe eines Abklingfaktors, linear in den globalen Wert übergeht.

Für die hier konstruierten, unregelmäßigen Gitter sind die Anbindungspunkte der Magnete und die Auflagerpunkte als Attraktoren herangezogen (orange und rote Punkte in Abbildung 2.4). Die Grundlage der unregelmäßigen Gitter stellen zum einen Voronoi-Waben, zum anderen Verbindungen benachbarter Punkte dar.

3D-Voronoi: 3D-Voronoiwaben lassen sich aus einer gegebenen Punkteverteilung in einem Raum generieren (Abbildung 2.7 a - c). Jeder Punkt der Verteilung ist Mittelpunkt einer Wabe, wodurch der Raum in konvexe Polyeder, die Voronoi-Waben, aufgeteilt wird. Die Kanten einer Voronoi-Wabe ergeben sich aus den Schnittkanten von Flächen, die mittig zwischen den gegebenen Punkten gebildet werden. Dadurch ist jeder Punkt innerhalb einer Voronoi-Wabe näher zu dem gegebenen Mittelpunkt dieser Wabe, als zu jedem anderen Punkt der gegebenen Punkteverteilung. Für die gegebene Punkteverteilung sind die resultierenden Voronoi-Waben einzigartig und es gibt keinen leeren Raum zwischen Zellen (Dupuis et al. 2005; Ying et al. 2015). Die Kanten der Voronoi-Waben bilden das unregelmäßige Gitter.

Die Punkte der generierten Punkteverteilung stellen Mittelpunkte der Voronoi-Waben dar. Um zu garantieren, dass die bereits genannten Fixpunkte Schnittpunkte von Voronoi-Waben und somit Knoten des resultierenden Gitters sind, wird die Punkteverteilung in einem weiteren Schritt beeinflusst: Um jeden Fixpunkt wer-

den in gleichem Abstand vier Punkte konstruiert, die alle den gleichen Abstand voneinander besitzen. Die generierten Punkte werden zur vorhandenen Punkteverteilung hinzugefügt. Weiter werden alle Punkte in unmittelbarem Umkreis um die Fixpunkte aus der Punkteverteilung entfernt. Durch dieses Vorgehen wird der Algorithmus gezwungen, die Voronoi-Waben so zu erstellen, dass die Fixpunkte Schnittpunkte der Waben darstellen und somit feste Gitterpunkte sind.

Verbindung benachbarter Punkte: Zur Generierung des Gitters auf Grundlage der erstellten Punkteverteilung kommt ein Algorithmus nach Naguschewski (2016) zum Einsatz, welcher nach bestimmten Kriterien einen Punkt mit einer festgelegten Anzahl an benachbarten Punkten verbindet (Abbildung 2.7 d - f). Hierbei wird ein Winkeltoleranzwert von 30° definiert. Liegen demnach zwei Nachbarn eines Punktes innerhalb eines Winkels kleiner als 30° , so wird der Nachbar mit dem größeren Abstand verworfen. Daraus resultiert, dass in z. B. Abbildung 2.7 f nicht jeder Punkt mit sieben Nachbarn verbunden ist.

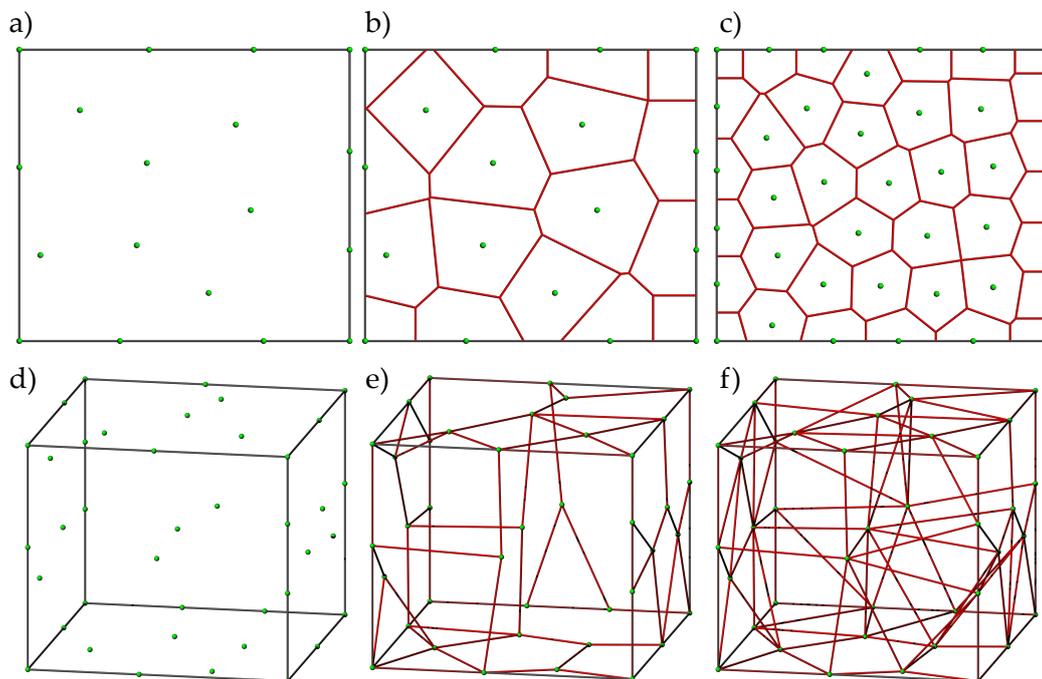


Abbildung 2.7: Bildung unregelmäßiger Gitter unter Verwendung von Voronoi-Waben (a - c) und der Verbindung benachbarter Punkte (d - f). Aus der in a) dargestellten Punkteverteilung bilden sich die in b) erkennbaren 2D-Voronoi-Waben. Bei einer feineren Punkteverteilung entstehen kleinere Waben (c). Liegt eine Punkteverteilung in einem Raum vor (d) und es erfolgt eine Verbindung jedes Punktes mit den nächsten drei Punkten, so resultiert das in e) erkennbare Gitter. Wird jeder Punkt mit sieben Nachbarn verbunden, ergibt sich das in f) dargestellte Netz.

Regelmäßige Gitter: Rechteckig und Hexagonal

Für die regelmäßigen Gitter ist keine Komponente zur Punkteverteilung notwendig. Vielmehr entstehen die Gitter durch Vervielfältigung einer festgelegten rechteckigen bzw. hexagonalen Gitterzelle (Abbildung 2.8). Damit keine unvollständigen Zellen

auftreten, wird die Ausdehnung des Designraums in die jeweilige Koordinatenrichtung durch die Anzahl an gewünschten Zellen in dieser Richtung dividiert. Im nächsten Schritt erfolgt eine Beeinflussung des rechteckigen und hexagonalen Gitters derart, dass die definierten Fixpunkte Teil des Gitters werden. Mit Hilfe eines Algorithmus werden die Gitterlinien, die den Fixpunkten am nächsten sind, mit den jeweiligen Fixpunkten verbunden, wobei die Konnektivität des Gitters beibehalten wird. Dieses Vorgehen führt zu einer lokalen Unregelmäßigkeit im ansonsten regelmäßigen Gitter, ist aber für einen Vergleich aller Gitterstrukturen untereinander unvermeidbar.

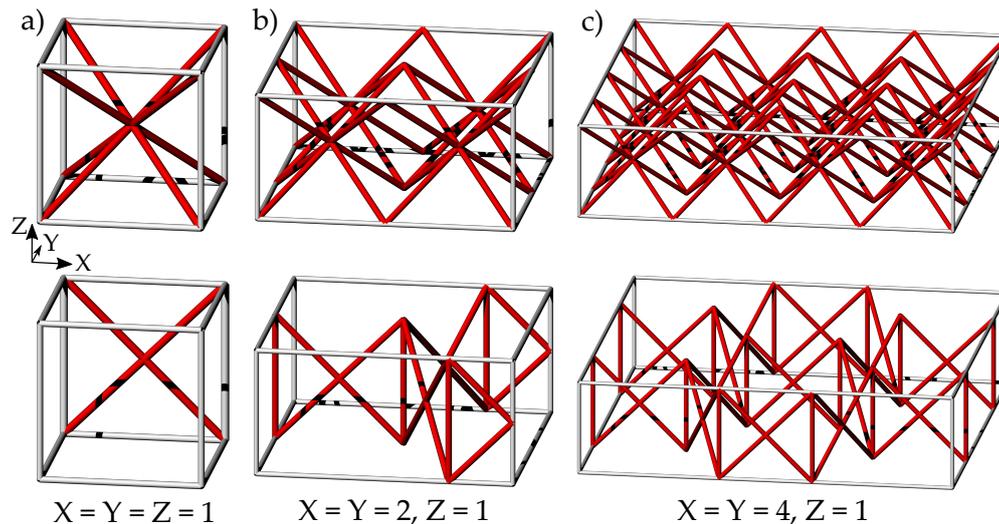


Abbildung 2.8: Gitterzellen regelmäßiger rechteckiger (*oben*) und hexagonaler (*unten*) Gitterzellen. Dargestellt sind jeweils eine (a), vier (b) und 16 (c) Gitterzellen sowie die Anzahl an Zellen in jede Koordinatenrichtung.

Alle generierten regelmäßigen und unregelmäßigen Gitter werden anschließend von doppelten, sehr kurzen oder frei endenden Linien bereinigt.

2.4.2 Numerische Berechnung der Gitter

Die parametrische Konstruktion erlaubt die Generierung verschiedenster Varianten der einzelnen Gitter. Eine Kombination aller Parameterwerte miteinander würde jedoch zu einer sehr großen Anzahl an Gittervarianten und ebenso vielen Rechnungen führen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht zu bewältigen wären. Aus diesem Grund wird eine multikriterielle Optimierung auf Grundlage der Evolutionsstrategie durchgeführt.

Modellaufbau

Alle Modelle werden unabhängig von dem jeweiligen Gitter gleich aufgebaut. Die Gitterlinien stellen Balkenelemente mit einem runden Vollquerschnitt dar. Analog zur lokalen Beeinflussung der Punkteverteilung lassen sich auch die Balkenquerschnitte in Abhängigkeit von Attraktoren lokal verändern. Die Anbindungspunkte der Magnete und die Auflagerpunkte (vgl. orange und rote Punkte in Abbildung 2.4)

stellen hier ebenfalls die Attraktoren für die Querschnitte dar und der Abklingfaktor für den Attraktor liegt auch bei 2,0.

Für die Berechnung des Modells mit dem Löser OptiStruct wird der Modellaufbau exportiert und mit dem Löser berechnet. Zur Analyse der Ergebnisse werden diese anschließend erneut importiert.

Vernetzung

Für die Balkenelemente ist die Feinheit der Vernetzung weniger bedeutend, da sie eine exakte Lösung entsprechen der Timoshenko-Balkentheorie liefern. Dahingegen muss für die Schalenelemente eine hinreichende Vernetzung gefunden werden. Hierzu wird das Gitter durch den Designraum als Hohlquader ersetzt, dessen Vernetzung ebenfalls die Fixpunkte als festgelegte Knoten beinhaltet. Für die Füße sind ebenfalls die Anbindungspunkte für die Federn in X-, Y- und Z-Richtung als Knoten festgelegt. Entsprechend dem Referenzmodell beträgt die Wanddicke der Füße 30 mm, während für die Wanddicke des Designraums ein Wert von 10 mm festgelegt wird.

Im Rahmen der Gitterstudie wird die Elementgröße beginnend bei durchschnittlich 120 mm für den Designraum und 100 mm für die Füße um jeweils 10 mm schrittweise verfeinert, bis in Anlehnung an Pegg et al. (2013) mit einer Abweichung des Ergebnisses um maximal 5 % von den Ergebnissen der nächsten drei Vernetzungsebenen eine hinreichende Vernetzung erreicht werden kann. Dabei ergeben sich die in Tabelle 2.3 aufgeführten Vernetzungseinstellungen. Es wird jeweils die maximale Verformung der Struktur ausgelesen. Die Vernetzungseinstellungen der hinreichenden Vernetzung bilden die Grundlage für die folgenden Rechnungen mit den im nächsten Abschnitt erläuterten Materialeigenschaften und Randbedingungen.

Tabelle 2.3: Eigenschaften der einzelnen Vernetzungen der manuellen Gitterstudie für die Gitterstrukturen

Stufe	Anzahl an Knoten	Anzahl an Elementen
1	1.044	1.210
2	1.710	1.921
3	2.036	2.271
4	2.741	3.021
5	3.699	4.042
6	5.560	5.952
7	8.550	9.113
8	17.107	17.942

Materialeigenschaften und Randbedingungen

Als Material ist in Anlehnung an das Referenzmodell Stahl mit einem Elastizitätsmodul von $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, einer Dichte von 7850 kg m^{-3} sowie einer Querkontraktionszahl von 0,3 definiert. Die Randbedingungen inklusive der Federsteifigkeiten entsprechen ebenfalls den Einstellungen des Referenzmodells.

Einstellungen der Optimierung

Zur Ermittlung optimaler Strukturen wird mit Hilfe des in der Grasshopper-Umgebung vorhandenen Optimierers Octopus eine multikriterielle Optimierung auf Grundlage der Evolutionsstrategie durchgeführt. Das Vorgehen ist in Abbildung 2.9 dargestellt.

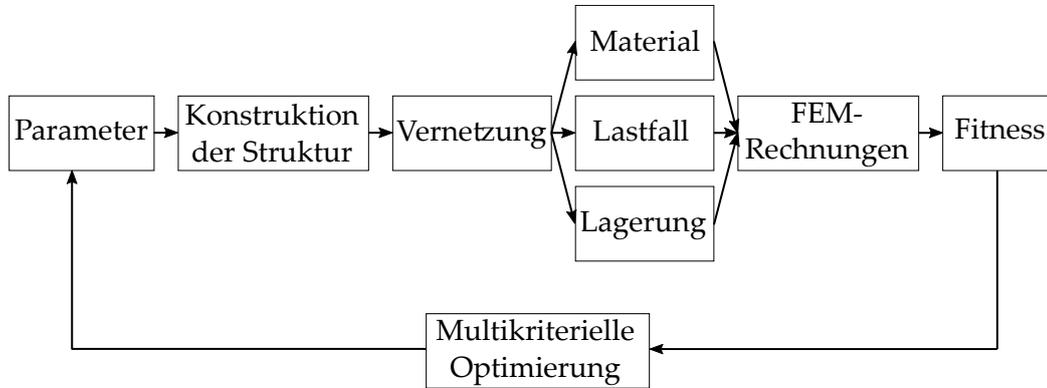


Abbildung 2.9: Ablauf der multikriteriellen Optimierung

Es sollen gleichzeitig die 1. Eigenfrequenz maximiert und die Masse und maximale Verformung minimiert werden. Alle Optimierungsziele werden als Minimierungen formuliert und bilden zu gleichen Anteilen die Fitness:

- Minimierung der negativen 1. Eigenfrequenz
- Minimierung der Gesamtmasse
- Minimierung der maximalen Verformung

Die multikriterielle Optimierung funktioniert unter Verwendung der Evolutionsstrategie, deren für diese Arbeit festgelegter Ablauf in Abbildung 2.10 verdeutlicht wird. Hierbei werden eine Populationsgröße von 50 Individuen und eine Anzahl von 50 Generationen definiert, um bei der hohen Anzahl von bis zu zehn Parametern gute Ergebnisse zu ermöglichen. So wird der dargestellte Ablauf für jede der vier Gitterstrukturen 50-mal durchlaufen.

Dem Genpool ordnet der verwendete Optimierer Octopus eine doppelt so hohe Anzahl an Individuen zu wie die Population Individuen aufweist. Die Population der für die Paarung selektierten Eltern setzt sich zur Hälfte aus den Individuen mit der höchsten Fitness („Elite“) sowie zur anderen Hälfte aus zufällig gewählten Individuen aus dem Genpool zusammen. Durch diesen Elitismus von 50 % wird zum einen die Optimierung verbessert (Laumanns et al. 2001), zum anderen aber auch keine lokale Optimierung durchgeführt. Letzteres ist von großer Bedeutung, da eine Vielzahl unterschiedlicher Optima innerhalb der Fitnesslandschaft zu vermuten ist. In Anlehnung an Laumanns et al. (2001) wird ein Elitismus von 50 % mit einer Mutationsrate von ebenfalls 50 % kombiniert, um ein gutes Ergebnis zu erhalten. Neben der Mutation führt die hohe Rekombinationsrate zu einer hohen Variabilität unter den Individuen, die ebenfalls das Erreichen bestmöglicher Ergebnisse begünstigt.

Für Erläuterungen biologischen Fachtermini und deren Bedeutung für die hier behandelte Thematik wird auf den Anhang A.3.1 verwiesen.

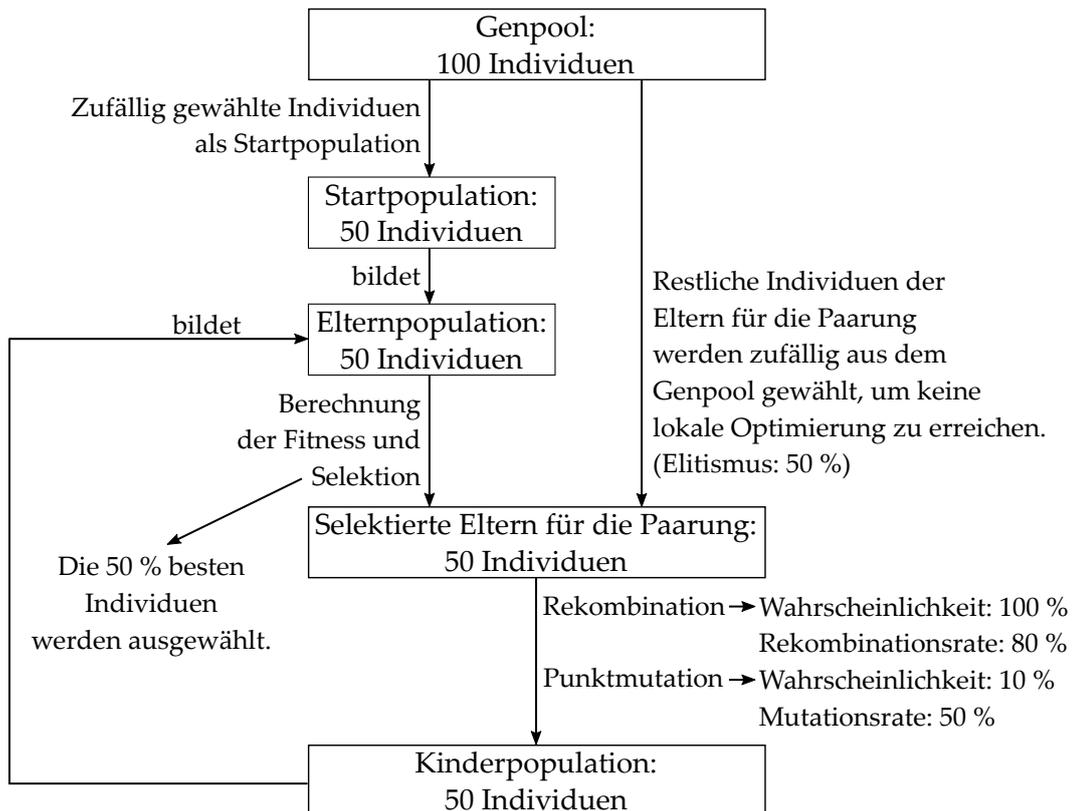


Abbildung 2.10: Definierter Ablauf der Evolutionsstrategie

In Abhängigkeit von der jeweiligen Gitterstruktur lassen sich Parameter auswählen, welche einen großen Einfluss auf die Struktur besitzen und im Rahmen der Optimierung variiert werden. In Tabelle 2.4 sind diese Parameter übersichtlich dargestellt, wobei sich jedoch unter den Parametern noch einzelne Unterparameter verbergen. So wird die Dichte der Punkteverteilung beispielsweise durch drei verschiedene Parameter definiert. An dieser Stelle sei auf die detaillierten Angaben über die Parameter sowie die Wertebereiche, in denen die Parameter definiert sind, im Anhang A.3.5 verwiesen. Insgesamt ergeben sich für jede Gitterstruktur neun bzw. zehn Parameter.

Tabelle 2.4: Übersicht über die Parameter der Gitterstrukturen. Mit * gekennzeichnete Parameter setzen sich aus jeweils drei Unterparametern zusammen.

Unregelmäßige Gitter	Regelmäßige Gitter
<ul style="list-style-type: none"> • Dichte der Punkteverteilung* • Gitterstrebendurchmesser* • Wanddicke der Füße • Versteifungsrippen der Füße • Durchmesser der Lenkerbalken • Anzahl an benachbarten Punkten 	<ul style="list-style-type: none"> • Anzahl an Zellen* • Gitterstrebendurchmesser* • Wanddicke der Füße • Versteifungsrippen der Füße • Durchmesser der Lenkerbalken

Auswertung der Ergebnisse

Im Laufe der Optimierung ist durch die Evolutionsstrategie eine „Verbesserung“ der Strukturen in Richtung des definierten Ziels zu erwarten. Aus diesem Grund wird für die Auswertung die Pareto-Front der letzten Generation herangezogen.

Vom DESY wird eine Girdermasse inklusive der Magnete von maximal 7,5 t zugelassen. Durch ein Anwenden dieser Bedingung auf die Strukturen der Pareto-Front werden die Strukturen gefiltert. Unter den gefilterten Strukturen wiederum wird die Struktur mit der höchsten ersten Eigenfrequenz als bestmögliche Struktur unter den gegebenen Bedingungen angesehen. Dargestellt wird für jede Gitterstruktur der Kehrwert der maximalen Verformung (= Steifigkeit) in Abhängigkeit von dem Produkt aus dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz und der Masse, um den in Gleichung 2.21 erkennbaren, linearen Zusammenhang abzubilden.

2.5 TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

Mit Hilfe von Topologieoptimierungen soll der Girder hinsichtlich einer maximalen Steifigkeit und einer maximalen ersten Eigenfrequenz untersucht werden. Die Rechnungen werden mit der Software HyperWorks⁶ und dem Löser OptiStruct durchgeführt. Dabei werden die Modalanalysen aufgrund von Softwarefehlern mit der Version 14.0 und die linear-statischen Rechnungen mit der Version 2017 gerechnet. Die Erstellung des Modells erfolgt in HyperMesh. Im Anschluss an die Rechnungen mit dem Löser OptiStruct werden die Ergebnisse in HyperView betrachtet und ausgewertet. Der einleitend aufgeführte Benachteiligungsfaktor p (siehe Gleichung 1.1) liegt bei OptiStruct für ein Modell aus überwiegend 3D-Elementen bei $p = 2.0$ (Altair HyperWorks, Inc. 2009).

Modellaufbau

Das Modell (siehe Abbildung 2.11) ist analog zu dem Designraum der parametrischen Gitterstrukturen aufgebaut. Der Designraum stellt hierbei einen Vollkörper sowie die Füße quaderförmige Hohlkörper mit einer Wandstärke von 30 mm dar. Auf dem Designraum befinden sich an den entsprechenden Stellen die Töpfe der Magnete, die vereinfacht als quaderförmige Strukturen aufgefasst werden. An der Unterseite des Designraums sowie auf der Oberseite der Füße sind in Analogie an das Referenzmodell Lenkerbalken positioniert, an denen die Federn in X-, und Y-Richtung definiert werden. Die Federn in X-, Y- und Z-Richtung, die die Lenker und Auflager darstellen, werden entsprechend ihrer Lokalisierung in dem Referenzmodell manuell eingefügt.

Vernetzung

Die Oberflächen des Designraums, der Töpfe und der Füße werden durch eine gleichmäßige Flächenvernetzung mit Elementkantenlänge von durchschnittlich 13 mm ersetzt. Diese feine und gleichmäßige Vernetzung erlaubt ein Ausbilden von dünnen Gitterstreben bei der Optimierung, da jede Strukturkomponente für eine genaue Berechnung der Verschiebung mindestens drei Elemente über ihre Dicke

⁶ Altair HyperWorks 14.0 und 2017, Altair Engineering Inc., Troy, Michigan, USA, www.altairhyperworks.com

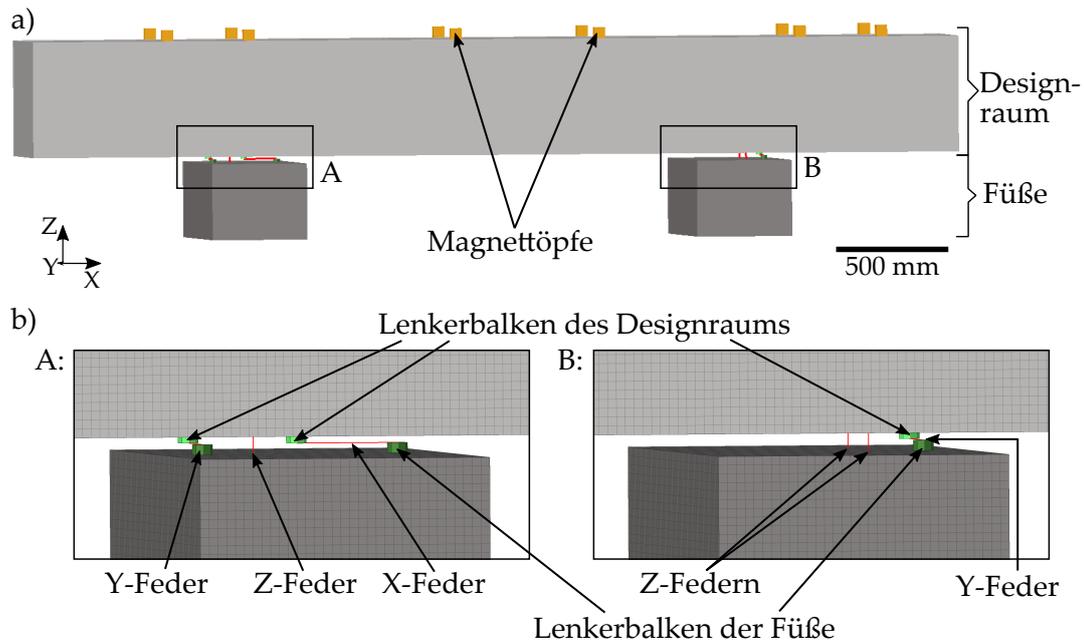


Abbildung 2.11: Der Modellaufbau für die Topologieoptimierungen besteht aus dem Designraum (hellgrau) und den Füßen (dunkelgrau), die über Federn (rot) miteinander verbunden sind (a). Die Detailansichten in (b) zeigen die zwischen Lenkerbalken definierten Federn (rot). Die Lenkerbalken sind am Girder (hellgrün) bzw. an den Füßen (dunkelgrün) befestigt. Gleichzeitig ist die gleichmäßige, feine Vernetzung erkennbar.

aufweisen muss (Brackett et al. 2011). Bei der 2D-Vernetzung werden Viereckselemente bevorzugt, jedoch sind aufgrund der Geometrie einige Dreieckselemente notwendig. Anschließend erfolgt eine 3D-Vernetzung mit Pyramiden- und Tetraederelementen. Die Eigenschaften der Vernetzung sind Tabelle 2.5 zu entnehmen. Aufgrund der bereits sehr fein aufgelösten Vernetzung (siehe Abbildung 2.11 b) wird von einer Gitterstudie abgesehen.

Tabelle 2.5: Vernetzungseigenschaften der Topologieoptimierungen mit den Zielen einer maximalen Steifigkeit und einer maximalen ersten Eigenfrequenz

		Max. Steifigkeit	Max. Eigenfrequenz
Knoten		401.248	401.248
Elemente	CONM2 (Masse)	-	300
	CBUSH (Feder)	6	6
	CPYRA (Pyramide)	101.099	101.099
	CTETRA (Tetraeder)	1.844.246	1.844.246
	Summe	1.945.351	1.945.651
Freiheitsgrade		5.836.041	5.836.941

Materialeigenschaften und Randbedingungen

Das Material Stahl mit einem Elastizitätsmodul von $2,1 \cdot 10^{11} \text{ N mm}^{-2}$, einer Dichte von 7850 kg m^{-3} sowie einer Querkontraktionszahl von 0,3 wird den Modellen zugeordnet. Die Randbedingungen, welche die Einspannungen der unteren Knoten der Füße und die errechneten Steifigkeiten für die Federn beinhalten, entsprechen ebenfalls den Einstellungen des Referenzmodells.

Auswertung

Im Anschluss an die Rechnungen wird das Ergebnis der letzten Iteration betrachtet. Unter Verwendung der Glättungsfunktion OSSmooth von OptiStruct wird das Optimierungsergebnis in ein 3D-Modell überführt. Nach einer manuellen Ausbesserung von möglichen Fehlern (z. B. nicht vollständig geschlossenes Modell, verzerrte Elemente) ergeben sich vernetzte 3D-Modelle, deren Eigenschaften den Tabellen im Anhang [A.4.1.1](#) zu entnehmen sind. Die jeweilige Durchführung einer Modalanalyse und einer linear-statischen Berechnung ermöglichen die Ermittlung von Eigenfrequenz- und Verformungswerten, die sich mit den Gitterstrukturergebnissen vergleichen lassen.

Die im Rahmen der Topologieoptimierung gewählten Eigenschaften sind von dem Ziel der Optimierung abhängig.

2.5.1 Maximale Steifigkeit

Für die Ermittlung der maximalen Steifigkeit wird eine linear-statische Optimierung durchgeführt. Die aufliegenden Magnete werden als angreifende Kraft, die sich aus dem Produkt aus Masse und Erdbeschleunigung ergibt, herangezogen. Die Kraft wird auf die einzelnen Knoten der Töpfe aufgeteilt. Auf das gesamte Modell wirkt die Erdanziehung. Zum Erreichen einer maximalen Steifigkeit wird eine minimale Nachgiebigkeit als Ziel definiert. Das Volumen der Ergebnisstruktur soll 10% des Ausgangsvolumens besitzen. Weiter wird bei den Einstellungen der Designvariablen festgelegt, dass Gitterstreben mit 150 mm bis 300 mm Dicke generiert werden sollen. Durch diese Einstellung sowie das geringe Zielvolumen ist eine eindeutige Abbildung der Lastpfade zu erwarten.

2.5.2 Maximale Eigenfrequenz

Die Magnete werden in Analogie zu dem Referenzmodell als Punktmassen hinzugefügt, die an den obersten Knoten der Töpfe definiert werden. Das Ziel ist die Maximierung der ersten Eigenfrequenz. Auch hier wird festgelegt, dass die Dichte der Ergebnisstruktur lediglich nur 10% der Ausgangsdichte besitzen soll. Die Designvariable wird ebenfalls mit dem Ziel, Gitterstreben von 150 mm bis 300 mm Dicke zu generieren, versehen.

2.6 STRUKTUREN NACH VORBILD DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

Die Ergebnisse der Topologieoptimierungen verdeutlichen, welche Strukturelemente für eine hohe Steifigkeit bzw. eine hohe Eigenfrequenz von großer Bedeutung sind. Aus diesen Resultaten lassen sich parametrische Konstruktionen innerhalb des Designraums ableiten. Unter Verwendung der bereits eingesetzten multikriteriellen Optimierung mit der Evolutionsstrategie sollen innerhalb der abgeleiteten Strukturen die bestmöglichen Konfigurationen gefunden werden.

2.6.1 *Parametrische Konstruktion*

Die den Topologieoptimierungen entnommenen Versteifungsstreben und –rippen zum Erreichen höherer Steifigkeiten oder Eigenfrequenzen werden in den Designraum konstruiert. Letzterer wird hierbei analog zu der bereits durchgeführten Gitterstudie (siehe Kapitel 2.4.2: Vernetzung) als Hohlquader mit den Außenmaßen des Referenzmodells aufgefasst.

Die Strukturelemente aus den Ergebnissen der Topologieoptimierungen, welche in der Designraumwand verlaufen, werden als Rippen hinzugefügt. Hierbei sind Breite und Dicke der Rippen variabel. Die Rippen sind letztendlich über ihre gesamte Längsausdehnung mit den Außenflächen des Designraums verbunden. Einige Lastpfade der Topologieoptimierungen verlaufen jedoch durch den Designraum. Sie werden als Balken konstruiert, die lediglich über ihre Anfangs- und Endpunkte Kräfte an den Designraum übertragen. Wie bei den parametrischen Gitterstrukturen stellen die Füße Hohlquader mit zwei verschiedenen Konfigurationen an Versteifungsrippen dar (siehe Abbildung 2.5 in Kapitel 2.4.1). Folgende vier Modelle werden nach den Topologieoptimierungsergebnissen erstellt:

- *Ziel: Maximale Steifigkeit*
Das Ergebnis der Topologieoptimierung mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit zeigt klar definierte Lastpfade auf, entlang derer Strukturelemente notwendig sind. Sie werden als Rippen und Balken in den Designraum konstruiert.
- *Ziel: Maximale Eigenfrequenz*
Nach der Topologieoptimierung für eine maximale erste Eigenfrequenz sind nahezu ausschließlich Rippen in den Designraumwänden notwendig. Lediglich zwei Balken werden konstruiert.
- *Unterstützung der Magnete*
Je mehr Rippen und Balken in den Designraum konstruiert werden, desto höher wird gleichzeitig die Strukturmasse. Mit diesem Modell soll überprüft werden, inwiefern lediglich eine direkte Verbindung der Magnetanbindungspunkte mit den Auflagern die Steifigkeit beeinflusst. Es werden somit nur Balken in den Designraum konstruiert. Dies geschieht in Anlehnung an das Topologieoptimierungsergebnis für eine maximale Steifigkeit.
- *Kombination beider Topologieoptimierungsergebnisse*
In einem letzten Modell sollen die Strukturelemente für eine maximale Steifigkeit sowie eine maximale Eigenfrequenz kombiniert werden, um einen Kompromiss zwischen beiden Zielen zu erreichen. Da das Modell „Unterstützung der Magnete“ bereits gezeigt hat, dass die eingesetzten Strukturelemente für eine

hinreichend hohe Steifigkeit ausreichen, werden diese Strukturen für eine hohe Steifigkeit herangezogen. Gleichzeitig werden alle Rippen und Balken aus dem Modell „Ziel: Maximale Eigenfrequenz“ ebenfalls in den Designraum konstruiert.

2.6.2 Numerische Berechnung

Im Folgenden wird der Aufbau der numerischen Berechnungen erläutert.

Modellaufbau

In Analogie zu den Gitterstrukturen (siehe Kapitel 2.4.2) wird für jedes Modell der Designraum inklusive der Rippen und Versteifungsbalken über Federn mit den Füßen verbunden. Die Federsteifigkeiten sowie ihre Positionierungen an den Lenkerbalken sind ebenfalls den Gitterstrukturen nachempfunden. Die Durchmesser der Versteifungsbalken im Designraum und der Lenkerbalken sind sowohl in ihren Durchmessern, als auch in ihren Wanddicken variabel.

Vernetzung

Der Designraum inklusive der jeweiligen Rippen sowie die Füße werden mit den Einstellungen für eine hinreichende Vernetzung der durchgeführten Gitterstudie (siehe Kapitel 2.4.2: Vernetzung) vernetzt.

Materialeigenschaften und Randbedingungen

Die Materialeigenschaften, Randbedingungen und Einstellungen des Optimierungsverfahrens werden analog zu den Gitterstrukturen gewählt (siehe Kapitel 2.4.2). Im Rahmen der Optimierung lassen sich die in Tabelle 2.6 aufgeführten Parameter variieren. Im Anhang A.5.1 finden sich detaillierte Angaben zu den Bereichen, in denen die Parameter jeweils definiert sind.

Tabelle 2.6: Übersicht über die Parameter der vier verschiedenen Modelle in Anlehnung an die Ergebnisse der Topologieoptimierungen

	Parameter
Designraum:	<ul style="list-style-type: none"> • Wanddicke • Innere Balken (Querschnitt) • Rippen (Breite, Wanddicke)
Füße:	<ul style="list-style-type: none"> • Wanddicke • Anzahl an Versteifungsrippen
Lenkerbalken:	<ul style="list-style-type: none"> • Querschnitt

Auswertung

Analog zu den Gitterstrukturen wird für die Auswertung die Pareto-Front der letzten Generation betrachtet. Im Anschluss erfolgt ein Filtern der Strukturen nach maximaler Masse von 7,5 t exklusive der Füße. Innerhalb der gefilterten Strukturen wird für jedes Modell die Struktur mit der höchsten ersten Eigenfrequenz betrachtet und als bestmögliche Struktur unter den gegebenen Bedingungen aufgefasst. Wie

bei den Gitterstrukturen erfolgt für jede Struktur eine Darstellung des Kehrwertes der maximalen Verformung (= Steifigkeit) in Abhängigkeit von dem Produkt aus dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz und der Masse, um den in Gleichung 2.21 erkennbaren, linearen Zusammenhang abzubilden.

2.7 ZUSAMMENFASSENDE DARSTELLUNGEN DER ERGEBNISSE

Abschließend folgt eine zusammenfassende und vergleichende Darstellung der bestmöglichen Strukturen aller Modelle. Hierbei werden zum einen die erste Eigenfrequenz und Steifigkeit der Strukturen verglichen. Zum anderen soll die Anzahl an Eigenfrequenzen innerhalb des vom DESY vorgegebenen, kritischen Frequenzbereichs betrachtet werden.

Zur Einschätzung des Einflusses der Randbedingungen und des Materials auf das Schwingungsverhalten und die Steifigkeit werden die besten Strukturen mit folgenden Kriterien erneut berechnet:

Variation der Randbedingungen

Die Steifigkeiten der Federn in X-, Y- und Z-Richtung, die die Lenker und Auflager darstellen, werden verdoppelt und erhalten somit die in Tabelle 2.7 aufgeführten Werte. Alle übrigen Modelleinstellungen werden konstant gehalten.

Tabelle 2.7: Steifigkeiten der Federn in X-, Y- und Z-Richtung für zwei vergleichende Rechnungen.

Federn	aktuell	verändert
X-Feder (Lenker)	$7,095 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$1,419 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$
Y-Feder (Lenker)	$7,095 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$	$1,419 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$
Z-Feder (Auflager)	$4,775 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$9,550 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$

Variation des Materials

Neben dem bereits eingesetzten Stahl sollen nach Vorgabe des DESY die Materialien Grauguss und Aluminium herangezogen werden. Die in Tabelle 2.8 aufgeführten Materialeigenschaften werden den Strukturen zugeordnet, wobei alle übrigen Modelleinstellungen konstant bleiben.

Tabelle 2.8: Materialeigenschaften für Stahl, Grauguss und Aluminium, die für die Berechnungen definiert werden.

	Stahl (aktuell)	Grauguss	Aluminium
E-Modul	$210.000 \text{ N mm}^{-2}$	$100.000 \text{ N mm}^{-2}$	70.000 N mm^{-2}
Dichte	7850 kg m^{-3}	7150 kg m^{-3}	2700 kg m^{-3}
Poisson-Zahl	0,30	0,26	0,34

3 ERGEBNISSE

Dieses Kapitel beinhaltet die Darstellung aller im Rahmen der Arbeit ermittelten Ergebnisse.

3.1 ANALYTISCHE ABSCHÄTZUNG

Die Ergebnisse der analytischen Abschätzung sind in Abbildung 3.1 erkennbar. Mit Zunahme des Divisors verkleinert sich die Querschnittsfläche bei konstanter Länge. Dabei nimmt insgesamt die erste Eigenfrequenz ab.

Die numerischen Ergebnisse mit ANSYS und OptiStruct stimmen für alle Divisoren zu mindestens 98 % überein. Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Ergebnissen unter Annahme eines Timoschenko-Balkens zeigt, dass sich die ermittelten ersten Eigenfrequenzen für alle Divisoren um weniger als 5 % unterscheiden. Die analytische Rechnung für einen Bernoulli-Balken weicht bei dem Querschnitt, der den Maßen der Referenzstruktur entspricht ($d = 1$) um über 8 % von den numerischen Ergebnissen ab. Für alle Divisoren größer eins liegt die Abweichung jedoch nur noch bei maximal 2 %.

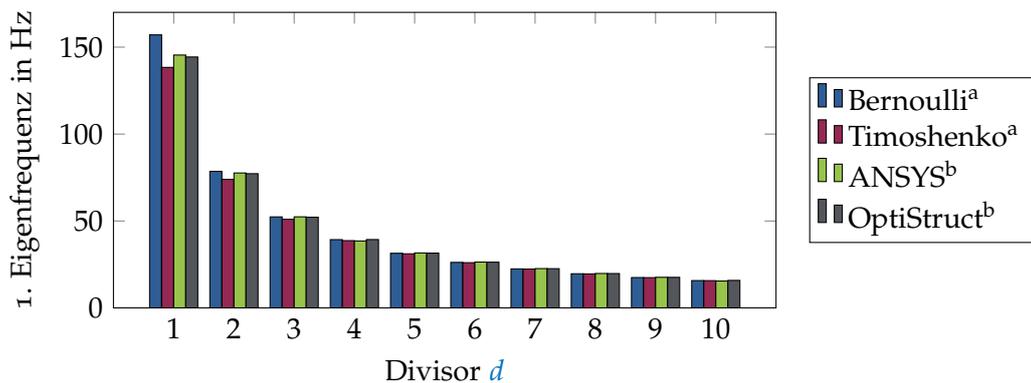


Abbildung 3.1: Ergebnisse der Validierungsrechnungen: Für die analytischen Rechnungen (^a) unter Annahme eines Bernoulli- und eines Timoschenko-Balkens und für die numerischen Rechnungen (^b) mit ANSYS und OptiStruct sind die ersten Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von dem Divisor d dargestellt. Der Divisor wird jeweils auf die Breite und Höhe des Balkens angewandt, während die Länge konstant bleibt.

3.2 REFERENZSTRUKTUR

3.2.1 Abstraktion der gegebenen Referenzstruktur

Die abstrahierte Referenzstruktur, dargestellt in Abbildung 3.2, besteht aus dem länglichen Girder, dessen untere Fläche an drei Auflagerpunkten über Federn mit den zwei Füßen verbunden ist. Die Struktur besitzt eine Gesamtmasse von 7725 kg

unter Berücksichtigung des Materials Stahl (Dichte: 7850 kg m^{-3}). Die Girderstruktur inklusive der drei großen Magnete und abzüglich der Füße liegt bei einer Masse von 6062 kg.

Detailansichten des Referenzmodells und der Federpositionen sind im Anhang A.2.2 zu finden.

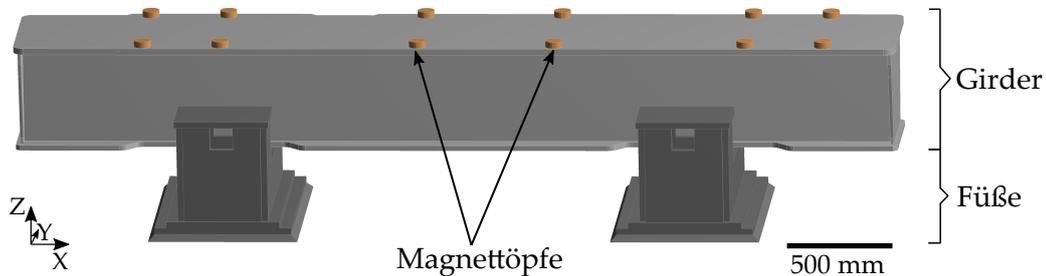


Abbildung 3.2: Ansicht der Referenzstruktur, die sich aus dem Girder mit den Magnettöpfen sowie den beiden Füßen zusammensetzt.

3.2.2 Ermittlung der Federsteifigkeiten

Die Federsteifigkeiten werden sowohl numerisch, als auch analytisch berechnet. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung sind im Anhang A.2.4 zu finden und werden in Tabelle 3.1 den analytischen Ergebnissen gegenübergestellt. Die Tabelle zeigt, dass sich die numerischen und analytischen Werte um weniger als 5 % voneinander unterscheiden.

Tabelle 3.1: Numerisch und analytisch ermittelte Federsteifigkeiten sowie ihr prozentualer Unterschied.

	Z-Federn (Auflager)	X- und Y-Federn (Lenker)
numerisch	$4,775 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$7,095 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$
analytisch	$4,948 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$	$7,422 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$
Unterschied	3,496 %	4,405 %

3.2.3 Numerische Berechnung der Referenzstruktur

Im weiteren Verlauf werden die Ergebnisse der Gitterstudie sowie der Modalanalyse und der linear-statischen Berechnung dargestellt.

Gitterstudie

Im Rahmen der Gitterstudie ergeben sich die in Abbildung 3.3 dargestellten Ergebnisse. Deutlich erkennbar ist eine Annäherung der ersten Eigenfrequenz und der maximalen Verformung an konstante Werte von ca. 12,9 Hz bzw. ca. 0,129 mm mit zunehmender Elementanzahl. Die hinreichende Vernetzung weist 255.655 Elemente auf und unterscheidet sich sowohl für die erste Eigenfrequenz, als auch für die ma-

ximale Verformung um weniger als 5 % von den folgenden drei Vernetzungsstufen. Eine Abbildung dieser Vernetzung ist im Anhang A.2.3 zu sehen.

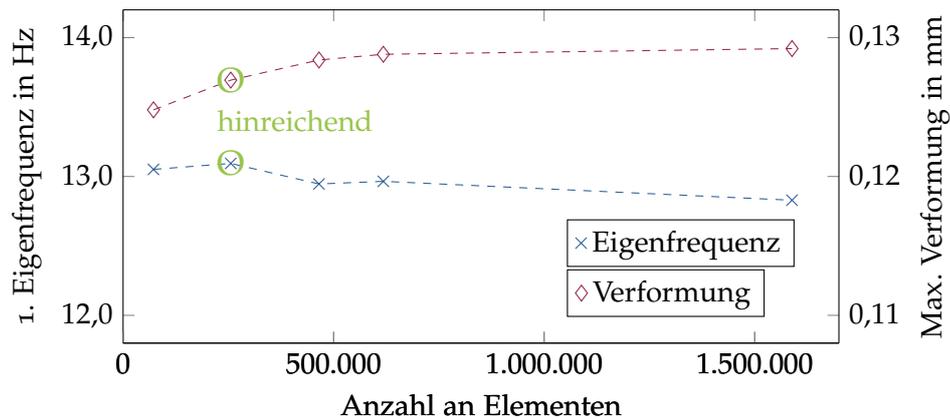


Abbildung 3.3: 1. Eigenfrequenz in Hz und maximale Verformung in mm in Abhängigkeit von der Anzahl an Elementen der Gitterstudie für die Referenzstruktur. Das grün umkreiste, hinreichende Ergebnis unterscheidet sich jeweils um weniger als 5 % von den folgenden drei Vernetzungsstufen.

Modalanalyse

Die Modalanalyse der Referenzstruktur zeigt eine erste Eigenfrequenz von 13,094 Hz auf (siehe Tabelle 3.2). Die zugehörige Eigenform ist nahezu eine Starrkörperbewegung mit kleinen lokalen Verformungen, während die folgenden Eigenformen mit Ausnahme der achten Eigenform Deformationen der Struktur aufweisen. Bei den Biegedeformationen handelt es sich um ein Biegen der Gesamtstruktur mit gleichzeitigen lokalen Verformungen an den Magnettöpfen. Für eine Darstellung der ersten zehn Eigenformen wird auf den Anhang A.2.5 verwiesen.

Insgesamt liegen die ersten drei Eigenfrequenzen innerhalb des vorgegebenen, kritischen Frequenzbereichs von 1 bis 50 Hz.

Tabelle 3.2: Eigenfrequenzen und Beschreibung der Eigenformen für die Referenzstruktur.

Modus	Eigenfrequenz in Hz	Beschreibung der Eigenform
1	13,094	Nahezu Starrkörper-Kippen in Y-Z-Ebene
2	34,703	Verschiebung in X-Richtung mit gleichzeitigem Biegen in Z-Richtung
3	45,042	Drehen in X-Y-Ebene um den Strukturmittelpunkt mit leichter Torsion
4	51,985	Kippen in X-Z-Ebene mit lokalem Biegen
5	63,860	Kippen in X-Z-Ebene mit lokalem Biegen
6	81,786	Biegen in X-Z-Ebene

Linear-Statistische Berechnung

Die linear-statische Berechnung ergibt eine maximale Verformung unter Eigenlast von 0,12 mm, welche im Bereich der Magnettöpfe auftritt (Abbildung 3.4). Abgesehen von den höchsten Verformungen an den Magnettöpfen zeigt das Verformungsbild höhere Verformungen um ca. 0,1 mm in der linken Strukturhälfte, während sich die rechte Strukturhälfte um ca. 0,05 mm verformt.

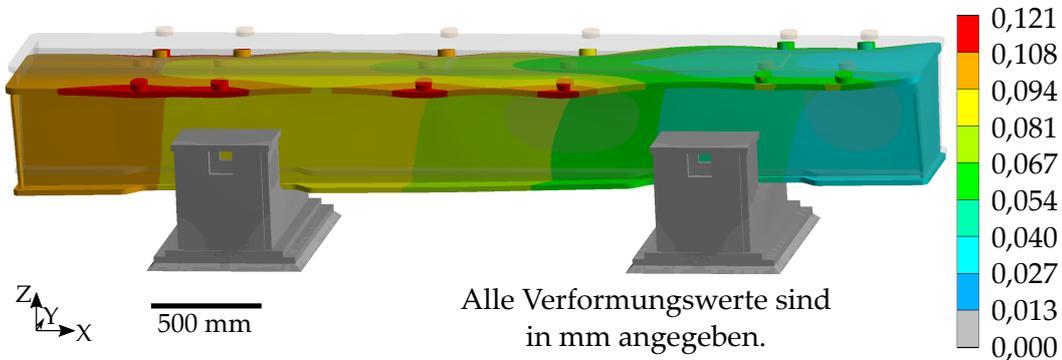


Abbildung 3.4: Verformung der Referenzstruktur, auf die die Erdanziehung wirkt. Die Verformung ist um den Faktor 930 verstärkt dargestellt. In hellgrau ist die unverformte Struktur erkennbar. Für eine bessere Übersichtlichkeit ist die Vernetzung ausgeblendet.

3.3 GITTERSTRUKTUREN

3.3.1 Numerische Berechnung der Gitter

Nach einer Darstellung der Resultate für die Gitterstudie folgen die Ergebnisse der numerischen Optimierungsrechnungen für die vier parametrischen Konstruktionen der Gitterstrukturen.

Gitterstudie

Mit Hilfe der Gitterstudie wird eine Vernetzung ermittelt, deren Ergebnis sich von den folgenden drei feineren Vernetzungsstufen um weniger als 5 % unterscheidet. Detaillierte Eigenschaften sowie eine Abbildung dieser Vernetzung sind im Anhang A.3.2 aufgeführt.

Eine übersichtliche Darstellung der resultierenden maximalen Verformungen in Abhängigkeit von der Elementanzahl ist in Abbildung 3.5 zu finden. Die Ergebnisse nähern sich mit zunehmender Elementanzahl konstanten Werten von ca. 2,22 Hz für die erste Eigenfrequenz und ca. 5,89 mm für die maximale Verformung an.

Pareto-Fronten der letzten Generationen

Innerhalb der Ergebnisse der multikriteriellen Optimierung unter Verwendung der Evolutionsstrategie wird für jede Gitterstruktur die Pareto-Front der letzten (50.) Generation betrachtet. Das Filtern der Pareto-Fronten nach Girdermassen inklusive der Magnete von maximal 7,5 t ergibt die in Abbildung 3.6 dargestellten Ergebnisse. Hierbei ist jeweils der Kehrwert der maximalen Verformung gegen das Quadrat der ersten Eigenfrequenz bezogen auf die Masse aufgetragen.

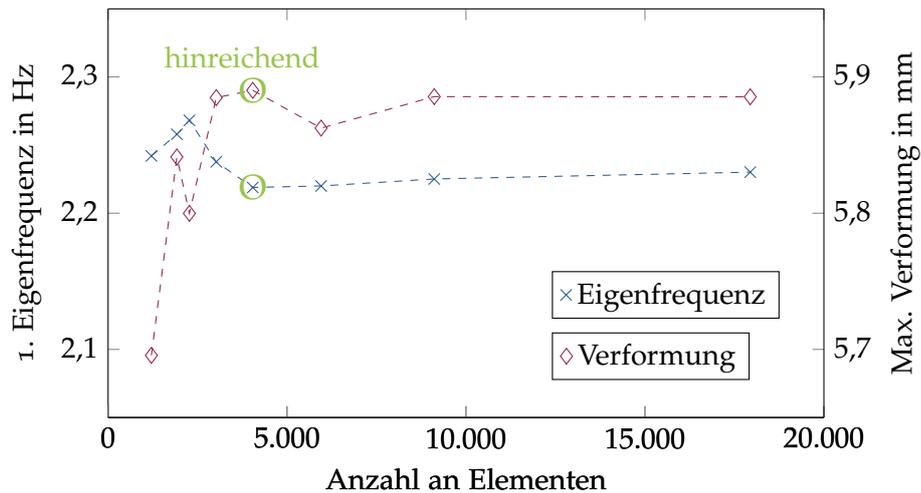


Abbildung 3.5: Erste Eigenfrequenz in Hz und maximale Verformung unter Eigenlast in mm in Abhängigkeit von der Anzahl an Elementen der Gitterstudie für die Gitterstrukturen. Das grün umkreiste, hinreichende Ergebnis unterscheidet sich jeweils um weniger als 5 % von den folgenden drei Vernetzungsstufen.

In allen Modellen ist ein tendenziell linearer Zusammenhang zwischen dem Kehrwert der maximalen Verformung und dem massebezogenen Quadrat der ersten Eigenfrequenz erkennbar. Jedoch sind vor allem in den Daten der Verbindung benachbarter Punkte und des Rechteckgitters einige Abweichungen von der linearen Tendenz zu verzeichnen.

Die Ergebnisse der unregelmäßigen Gitter zeigen eine durchschnittlich ähnliche Steigung mit maximalen ersten Eigenfrequenzen von 14,47 Hz für das Voronoi-Gitter und 18,67 Hz für das Gitter auf Basis von Nachbarverbindung. Die Kehrwerte der maximalen Verformungen liegen dabei bei ca. 15 mm^{-1} und bei ca. 16 mm^{-1} . Die Streuungen in den Daten des Gitters aus der Verbindung von benachbarten Punkten zeigen für mehrere massebezogene Frequenzwerte jeweils mehrere Verformungswerte auf. Ebenso können einer Verformung zum Teil mehrere massebezogene Eigenfrequenzen zugeordnet werden.

Bei dem regelmäßigen, hexagonalen Gitter fallen sowohl die maximale erste Eigenfrequenz von 11,60 Hz, als auch der dazugehörige Kehrwert der maximalen Verformung von $7,5 \text{ mm}^{-1}$ geringer aus. Das rechteckige Gitter weist hingegen eine höhere maximale erste Eigenfrequenz von 16,72 Hz bei einem ebenfalls geringen Kehrwert der maximalen Verformung von ca. 6 mm^{-1} . Die tendenziellen Steigungen der Werte der beiden regelmäßigen Gitter stimmen im Vergleich zu den unregelmäßigen Gittern weniger gut überein. Bei letzteren zeigen die Werte des hexagonalen Gitters eine höhere Steigung.

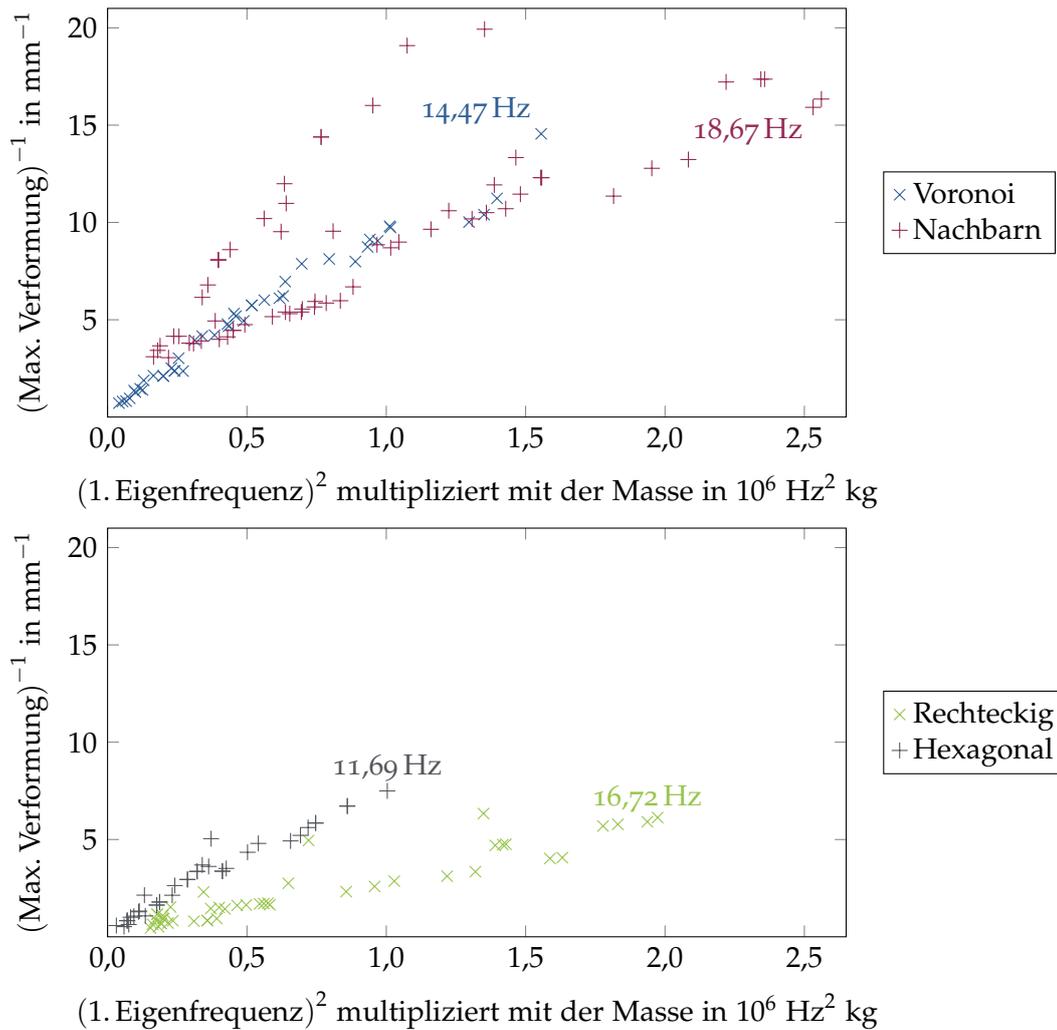


Abbildung 3.6: Kehrwert der maximalen Verformung unter Eigenlast in mm in Abhängigkeit von dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz in Hz² multipliziert mit der Masse in kg für die unregelmäßigen (3D-Voronoi und Verbindung benachbarter Punkte („Nachbarn“, oben) und die regelmäßigen Gitterstrukturen (Rechteckig und Hexagonal, unten). Für jedes Modell ist die höchste erste Eigenfrequenz in Hz bei dem jeweiligen Punkt angegeben. Alle Daten sind jeweils der Pareto-Front der 50. Generation entnommen, wobei sie zusätzlich nach einer maximalen Girdermasse von 7,5 t gefiltert worden sind.

Beste Strukturen

Für jede Gitterstruktur wird das jeweils beste Ergebnis herausgegriffen und im weiteren Verlauf für einen Vergleich mit noch anderen Ergebnissen herangezogen. Das jeweils beste Ergebnis stellt die Struktur mit der höchsten ersten Eigenfrequenz dar (erkennbar in [Abbildung 3.6](#)). [Tabelle 3.3](#) zeigt die Eigenschaften der besten Ergebnisse. Die Massen liegen alle unterhalb der maximal zulässigen 7,5 t. [Abbildungen der Strukturen](#) sind im [Anhang A.3.6](#) zu finden.

Tabelle 3.3: Erste Eigenfrequenz, maximale Verformung unter Eigenlast und Masse der besten Gitterstrukturen. Die aufgeführte Masse beinhaltet nicht die Masse der Füße.

	1. Eigenfrequenz	Max. Verformung	Masse
<i>Unregelmäßige Gitter:</i>			
Voronoi	14,47 Hz	0,069 mm	7433,15 kg
Verbindung von Nachbarn	18,67 Hz	0,063 mm	7262,14 kg
<i>Regelmäßige Gitter:</i>			
Rechteck	16,72 Hz	0,169 mm	7450,17 kg
Hexagonal	11,69 Hz	0,133 mm	7342,62 kg

3.4 TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Topologieoptimierungen dargestellt.

3.4.1 Maximale Steifigkeit

Die Topologieoptimierung mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit zeigt die in Abbildung 3.7 dargestellte Struktur auf. Je höher die künstliche Dichte $\bar{\rho}$, desto wichtiger ist das Element für eine hohe Steifigkeit. Die resultierende Struktur weist klar erkennbare Lastpfade auf. Diese verlaufen als direkte Verbindungen zwischen den Magnettöpfen und den Auflagern sowie als 45°-Streben an den vorderen und hinteren Außenwänden. Insgesamt erinnert die Struktur in ihren Grundzügen an eine Brückenkonstruktion.

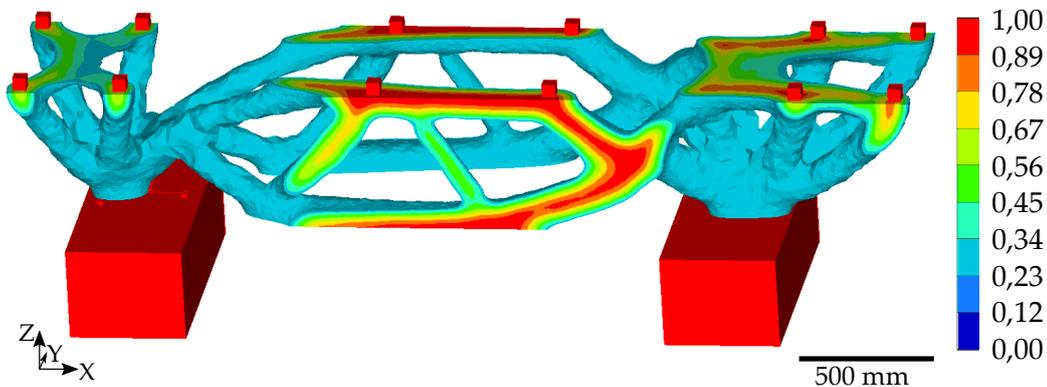


Abbildung 3.7: Ergebnis der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit. Farblich markiert sind die künstlichen Dichten zwischen 0 und 1 der Elemente, wobei nur die Elemente mit einer künstlichen Dichte von mindestens 0,3 dargestellt sind.

Mit Hilfe der Glättungsfunktion OSSmooth sowie kleiner manueller Anpassungen gelingt eine Überführung des Ergebnisses der Topologieoptimierung in eine dreidimensionale Struktur, welche im Anhang A.4.1.1 abgebildet ist. Die Struktur besitzt eine Gesamtmasse von 6279 kg (Stahl mit einer Dichte von 7850 kg m^{-3}). Die

Girderstruktur inklusive der drei großen Magnete und abzüglich der Füße liegt bei einer Masse von 5536 kg.

Die Reanalyse ergibt für die Struktur unter Einwirkung der Erdbeschleunigung eine maximale Verformung von 0,031 mm im mittleren Strukturbereich (Abbildung 3.8).

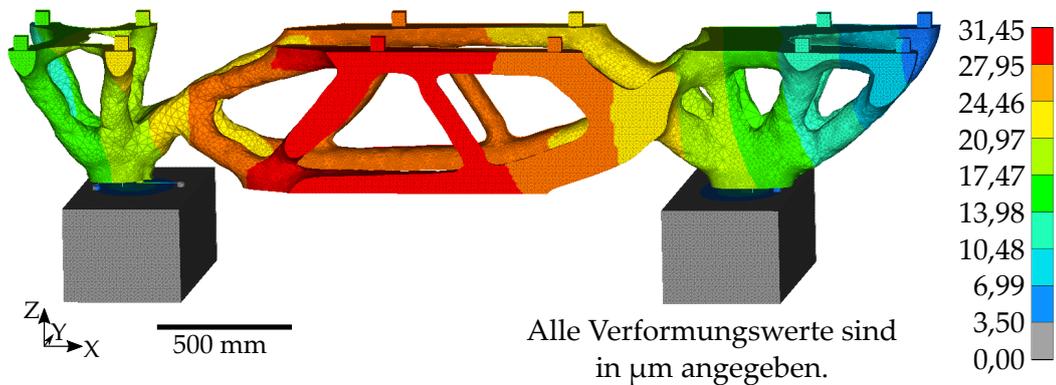


Abbildung 3.8: Verformung unter Eigenlast der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit.

Im Hinblick auf die Modalanalyse sind die ermittelten Eigenfrequenzen in Tabelle 3.4 aufgeführt. Die erste Eigenfrequenz beträgt 8,773 Hz. Im Anhang A.4.1.2 findet sich eine Darstellung der ersten zehn Eigenformen und mit den zugehörigen Eigenfrequenzen.

Tabelle 3.4: Eigenfrequenzen und Beschreibung der Eigenformen für die Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung mit dem Ziel einer Steifigkeit.

Modus	Eigenfrequenz in Hz	Beschreibung der Eigenform
1	8,773	Nahezu Starrkörper-Kippen in Y-Z-Ebene
2	20,316	Torsion um die horizontale Achse der Lager
3	22,481	Verschiebung in X-Richtung mit gleichzeitigem Biegen in Z-Richtung
4	35,358	Biegung in X-Z-Ebene mit gleichzeitigem Biegen in Y-Richtung
5	38,942	Biegen 2. Ordnung in X-Y-Ebene
6	48,641	Biegung in X-Z-Ebene mit gleichzeitigem Biegen in Y-Richtung

3.4.2 Maximale Eigenfrequenz

Die Topologieoptimierung mit dem Ziel einer maximalen ersten Eigenfrequenz ergibt das in Abbildung 3.9 dargestellte Resultat. Auch hier bedeutet ein hoher Wert für die künstliche Dichte $\bar{\rho}$, dass das Element wichtig für eine hohe erste Eigenfrequenz ist. Die resultierende Struktur ist innen hohl. Die Farbgebung lässt 45°-Streben an den äußeren Flächen erkennen, die jeweils von den Magnettöpfen

aus verlaufen. Auffällig ist, dass unter den gewählten Einstellungen nicht alle Strukturelemente miteinander verbunden sind.

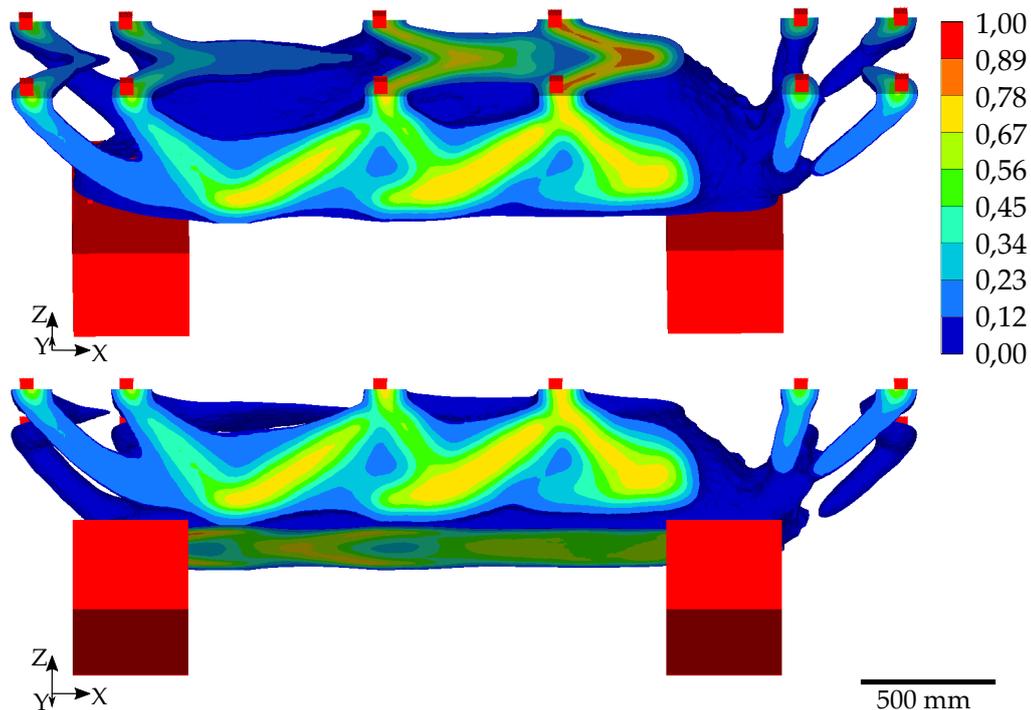


Abbildung 3.9: Ergebnis der Topologieoptimierung für eine maximale erste Eigenfrequenz in zwei Ansichten. Farblich markiert sind die künstlichen Dichten zwischen 0 und 1 der Elemente, wobei nur die Elemente mit einer künstlichen Dichte von mindestens 0,11 dargestellt sind.

Die Überführung des Ergebnisses der Topologieoptimierung in eine dreidimensionale Struktur ergibt die im Anhang A.4.2.1 dargestellte Struktur mit einer Gesamtmasse von 7994 kg (Stahl mit einer Dichte von 7850 kg m^{-3}). Hierbei sind nun alle Strukturelemente miteinander verbunden. Die Masse der Girderstruktur inklusive der drei großen Magnete und abzüglich der FüÙe liegt bei 7252 kg.

Die Reanalyse zeigt für die Struktur unter Einwirkung der Erdbeschleunigung eine maximale Verformung von 0,153 mm an den linken Magnettöpfen auf (Abbildung 3.10).

Die in einer Modalanalyse ermittelten Eigenfrequenzen der rekonstruierten Struktur sind in Tabelle 3.5 zusammengetragen. Die erste Eigenfrequenz beträgt 10,032 Hz. Im Anhang A.4.2.2 findet sich eine Darstellung der ersten zehn Eigenformen und mit den zugehörigen Eigenfrequenzen.

In Tabelle 3.6 sind zusammenfassend die Eigenschaften der rekonstruierten Strukturen hinsichtlich erster Eigenfrequenz, maximaler Verformung und Strukturmasse aufgeführt.

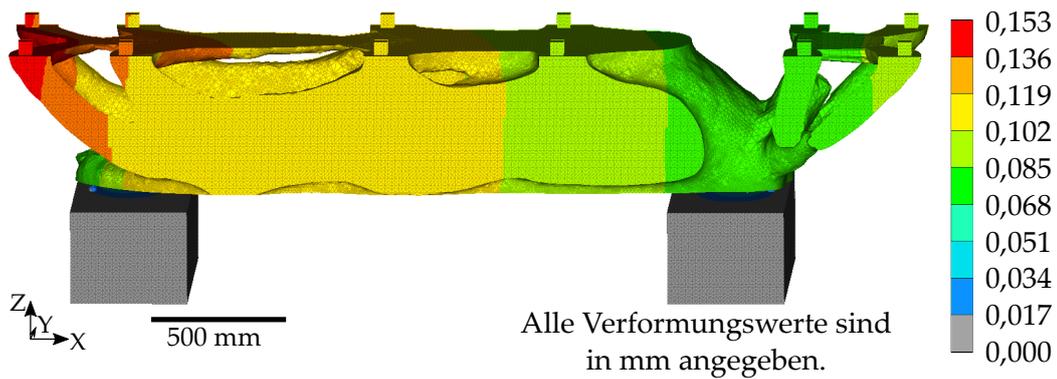


Abbildung 3.10: Verformung unter Eigenlast der Rekonstruktion des Topologieoptimierungsergebnisses für eine maximale erste Eigenfrequenz.

Tabelle 3.5: Eigenfrequenzen und Beschreibung der Eigenformen für die Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung mit dem Ziel einer maximalen ersten Eigenfrequenz.

Modus	Eigenfrequenz in Hz	Beschreibung der Eigenform
1	10,032	Nahezu Starrkörper-Kippen in Y-Z-Ebene
2	27,192	Verschiebung in X-Richtung mit gleichzeitigem leichten Biegen in Z-Richtung
3	43,435	Kippen in X-Y-Ebene mit leichter Torsion
4	47,342	Biegung in X-Z-Ebene
5	52,915	Biegung in X-Z-Ebene
6	57,928	Torsion um die obere, horizontale Mittelachse

Tabelle 3.6: 1. Eigenfrequenz, maximale Verformung unter Eigenlast und Masse der Rekonstruktionen aus den Ergebnissen der Topologieoptimierungen. Die aufgeführte Masse beinhaltet nicht die Masse der Füße.

Ziel	1. Eigenfrequenz	Max. Verformung	Masse
Maximale Steifigkeit	8,77 Hz	0,031 mm	5536 kg
Maximale 1. Eigenfrequenz	10,03 Hz	0,153 mm	7252 kg

3.5 STRUKTUREN NACH VORBILD DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

3.5.1 Parametrische Konstruktion

Die vier konstruierten Modelle sind in Abbildung 3.11 dargestellt. Die Strukturelemente aus den präsentierten Ergebnissen der Topologieoptimierungen finden sich abstrahiert in dem Designraum als Hohlquader wieder.

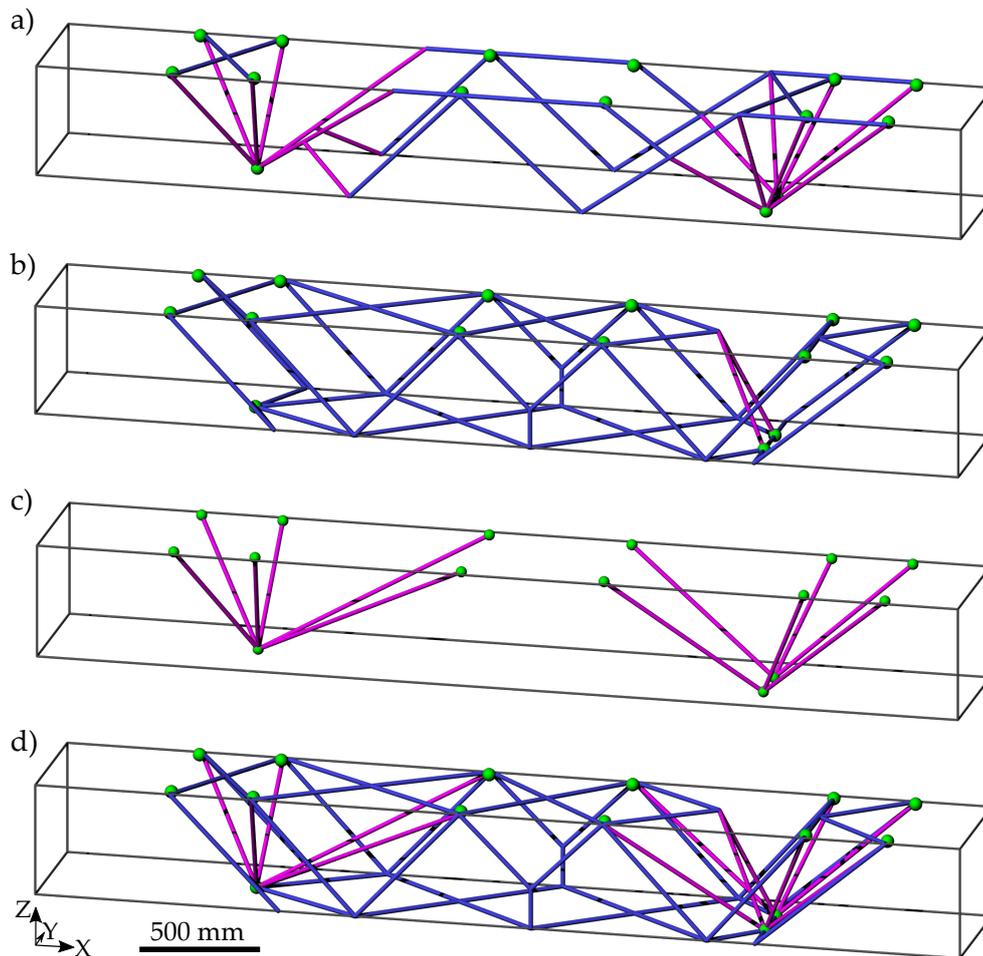


Abbildung 3.11: Konstruierte Strukturen nach Vorbild der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen: a) Ziel: Maximale Steifigkeit, b) Ziel: Maximale erste Eigenfrequenz, c) Unterstützung der Magnete, d) Kombination aus b) und c). Innere Streben sind in pink sowie die Rippen in blau dargestellt. Die jeweiligen Querschnitte und Extrusionen der Rippen werden im Laufe der Optimierungsrechnungen variiert. Die Kanten des Designraums sind durch graue Linien erkennbar, die grünen Kugeln symbolisieren die Magnetverbindungen bzw. die Auflager.

3.5.2 Numerische Berechnung

Mit Hilfe der Optimierungsrechnungen werden durch Variation der Querschnitte die bestmöglichen Strukturen für die vier Modelle ermittelt.

Pareto-Fronten der letzten Generationen

In Analogie zu den Gitterstrukturen werden auch hier die Pareto-Fronten der letzten Generation, die nach maximalen Girdermassen von 7,5 t gefiltert worden sind, betrachtet. In Abbildung 3.12 ist für jede Struktur der Kehrwert der maximalen Verformung in Abhängigkeit von dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz bezogen auf die Masse dargestellt.

Die Strukturen in Anlehnung an die Topologieoptimierungsergebnisse für eine maximale Steifigkeit (Max. Steif. und Unt. Mag.) weisen einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen dem massebezogenen Quadrat der Eigenfrequenz und dem Kehrwert der maximalen Verformung mit einer relativ hohen Steigung auf. Dabei werden maximale erste Eigenfrequenzen von 9,51 Hz (Max. Steif.) bzw. 9,11 Hz (Unt. Mag.) erreicht. Die dazugehörigen Kehrwerte der maximalen Verformungen liegen bei $16,8 \text{ mm}^{-1}$ bzw. $11,9 \text{ mm}^{-1}$. Im Gegensatz dazu weisen die Daten der Struktur mit dem Ziel einer hohen ersten Eigenfrequenz (Max. Freq.) zwar ebenfalls einen tendenziell linearen Verlauf auf, jedoch gleichzeitig eine deutlich geringere Steigung sowie eine höhere Streuung der Daten. Letztere ordnet vielen massebezogenen Frequenzwerten jeweils mehrere Verformungswerte zu. Gleichzeitig ist bei einem Kehrwert der maximalen Verformung von beispielsweise ca. 3 mm^{-1} eine Vielzahl an massebezogenen Frequenzwerten möglich. Die maximale erste Eigenfrequenz des Modells beträgt 20,36 Hz bei einem Kehrwert der maximalen Verformung von $9,1 \text{ mm}^{-1}$.

Eine Kombination der Ergebnisse beider Topologieoptimierungen führt zu Daten, die ebenfalls lineare Zusammenhänge zwischen dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz und dem Kehrwert der maximalen Verformung zeigen. Auch hier ist die bereits erwähnte Streuung der Daten erkennbar. Die maximal erreichte, erste Eigenfrequenz liegt bei 18,06 Hz mit einem Kehrwert der maximalen Verformung von $26,2 \text{ mm}^{-1}$. Deutlich erkennbar ist außerdem, dass die höchsten Steifigkeitswerte über den Steifigkeiten der Strukturen mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit (Max. Steif. und Unt. Mag.) liegen.

Beste Strukturen

Für jede Struktur wird das beste Ergebnis herausgegriffen und im Vergleich mit den anderen Strukturen untersucht. Das jeweils beste Ergebnis stellt die Struktur mit der höchsten ersten Eigenfrequenz dar (erkennbar in Abbildung 3.12). Tabelle 3.7 zeigt die Eigenschaften der besten Ergebnisse. Die Massen liegen alle unterhalb der maximal zulässigen 7,5 t. Abbildungen der Strukturen sind im Anhang A.5.2 zu finden.

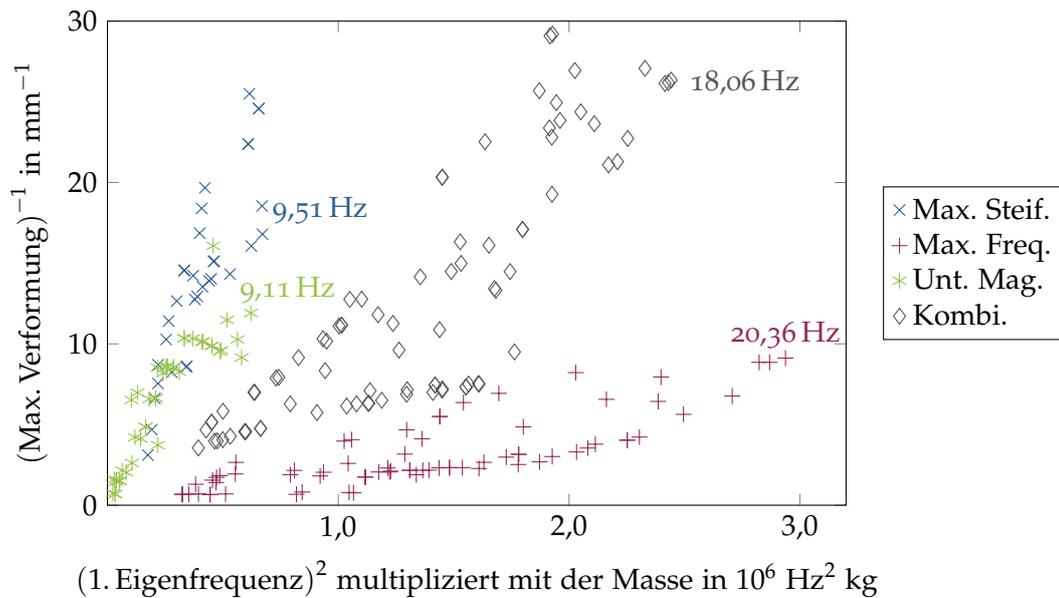


Abbildung 3.12: Kehrwert der maximalen Verformung unter Eigenlast in Abhängigkeit von dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz in Hz² multipliziert mit der Masse in kg für die Strukturen nach den Ergebnissen der Topologieoptimierungen mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit (Max. Stief.) und einer maximalen ersten Eigenfrequenz (Max. Freq.). Weiter aufgeführt sind die Daten für Strukturen mit Versteifungsstreben, die die Magnete für eine hohe Steifigkeit direkt mit den Auflagern verbinden (Unt. Mag.) sowie eine Struktur, die eine Kombination der Ergebnisse beider Topologieoptimierungen darstellt (Kombi.). Für jedes Modell ist die höchste erste Eigenfrequenz in Hz bei dem jeweiligen Punkt angegeben. Alle Daten sind jeweils der Pareto-Front der 50. Generation entnommen, wobei sie zusätzlich nach einer maximalen Girdermasse von 7,5 t gefiltert worden sind.

Tabelle 3.7: Erste Eigenfrequenz, maximale Verformung unter Eigenlast und Masse der besten Strukturen für die vier verschiedenen Modelle, die in Anlehnung an die Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen konstruiert wurden. Die aufgeführte Masse beinhaltet nicht die Masse der Füße.

	1. Eigenfrequenz	Max. Verformung	Masse
<i>Nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit:</i>			
Ziel: Max. Steifigkeit	9,51 Hz	0,059 mm	7428,26 kg
Unterstützung Magnete	9,11 Hz	0,084 mm	7492,78 kg
<i>Nach der Topologieoptimierung für eine maximale 1. Eigenfrequenz:</i>			
Ziel: Max. Eigenfrequenz	20,36 Hz	0,110 mm	7088,96 kg
<i>Nach einer Kombination der Ergebnisse beider Topologieoptimierungen:</i>			
Kombination	18,06 Hz	0,038 mm	7455,21 kg

3.6 ZUSAMMENFASSENDE DARSTELLUNGEN DER ERGEBNISSE

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse in vergleichenden Darstellungen zusammengefasst. Zunächst stellt die Abbildung 3.13 den Kehrwert der maximalen Verformung in Abhängigkeit von dem Produkt aus dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz und der Masse für alle Gitterstrukturen und die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen im Vergleich zur Referenzstruktur dar. Erkennbar ist die bereits erwähnte hohe Vielfalt an Strukturen. Dabei weisen viele Strukturen sowohl eine höhere Steifigkeit, als auch höhere erste Eigenfrequenzen als die Referenzstruktur auf.

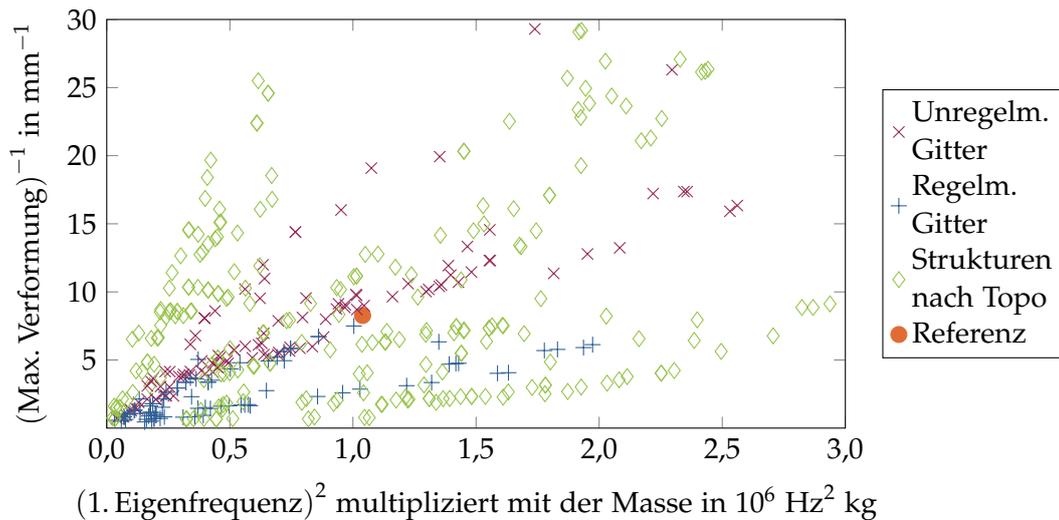


Abbildung 3.13: Kehrwert der maximalen Verformung unter Eigenlast in mm in Abhängigkeit von dem Quadrat der ersten Eigenfrequenz in Hz^2 multipliziert mit der Masse in kg für die unregelmäßigen und regelmäßigen Gitterstrukturen, die vier Modelle nach Vorbild der Topologieoptimierungen (Strukturen nach „Topo“) und die Referenzstruktur. Alle Daten sind jeweils der Pareto-Front der 50. Generation entnommen, wobei sie zusätzlich nach einer maximalen Girdermasse von 7,5 t gefiltert worden sind.

Im weiteren Verlauf werden jeweils die besten Strukturen vergleichend gegenübergestellt. Im Anschluss folgen die Ergebnisse für eine Veränderung der Randbedingungen und des Materials.

3.6.1 Vergleich der besten Strukturen

Die vergleichende Darstellung der besten Strukturen hinsichtlich ihrer ersten Eigenfrequenz und ihrer maximalen Verformung zeigt, dass mehrere Strukturen sowohl eine höhere erste Eigenfrequenz, als auch eine geringere maximale Verformung als die Referenzstruktur besitzen (Abbildung 3.14). Zu den Strukturen zählen die beiden unregelmäßigen Gitterstrukturen sowie zwei Strukturen, die nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse konstruiert worden sind: Die Struktur mit dem Ziel einer maximalen Eigenfrequenz und die Kombination beider Topologieoptimierungsergebnisse. Beispielsweise führen die unregelmäßigen Gitterstrukturen auf Grundlage der Nachbarverbindung im Vergleich zu der Referenzstruktur zu

eine Zunahme der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,43 bei gleichzeitiger Steifigkeitssteigerung um den Faktor 1,82 (Steifigkeit wird hierbei als Kehrwert der maximalen Verformung angesehen). Durch Kombination beider Topologieoptimierungsergebnisse wird eine Zunahme der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,38 erreicht, während die Steifigkeit um den Faktor 3,17 ansteigt.

Alle anderen, dargestellten Strukturen besitzen entweder eine niedrigere erste Eigenfrequenz als die Referenzstruktur oder eine höhere maximale Verformung. Für das regelmäßige Hexagonalgitter und die Rekonstruktionen der Topologieoptimierungen trifft beides zu.

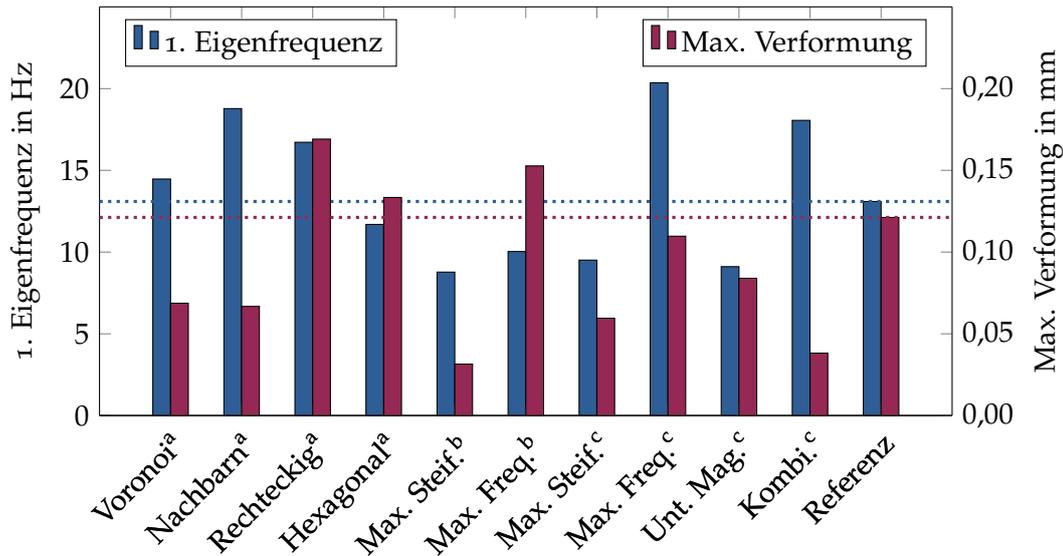


Abbildung 3.14: Erste Eigenfrequenz in Hz (blau) und maximale Verformung in mm unter Eigenlast (rot) für die verschiedenen Girderstrukturen im Vergleich zu der Referenzrechnung. Die horizontalen, gestrichelten Linien markieren jeweils die Werte der Referenzstruktur. ^(a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, ^(b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, ^(c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen. Alle Strukturen abzüglich der Füße besitzen eine Masse von weniger als 7,5 t.

Der kritische Frequenzbereich, in dem möglichst wenige Eigenfrequenzen der Girderstruktur liegen dürfen, liegt zwischen 1 und 50 Hz. In [Abbildung 3.15](#) sind für alle besten Strukturen die ersten sieben Eigenfrequenzen dargestellt. Die Referenzstruktur besitzt drei Eigenfrequenzen innerhalb des Sperrbereiches. Gleiches gilt für die beiden unregelmäßigen Gitterstrukturen sowie die vier Modelle nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse. Alle anderen Strukturen weisen mehr als drei Eigenfrequenzen im kritischen Frequenzbereich auf. Bei der Rekonstruktion der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit liegen sogar die ersten sechs Eigenfrequenzen unter 50 Hz. Weiter ist in der Abbildung erkennbar, dass die Eigenfrequenzen einer Struktur nicht gleichmäßig von der ersten bis zur siebten Ordnung zunehmen. Beispielsweise haben mehrere Strukturen eine höhere erste

Eigenfrequenz als die Referenzstruktur. Letztere dahingegen weist die höchsten Eigenfrequenzen zweiter und dritter Ordnung auf. Die nachfolgenden Eigenfrequenzen der Referenzstruktur fallen wiederum niedriger aus als die Eigenfrequenzen anderer Strukturen wie z. B. der Modelle nach Vorbild der Topologieoptimierungen.

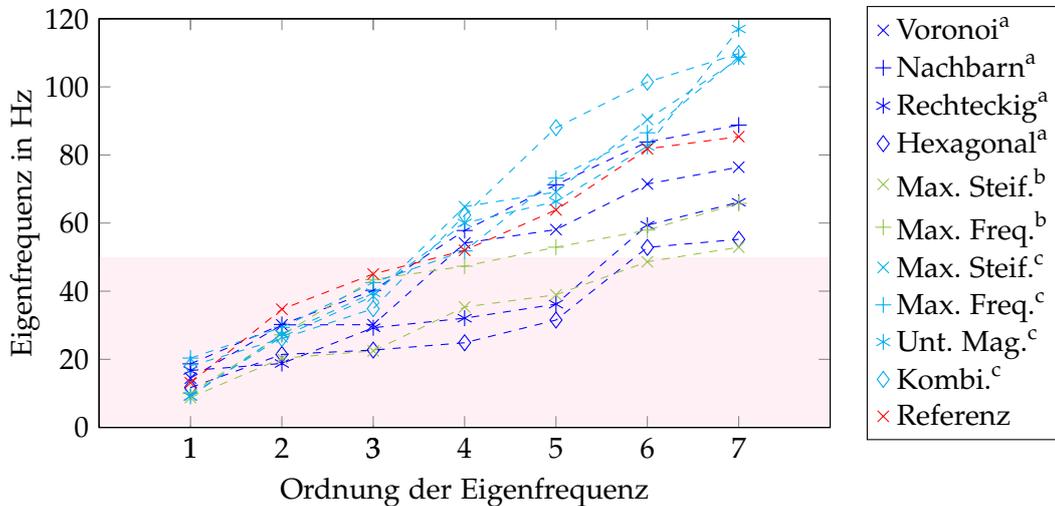


Abbildung 3.15: Eigenfrequenzen der Ordnungen 1 bis 7 für die verschiedenen Strukturen innerhalb des Designraums sowie die Referenzstruktur. In hellrot ist der vorgegebene kritische Frequenzbereich von 1 bis 50 Hz markiert. (a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, (b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, (c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

3.6.2 Variation der Randbedingungen

Die Steifigkeiten der Federn in X-, Y- und Z-Richtung der besten Strukturen und der Referenz werden verdoppelt, um den Einfluss der Randbedingungen auf die Steifigkeit und die Eigenfrequenzen abschätzen zu können. In [Abbildung 3.16](#) sind vergleichend die maximalen Verformungen erkennbar. Bei allen Strukturen führt eine Verdoppelung der Federsteifigkeiten zu einer geringeren maximalen Verformung. Die Verformung sinkt jedoch bei den Strukturen nicht gleichermaßen. Während sich z. B. die maximale Verformung bei dem regelmäßigen Rechteckgitter lediglich um den Faktor 0,99 verringert, nimmt sie bei dem Modell, das beide Topologieoptimierungen kombiniert, um den Faktor 0,92 ab.

Die Betrachtung der ersten Eigenfrequenzen der Strukturen zeigt eine Zunahme der Frequenzwerte bei allen Strukturen durch eine Verdoppelung der Federsteifigkeiten ([Abbildung 3.17](#)). Hierbei erhöhen sich die ersten Eigenfrequenzen um Faktoren zwischen 1,01 bei z. B. dem regelmäßigen Hexagonalgitter und 1,10 bei dem Modell, das nach der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz entwickelt worden ist.

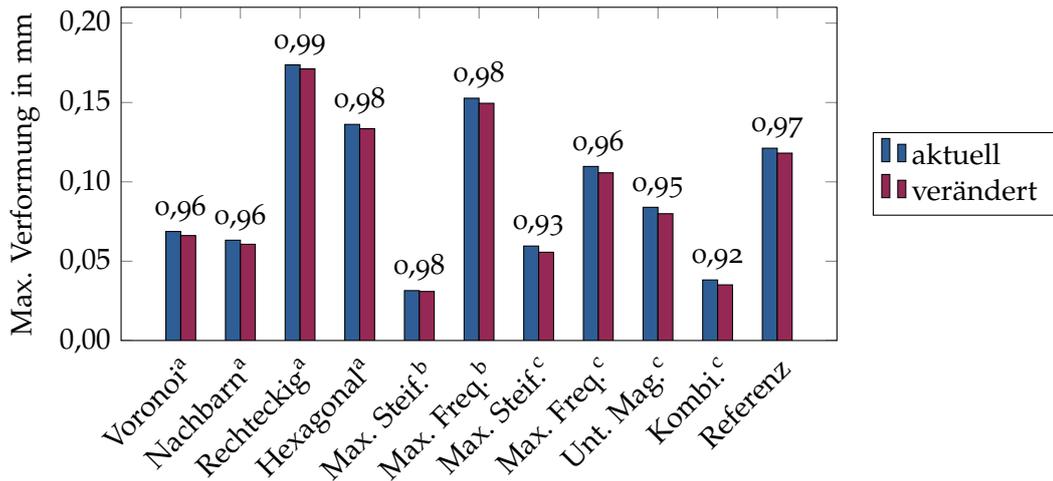


Abbildung 3.16: Maximale Verformungen in mm unter Eigenlast für die verschiedenen Strukturen im Designraum bei den aktuellen Randbedingungen (aktuell) sowie bei doppelten Steifigkeiten der Federn in X-, Y-, und Z-Richtung (verändert). Oberhalb der Balken ist jeweils der Faktor angegeben, um den sich die Werte der veränderten zu den aktuellen Randbedingungen unterscheiden. (^a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, (^b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, (^c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

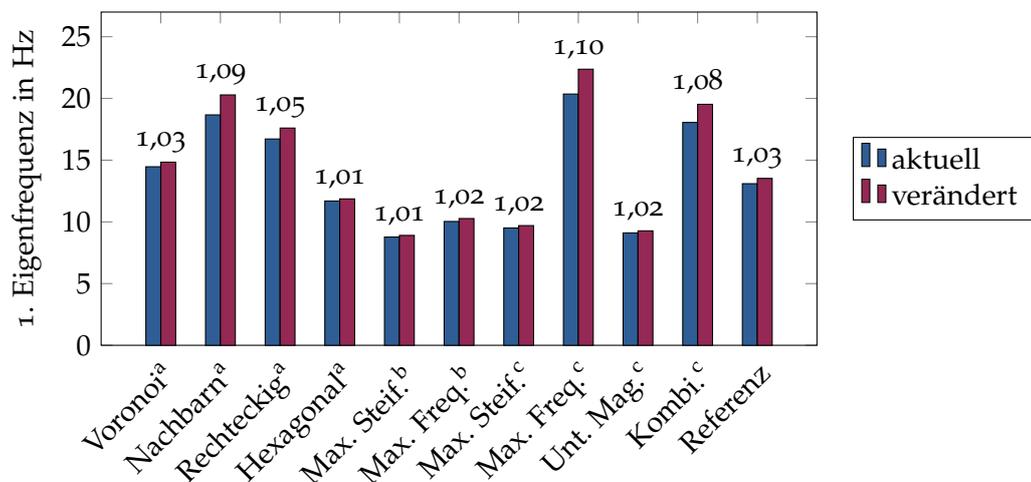


Abbildung 3.17: Erste Eigenfrequenzen in Hz für die verschiedenen Strukturen im Designraum bei den aktuellen Randbedingungen (aktuell) sowie bei verdoppelten Steifigkeiten der Federn in X-, Y-, und Z-Richtung (verändert). Oberhalb der Balken ist jeweils der Faktor angegeben, um den sich die Werte der veränderten zu den aktuellen Randbedingungen unterscheiden. (^a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, (^b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, (^c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

3.6.3 *Variation des Materials*

Durch eine Variation des Materials soll abgeschätzt werden, welchen Einfluss das Material auf die Steifigkeit und das Schwingungsverhalten nimmt.

Zunächst sei auf die Massen der einzelnen Strukturen in Abhängigkeit des Materials hingewiesen, die dem Anhang [A.6.1](#) zu entnehmen sind. Die Betrachtung der maximalen Verformung bei unterschiedlichen Materialien zeigt für alle Strukturen eine Zunahme der Verformungswerte von Stahl zu Grauguss. Die Verformungen steigen um Faktoren von 1,89 bei dem Modell, das sich aus der Kombination beider Topologieoptimierungen ergeben hat, bis 2,03 bei der Referenzstruktur (Abbildung [3.18](#)). Der Einsatz von Aluminium im Vergleich zu Stahl führt bei den meisten Strukturen zu einer weiteren Erhöhung der maximalen Verformung um Faktoren von 2,0 bei dem Modell nach Vorbild der Topologieoptimierung für eine hohe Eigenfrequenz bis 2,48 bei dem regelmäßigen Rechteckgitter. Die Rekonstruktion der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit sowie die beiden Modelle, die in Anlehnung an die Topologieoptimierung für eine hohe maximale Steifigkeit konstruiert worden sind (Max. Steif. und Unt. Mag.), weisen geringere Verformungswerte als bei Grauguss auf. Die rekonstruierte Struktur besitzt bei Aluminium sogar eine leicht geringere Verformung als bei Stahl.

Werden die Verformungswerte auf die jeweilige Materialdichte bezogen, so ergibt sich für alle Strukturen eine Zunahme der dichtebezogenen, maximalen Verformung von Stahl über Grauguss zu Aluminium. Graphisch ist dies im Anhang [A.6.1](#) aufgeführt.

Die ersten Eigenfrequenzen der Strukturen nehmen alle von Stahl über Grauguss nach Aluminium ab (Abbildung [3.19](#)). Der Unterschied der Frequenzen von Grauguss zu Aluminium liegt zwischen 0,70 bei der Rekonstruktion der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit und 0,77 bei dem Modell nach Vorbild der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz. Die Abnahme der ersten Eigenfrequenz von Stahl zu Aluminium erfolgt ebenfalls bei allen Strukturen um einen ähnlichen Faktor. Dieser liegt zwischen 0,61 bei der Rekonstruktion der Topologieoptimierung mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit und 0,73 bei dem Modell, das nach den Topologieoptimierungsergebnissen für eine maximale Eigenfrequenz konstruiert worden ist.

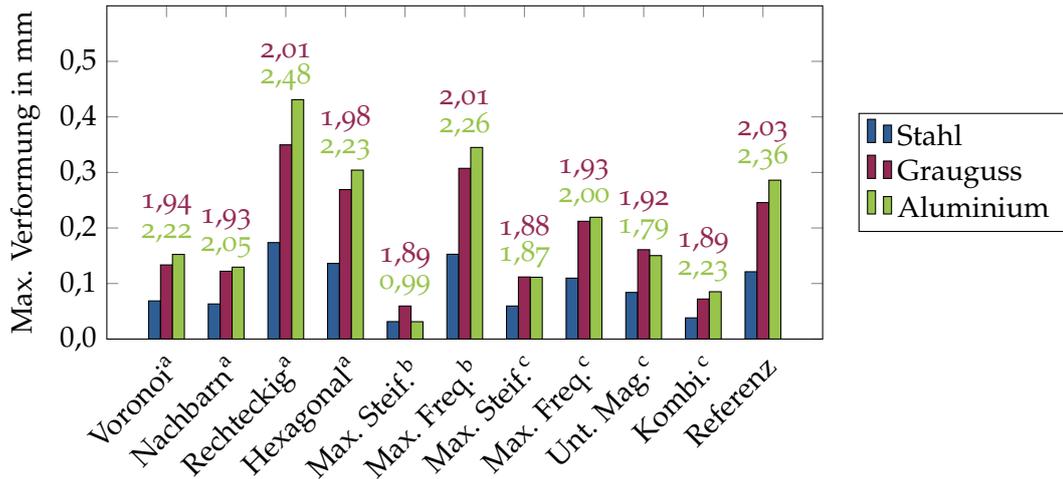


Abbildung 3.18: Maximale Verformung in mm unter Eigenlast in Abhängigkeit von dem Material für die verschiedenen Strukturen im Designraum. ^(a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, ^(b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, ^(c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

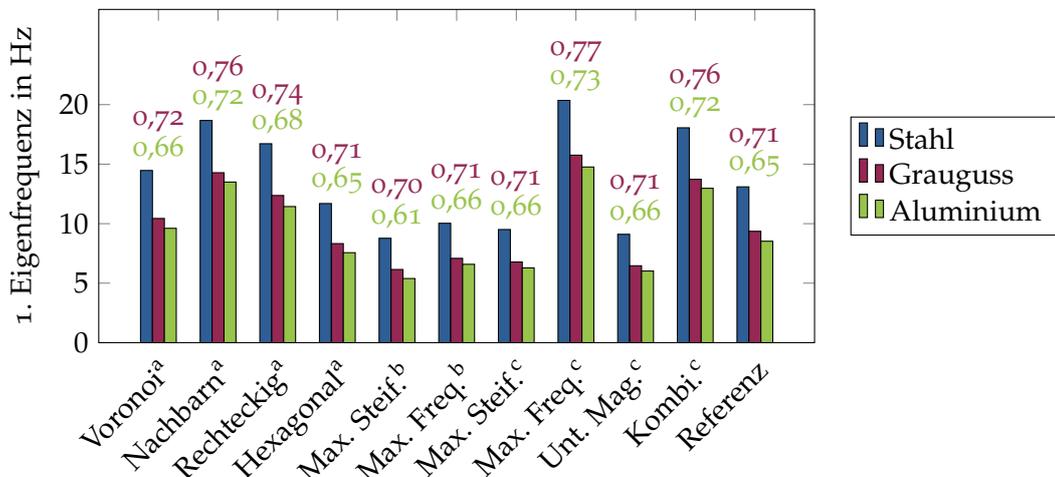


Abbildung 3.19: Erste Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von dem Material für die verschiedenen Strukturen im Designraum. Oberhalb der Balken ist jeweils der Faktor angegeben, um den sich die Werte für Grauguss (rot) und Aluminium (grün) von den Werten für Stahl unterscheiden. ^(a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, ^(b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, ^(c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

4 DISKUSSION

Nachfolgend werden die ermittelten Ergebnisse diskutiert und mit anderen Arbeiten verglichen, bevor ein zusammenfassendes Fazit den Abschluss der Arbeit bildet.

4.1 ANALYTISCHE ABSCHÄTZUNG

Um eine Übereinstimmung der numerischen und analytischen Ergebnisse mit Hilfe einer einfachen Struktur dazustellen, ist eine analytische Abschätzung durchgeführt worden. Darüber hinaus dient die Abschätzung auch dem Vergleich der numerischen Rechnungen untereinander, da diese einerseits Volumenelemente (ANSYS) und andererseits Balkenelemente verwenden (OptiStruct).

Für alle vier Rechnungen sind bei nahezu allen Querschnitten sehr gute Übereinstimmungen um mindestens 98% registriert worden. Lediglich der Balken, der in seinen Maßen der Referenzstruktur entspricht (Divisor $d = 1$), führt unter der Bernoulli-Annahme zu einer etwas höheren Eigenfrequenz als in den numerischen Rechnungen. Dahingegen stimmt hier die Timoschenko-Annahme eher mit der Numerik überein und liefert gute Ergebnisse. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Verhältnis von Länge zu Breite und Höhe des betrachteten Balkens nicht hinreichend groß ist, um eine Gültigkeit der Bernoulli-Balkentheorie zu gewährleisten. Eine Verkleinerung des Querschnitts in den nachfolgenden Rechnungen mit einem Divisor größer eins führt hingegen dazu, dass die Annahme eines Bernoulli-Balkens sehr gute Ergebnisse liefert.

Insgesamt kann daraus geschlossen werden, dass die numerischen Ergebnisse gut mit den analytischen Resultaten übereinstimmen. Mit dieser Begründung wird von einer Belastbarkeit aller vorliegenden, numerischen Ergebnisse ausgegangen.

4.2 REFERENZSTRUKTUR

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der Referenzstruktur diskutiert werden.

Zunächst sei festgehalten, dass die numerisch ermittelten Federsteifigkeiten der Auflager (Z-Federn) und Lenker (X- und Y-Federn) als belastbar angesehen werden können. Dies lässt sich damit begründen, dass sich die numerischen Ergebnisse um weniger als 5% von den analytischen Resultaten unterscheiden. Abweichungen können mit der im numerischen Modell auftretenden Querkontraktion begründet werden, die in der analytischen Rechnung vernachlässigt wird.

Im Hinblick auf die durchgeführte Gitterstudie für das 3D-Modell ist eine hinreichende Vernetzung ermittelt worden, deren Ergebnis sich bei feineren Vernetzungen nur noch um weniger als 5% ändert. Daraus kann geschlossen werden, dass der Einfluss der Elementgröße der hinreichenden Vernetzung auf die numerischen Ergebnisse der Referenzstruktur vernachlässigbar klein ist.

Die für die Referenzstruktur ermittelte erste Eigenfrequenz liegt bei 13,094 Hz. Unter der Annahme, dass sich die Ergebnisse mit der von Schlösser (2006) gemessenen Eigenfrequenz von 41 Hz vergleichen lassen, zeigt sich ein Unterschied in den Eigenfrequenzen um den Faktor 3,13. Dies deutet darauf hin, dass sich die im Rahmen dieser Arbeit neu definierten Randbedingungen negativ auf die Schwingungseigenschaften der Struktur auswirken. Während die Struktur von Schlösser (2006) im oberen Bereich an vier Punkten „aufgehängt“ wurde, was der Lagerung aktuell eingesetzter Magnetuntergestelle entspricht, ist sie in den hier durchgeführten Untersuchungen auf drei Punkten gelagert. Diese in der vorliegenden Arbeit gewählte Lagerungsart ist nach Vorgabe vom DESY definiert worden, da die Konstruktion im Vergleich zu den aktuellen Lagerungen geringere finanzielle Kosten mit sich bringt. Jedoch beeinflusst die Lagerung das Schwingungsverhalten der Struktur derart, dass drei Eigenfrequenzen im Sperrbereich liegen.

Im Hinblick auf die Eigenmodi handelt es sich bei der ersten Eigenform um ein transversales Kippen. Solche Bewegungen der Magnete sind kaum zulässig, da sie den Teilchenstrahl in großem Umfang beeinflussen. Diese Eigenform ist jedoch als erste Eigenform bei allen Modelle zu finden und resultiert zum einen aus der definierten Lagerung mit Federn, zum anderen aus der Steifigkeit der Füße. Dies weist erneut darauf hin, dass eine Betrachtung der Randbedingungen und auch der Füße in folgenden Untersuchungen notwendig ist, um bestmögliche Lösungen zum Erreichen hoher Eigenfrequenzen der Girderstruktur zu finden. Die zweite Eigenform der Referenzstruktur führt größtenteils zu einem Verschieben in Y-Richtung, also in Richtung des Teilchenstrahls. Derartige Eigenformen sind weniger kritisch. Jedoch überlagert sich die Verschiebung mit einer gleichzeitigen Biegung in Z-Richtung, die mit großer Vorsicht zu betrachten ist. Die dritte Eigenform ist eine Torsion, welche wiederum zu einer kritischen Verschiebung der Magnete senkrecht zur Teilchenstrahlrichtung führt.

Das Verformungsbild der Referenzstruktur zeigt maximale Verformungen von 0,121 mm, die im Bereich der Magnettöpfe auftreten. Ein vertikales Verschieben der Magnete um den ermittelten Betrag liegt über den zulässigen Verschiebungen der Magnete. Letztere liegen nach Aussagen des DESY im ein- bis zweistelligen Mikrometerbereich. Abgesehen von den maximalen Verformungen an den Magnettöpfen ist an dem Verformungsbild erkennbar, dass sich die linke Strukturhälfte stärker verformt als die rechte. Diese unsymmetrische Verformung ist auf die ebenfalls unsymmetrischen Auflagerpunkte zurückzuführen: Während die linke Strukturhälfte nur einen Auflagerpunkte aufweist, ist die rechte Strukturhälfte auf zwei Punkten gelagert.

Die hohen Verformungswerte an den Magnettöpfen lassen sich vermutlich ebenfalls mit den Randbedingungen begründen. Die aktuell eingesetzten Girderstrukturen, die ungefähr auf Höhe der Magnettöpfe ihre vier Aufhängepunkte besitzen, werden durch diese Auflager in den Bereichen der Lasteinleitung gestützt. Dahingegen weist die hier berechnete Struktur direkt unterhalb der Magnettöpfe kaum stützende Strukturelemente auf.

Grundsätzlich wären Eigenfrequenzen innerhalb des kritischen Frequenzbereichs akzeptabel, wenn die zugehörigen Eigenformen lediglich Bewegungen in Richtung des Teilchenstrahls darstellen würden und die Struktursteifigkeit hinreichend

groß wäre. Dies ist hier jedoch nicht der Fall. Außerdem fallen die Verformungen unter Eigenlast vergleichsweise hoch aus. Aus diesem Grund ist ein Einsatz der hier betrachteten Referenzstruktur unter den definierten Randbedingungen im Teilchenbeschleuniger mit Vorsicht zu realisieren. Vielmehr sind weitergehende Untersuchungen hinsichtlich der zu definierenden Randbedingungen notwendig. Jedoch lässt sich das Modell für diese Arbeit unter Berücksichtigung der genannten Punkte als Referenzstruktur verwenden.

4.3 GITTERSTRUKTUREN

Durch die zunächst durchgeführte Gitterstudie ist eine hinreichende Vernetzung ermittelt worden, deren Ergebnis von den Ergebnissen bei feineren Vernetzungen um weniger als 5% abweicht. Dies wird analog zu der Gitterstudie der 3D-Struktur als Indiz dafür angesehen, dass die Elementgröße der hinreichenden Vernetzung die Ergebnisse vernachlässigbar gering beeinflusst.

Die Betrachtung der Ergebnisse der Gitter- und Wabenstrukturen verdeutlicht, dass durch den Einsatz dieser eine höhere erste Eigenfrequenz bei gleichzeitig höherer Steifigkeit als die Referenzstruktur erreicht werden kann. Insgesamt ist bei allen Gitterstrukturen zu erkennen, dass die Eigenfrequenz mit der Steifigkeit zunimmt. Diese Erkenntnis entspricht den Resultaten von Xu und Qiu (2013), nach denen die Eigenfrequenz eines Sandwichbalkens mit Fachwerkkern mit der Steifigkeit steigt. Während die Steifigkeitszunahme bei Xu und Qiu (2013) durch Variation des Materials und somit des E-Moduls erreicht wurde, geschieht dies in der vorliegenden Arbeit durch Veränderung der Geometrie und folglich des Flächenträgheitsmomentes bei konstantem E-Modul. Werden weiter die unregelmäßigen Waben- bzw. Gitterstrukturen mit den regelmäßigen Gittern verglichen, so weisen letztere durchschnittlich höhere maximale Verformungen unter Eigenlast auf. Aufgrund des konstanten Materials lässt sich dies ebenfalls mit dem Flächenträgheitsmoment sowie der Massenverteilung begründen. Analog dazu sind in den Ergebnissen eingangs aufgeführter Untersuchungen von z. B. Van der Burg et al. (1997), Zhu et al. (2001) und Li et al. (2005) höhere Steifigkeiten bei unregelmäßigen Strukturen im Vergleich zu regelmäßigen Gittern zu verzeichnen. Darüber hinaus weisen die hier betrachteten, unregelmäßigen Strukturen in Analogie zu Syring (2017) nicht nur höhere Steifigkeiten auf, sondern besitzen auch höhere Eigenfrequenzen als die regelmäßigen Gitter.

Das sehr große Potenzial von Gitterstrukturen hinsichtlich der Schwingungseigenschaften ist an der Darstellung des Kehrwerts der maximalen Verformung (= Steifigkeit) in Abhängigkeit von der ersten Eigenfrequenz multipliziert mit der Masse erkennbar (Abbildung 3.6): Für jede der vier Gitterstrukturen gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, Eigenfrequenzen und Steifigkeiten zu kombinieren. Hierbei ist vor allem bei dem unregelmäßigen Gitter auf Basis der Verbindung benachbarter Punkte und dem regelmäßigen Rechteckgitter zu betonen, dass die Werte teilweise eine hohe Streuung aufweisen. So lassen sich für eine gewünschte Steifigkeit verschiedene Strukturen unterschiedlicher erster Eigenfrequenz finden. Genauso können für eine vorgegebene erste Eigenfrequenz verschiedene Strukturen mit unterschiedlichen Steifigkeiten gewählt werden. Besonders bei dem unregelmä-

ßigen Gitter der Nachbarverbindung ist eine große Bandbreite an Steifigkeiten für eine bestimmte Eigenfrequenz zu finden.

Nach Gleichung 2.21 ist bei einem Einmassenschwinger das Quadrat der Eigenfrequenz proportional zur Steifigkeit und zum Kehrwert der Masse. In der graphischen Darstellung (Abbildung 3.6) ist die Steifigkeit (Kehrwert der maximalen Verformung) in Abhängigkeit von dem Produkt aus dem Quadrat der Eigenfrequenz und der Masse dargestellt. Für einen Einmassenschwinger wäre ein linearer Zusammenhang zu erwarten. Auch für die Gitterstrukturen finden sich lineare Tendenzen in den Werten. Jedoch sind die erwähnten Streuungen der Werte zu verzeichnen. Diese Streuungen sind vermutlich auf die Massenverteilung und/ oder die Steifigkeitsverteilung zurückzuführen. So zeigen die Ergebnisse, dass durch eine geeignete Massen- oder Steifigkeitsverteilung die Eigenfrequenzen in teilweise großem Umfang positiv oder negativ beeinflusst werden können. Auch Syring (2017) ermittelte in ihren Untersuchungen des Schwingungsverhaltens von Sandwichplatten mit regelmäßigen und unregelmäßigen Wabenkernen einen starken Einfluss der Massen- und Steifigkeitsverteilung auf die Eigenfrequenzen. Während im Zweidimensionalen eine Quantifizierung der Massenverteilung durchaus möglich ist (z. B. Verhältnis der Masse in der Plattenmitte zu der Masse an den äußeren Rändern), ist dies für die hier vorliegende, dreidimensionale Struktur etwas komplexer. Dennoch wäre es denkbar, eine einfache dreidimensionale Struktur in Bereiche aufzuteilen und die Masse jedes einzelnen Bereichs zu ermitteln. So könnten Zusammenhänge zwischen der Verteilung der Masse und der Eigenfrequenz aufgedeckt werden.

Neben dem Einfluss der Massenverteilung wäre es ebenfalls sehr interessant, den möglichen Zusammenhang zwischen der Eigenfrequenz und der Steifigkeitsverteilung zu untersuchen. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wirken sich Strukturbereiche geringerer Dichte und somit oft geringerer Steifigkeit auf die Eigenfrequenz der Gesamtstruktur aus. Auch dies könnte mit Hilfe der beschriebenen Aufteilung einer einfachen Geometrie in einzelne Bereiche und der bereichsweisen Ermittlung der Masse untersucht werden.

Abschließend sollte erwähnt werden, dass die Gitterstrukturen im Gegensatz zu den Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen nicht in einen Hohlquader konstruiert worden sind. Da letzterer nach den Hinweisen der Topologieoptimierungen zu einer höheren ersten Eigenfrequenz führen könnte, wäre ein Vergleich der betrachteten Strukturen mit Gitterstrukturen innerhalb eines Hohlquaders sehr spannend.

4.4 TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

Die durchgeführten Topologieoptimierungen führen zu nachvollziehbaren Ergebnissen. Für eine maximale Steifigkeit ergibt sich eine Struktur aus Gitterstreben, die an eine Brückenkonstruktion erinnert. Die Reanalyse zeigt eine hohe Steifigkeit der Struktur auf, wodurch das Ziel der Optimierung erreicht worden ist. Nach der für einen Einmassenschwinger geltenden Proportionalität des Quadrats der Eigenfrequenz zu der Steifigkeit wäre eine hohe Eigenfrequenz der Struktur zu erwarten gewesen. Gleichzeitig ist die Masse der Struktur verhältnismäßig gering, was die Eigenfrequenz ebenfalls positiv beeinflussen sollte. Jedoch weist die erste

Eigenfrequenz mit 8,773 Hz einen geringen Wert auf. Diese Tatsache deutet wieder darauf hin, dass neben der Strukturmasse und –steifigkeit vor allem auch die Verteilung von Masse und Steifigkeit die Eigenfrequenz beeinflussen.

Die Struktur zum Erreichen einer maximalen ersten Eigenfrequenz unterscheidet sich sehr von der Struktur für eine maximale Steifigkeit. Zum einen ist die Struktur hohl, zum anderen weist sie keine klaren Versteifungsstreben auf. Vielmehr ähnelt sie in gewisser Weise der Referenzstruktur, die ebenfalls einen Hohlkörper darstellt, der allerdings einige Querrippen beinhaltet. Die erste Eigenfrequenz liegt mit 10,032 Hz nur geringfügig über dem Resultat der anderen Topologieoptimierung. Gleichzeitig ist die maximale Verformung sogar noch höher als die der Referenzstruktur. Dies ist darauf zurückzuführen, dass vor allem die Magnettöpfe der linken Strukturhälfte kaum durch Strukturelemente gestützt werden.

Die Rekonstruktionen der Topologieoptimierungsergebnisse weisen vier bzw. fünf Eigenfrequenzen im Sperrbereich auf. Im Hinblick auf die zugehörigen Eigenformen entsprechen die ersten drei Eigenformen jeweils denjenigen der Referenzstruktur. Sie können im Resonanzfall zu nicht zulässigen Verschiebungen der Magnete führen und somit den Teilchenstrahl negativ beeinflussen. Auch die vierten bzw. fünften Eigenformen stellen Biegedeformationen dar, für die die zulässigen Toleranzen hinsichtlich der Magnetverschiebungen sehr gering sind.

Zusammenfassend gesagt zeigen die Ergebnisse der rekonstruierten Strukturen vergleichsweise geringe erste Eigenfrequenzen. Darüber hinaus treten bei der Struktur mit dem Ziel einer maximalen Eigenfrequenz ebenfalls hohe Verformungen auf. Außerdem können die Resultate aus den Topologieoptimierungen in den wenigsten Fällen direkt übernommen werden. Vielmehr dienen sie als Inspirationsquelle für die Generierung neuer Designs, mit denen bessere Ergebnisse erzielt werden können. Dies wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

4.5 STRUKTUREN NACH VORBILD DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

Es sind vier Modelle nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse entwickelt und berechnet worden. Analog zu den Gitterstrukturen zeigen auch hier die Ergebnisse ein hohes Potenzial der Strukturen auf (Abbildung 3.12). Während die Modelle nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit (Max. Steif. und Unt. Mag.) zu Strukturen mit einer relativ hohen Steifigkeit bei geringer erster Eigenfrequenz führen, ergibt das Modell für eine maximale Eigenfrequenz (Max. Freq.) Strukturen mit hohen ersten Eigenfrequenzen und geringeren Steifigkeiten. Bei allen drei Modellen sind neben den erkennbaren, linearen Zusammenhängen zwischen der Steifigkeit und dem Produkt aus dem Quadrat der Eigenfrequenz und der Masse auch Streuungen erkennbar. So lassen sich einer bestimmten Steifigkeit wieder verschiedene Eigenfrequenzen und umgekehrt zuordnen.

Das Kombinationsmodell beider Topologieoptimierungsergebnisse scheint eine Überlagerung der Ergebnisse der anderen drei Modelle zu sein, welche sich positiv auf die betrachteten Eigenschaften auswirkt. So werden sogar höhere Steifigkeiten als bei den Modellen mit dem Ziel einer hohen Steifigkeit erreicht. Gleichzeitig sind die ersten Eigenfrequenzen auch nahe an den Eigenfrequenzen des Modells für eine maximale Eigenfrequenz. Des Weiteren ist eine hohe Vielfalt an Kombinati-

onsmöglichkeiten für Steifigkeiten und Eigenfrequenzen erkennbar, die sich in der hohen Streuung der Daten dieses Modells zeigt: Die Steifigkeiten einer Struktur mit einer bestimmten ersten Eigenfrequenz können sich um Faktoren von über 2,0 unterscheiden. Genauso wie bei den Gitterstrukturen lassen sich vermutlich auch hier die Streuungen auf die Massen- und Steifigkeitsverteilungen zurückführen. Jedoch müsste dies, wie bereits im Abschnitt zu den Gitterstrukturen erwähnt, in weitergehenden Untersuchungen betrachtet werden.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass das angewandte Vorgehen, die Ergebnisse von Topologieoptimierungen zu abstrahieren und in weiterführenden, iterativen Optimierungsrechnungen die besten Strukturparameter zu finden, zu guten Resultaten führt. Die Strukturen zeigen im Hinblick auf die gewünschten Kriterien bessere Ergebnisse als die Rekonstruktionen der Topologieoptimierungen auf und können durch die Kombination beider Topologieoptimierungsergebnisse sogar zu weiteren positiven Veränderungen der Eigenschaften führen. Jedoch sei an dieser Stelle angemerkt, dass nur die Strukturen mit einer Girdermasse inklusive der Magnete von maximal 7,5 t aufgeführt sind. Möglicherweise sind bei den Modellen mit dem Ziel einer maximalen Steifigkeit Strukturen mit höheren Steifigkeiten aber gleichzeitig unzulässig hohen Massen erzielt worden.

4.6 ZUSAMMENFASSENDE DARSTELLUNGEN DER ERGEBNISSE

Im Vergleich zu der Referenzstruktur lassen sich mehrere Strukturen aufzeigen, die bessere Eigenschaften als die Referenzstruktur besitzen. Vor allem die unregelmäßige Gitterstruktur auf Basis der Verbindung benachbarter Punkte und die Kombination beider Topologieoptimierungsergebnisse weisen deutlich höhere erste Eigenfrequenzen und Steifigkeiten als die Referenz auf. So erreichen die unregelmäßigen Gitterstrukturen im Vergleich zur Referenzstruktur Zunahmen der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,43 bei gleichzeitiger Steifigkeitssteigerung um den Faktor 1,82. Die optimierten Strukturen in Anlehnung an die Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen führen zu einer Zunahme der ersten Eigenfrequenz um den Faktor 1,38, während die Steifigkeit um den Faktor 3,17 ansteigt. Dabei bleiben die Strukturmassen innerhalb der zulässigen Werte. Anzumerken ist jedoch, dass alle entwickelten Strukturen immer noch drei Eigenfrequenzen innerhalb des Sperrbereichs besitzen.

Im Abschnitt 4.2 zu der Referenzstruktur ist bereits diskutiert worden, dass das Modell bei Untersuchungen mit anderen Randbedingungen eine um den Faktor 3,13 höhere erste Eigenfrequenz aufweist. Diese liegt aber mit 41 Hz immer noch innerhalb des Sperrfilters. Unter der Annahme, dass eine ungefähre Übertragung des Faktors von 3,13 auf die Gitterstrukturen und die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen möglich ist, würden sich bei den besten Strukturen erste Eigenfrequenzen von über 50 Hz ergeben. Somit wären alle Eigenfrequenzen außerhalb des Sperrbereiches. Dies sollte jedoch in weiterführenden Untersuchungen überprüft werden.

Im Hinblick auf die Variation der Randbedingungen ist eine Abnahme der maximalen Verformung mit Verdoppelung der Federsteifigkeiten nachvollziehbar. Vor allem durch erhöhte Steifigkeiten der Auflager (Z-Federn) wird die Verformung

unter Eigenlast gestützt. Der Unterschied in der Verformung im Vergleich zu den vorherigen, geringeren Federsteifigkeiten variiert zwischen den Strukturen. Als Erklärung hierfür dient die Tatsache, dass jeweils nur der maximale Verformungswert betrachtet wird. Dieser tritt nicht bei jeder Struktur an der gleichen Stelle auf. Außerdem werden die Stellen, an denen die maximalen Verformungen auftreten, in Abhängigkeit von der Struktur mehr oder weniger stark durch die Auflager gestützt.

Die Verdopplung der Federsteifigkeiten führt weiter zur Zunahme der ersten Eigenfrequenz bei allen Strukturen. Da die Eigenfrequenz mit der Steifigkeit ansteigt (vgl. Gleichung 2.37) und die erhöhten Federsteifigkeiten zu höheren Steifigkeiten führen, ist das Ergebnis nachvollziehbar. Jedoch kann nicht allgemeingültig gesagt werden, dass eine vergleichsweise hohe Abnahme der maximalen Verformung zu einer hohen Zunahme der ersten Eigenfrequenz führt. Vielmehr hängen die Eigenfrequenzen neben der Steifigkeit auch von anderen Parametern ab, was bereits diskutiert wurde.

Die Veränderung des Materials hat einen hohen Einfluss auf die maximale Verformung und die erste Eigenfrequenz. So ist bei den meisten Strukturen mit der Abnahme des Elastizitätsmoduls von Stahl über Grauguss zu Aluminium auch eine Zunahme der maximalen Verformung zu verzeichnen, was den Aussagen der Gleichung 2.33 für die Balkendurchbiegung entspricht. Jedoch weisen einige Strukturen unter Verwendung von Aluminium geringere Verformungswerte als bei Grauguss auf. Ein Beziehen der jeweiligen maximalen Verformungen auf die Materialdichten zeigt bei allen Strukturen die gleichen Tendenzen auf. Dies deutet darauf hin, dass die Dichte einen hohen Einfluss auf die maximale Verformung hat, da letztere unter Eigenlast auftreten. Aluminium weist eine deutlich geringere Dichte als Grauguss auf, weshalb die wirkende Eigenlast ebenfalls geringer ist. Dass bei den meisten Strukturen die Verformungswerte bei Aluminium dennoch höher sind als bei Grauguss, hängt vermutlich damit zusammen, dass der größte Anteil der Eigenlast, der auf die Strukturen wirkt, jeweils aus den für alle Strukturen konstanten Massen der Magnete resultiert.

Im Hinblick auf den Einfluss des Materials auf die erste Eigenfrequenz nimmt letztere bei allen Strukturen von Stahl über Grauguss zu Aluminium ab. Dies hängt vermutlich mit der abnehmenden Steifigkeit zusammen. Ein Einfluss der Masse auf die erste Eigenfrequenz, die mit abnehmender Masse steigen müsste (vgl. Gleichung 2.37), kann direkt nicht erkannt werden. Der Masseinfluss ist aber vermutlich vorhanden bzw. überlagert sich mit dem Einfluss der Steifigkeit auf die Eigenfrequenz.

4.7 NUMERISCHE FEHLERQUELLEN

Abschließend soll kurz auf die möglichen Fehler durch die Nutzung numerischer Rechnungen hingewiesen werden.

Durch die innerhalb des numerischen Lösungsverfahrens durchgeführten Integrationen und Rundungen können leichte Abweichungen in den Ergebnissen von der Realität auftreten. Des Weiteren gilt es zu beachten, dass die Ergebnisse trotz durchgeführter Gitterstudien immer noch eine Abhängigkeit von der Vernetzung

aufweisen, da letztere aus Zeitgründen nicht unendlich fein sein kann. Auch der gewählte Elementtyp, die damit zusammenhängende Anzahl an Integrationspunkten und der Interpolationsgrad der Verschiebungsfunktionen bedingen das numerische Ergebnis. Vor allem im Hinblick auf die Gitterstrukturen und die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen sollte beachtet werden, dass die Modelle aus Schalen- und Balkenelementen zusammengesetzt sind. Überschneidungen der Querschnitte z. B. zweier Balkenelemente werden nicht als solche wahrgenommen. Diese Tatsache kann zum einen zur Berechnung einer Masse führen, die leicht über der Realität liegt. Zum anderen werden mögliche Punkte zur Kraftübertragung von einem Balkenelement zum nächsten nicht als solche erkannt. Jedoch treten in den vorliegenden Modellen vergleichsweise wenig Überschneidungen von Balkenquerschnitten auf. Schlussendlich beeinflussen neben der für die Referenzstruktur vereinfachten angenommenen Geometrie auch die definierten Randbedingungen, in denen die Auflager und Lenker als Federn abstrahiert werden, das Rechenergebnis.

4.8 FAZIT

Die Generierung bestmöglicher unregelmäßiger und regelmäßiger 3D-Gitterstrukturen unter Verwendung einer multikriteriellen Optimierung mit der Evolutionsstrategie zeigt eine Vielfalt von Strukturen auf. Hierbei übertreffen unregelmäßige Gitter sowohl die Referenzstruktur, als auch die regelmäßigen Gitterstrukturen in der ersten Eigenfrequenz und Steifigkeit. Die anschließende Durchführung von Topologieoptimierungen für das Magnetuntergestell des Teilchenbeschleunigers und die anschließende Übertragung der Topologieoptimierungsergebnisse auf parametrische Modelle ermöglicht erneute Optimierungsrechnungen. Diese führen ebenfalls zu einer hohen Bandbreite an Strukturen, welche verbesserte Eigenschaften im Hinblick auf die Referenzstruktur aufweisen. Sehr vielversprechende Ergebnisse liefern hierbei die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit sowie die Struktur, welche eine Kombination beider Topologieoptimierungen darstellt.

Insgesamt zeigen sowohl die Gitterstrukturen als auch die Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungen ein hohes Potenzial hinsichtlich der Beeinflussung der ersten Eigenfrequenz bei konstanter Steifigkeit auf, indem eine Geometrieänderung vorgenommen wird. So ermöglicht letztere beispielsweise eine Variation in der Struktursteifigkeit bei konstanter erster Eigenfrequenz durch Anpassung der Geometrie. Trotz der guten Ergebnisse sind für eine detaillierte Beschreibung der Zusammenhänge zwischen der Eigenfrequenz einer Struktur und anderen Struktureigenschaften jedoch weiterführende Untersuchungen notwendig.

LITERATURVERZEICHNIS

- Altair HyperWorks, Inc. (2009). *HyperWorks User's Guide: OptiStruct: Design Optimization*. URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Hyperworks/help/hwsolvers/hwsolvers.htm?design_optimization_os.htm (Zugriff am 08. 08. 2017).
- Aremu, A. O., Maskery, C., Tuck, C., Ashcroft, I. A., Wildman, R. D. und Hague, R. I. M (2014). „A comparative finite element study of cubic unit cells for selective laser melting“. In: *Twenty-Fifth Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium. 4.-6. August 2014, University of Austin, Texas, USA*, S. 1238–1249.
- Bendsøe, M. P. und Kikuchi, N. (1988). „Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method“. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 71.2, S. 197–224.
- Bendsøe, M. P. und Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization. Theory, Methods, and Applications*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Bomke, P. und Naguschewski, R. (2015). *Zwischenbericht Forschungsprojekt: Automatisierung und Vorbereitung zur Standardisierung des bionischen ELiSE-Verfahrens*. Unveröffentlicht.
- Boucher, M.-A., Smith, C. W., Scarpa, F., Rajasekaran, R. und Evans, K. E. (2013). „Effective topologies for vibration damping inserts in honeycomb structures“. In: *Composite Structures* 106, S. 1–14.
- Brackett, D, Ashcroft, I und Hague, R (2011). „Topology optimization for additive manufacturing“. In: *Proceedings of the solid freeform fabrication symposium, Austin, TX*. Bd. 1, S. 348–362.
- Coello Coello, C. A. (1999). „A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques“. In: *Knowledge and Information systems* 1.3, S. 129–156.
- Coello Coello, C. A., Van Veldhuizen, D. A. und Lamont, G. A. (2002). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. 1. Aufl. New York: Springer Science+Business Media.
- DESY (2017). *PETRA III: Photon Beamlines*. URL: http://photon-science.desy.de/facilities/petra_iii/beamlines/index_eng.html (Zugriff am 06.09. 2017).
- Deshpande, V. S., Fleck, N. A. und Ashby, M. F. (2001). „Effective properties of the octet-truss lattice material“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49.8, S. 1747–1769.
- Díaz, A. R. und Kikuchi, N. (1992). „Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35.7, S. 1487–1502.

- Du, J. und Olhoff, N. (2007). „Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 34.2, S. 91–110.
- Dupuis, F., Sadoc, J.-F., Jullien, R., Angelov, B. und Mornon, J.-P. (2005). „Voro3D: 3D Voronoi tessellations applied to protein structures“. In: *Bioinformatics* 21.8, S. 1715–1716.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Fazekas, A., Dendievel, R., Salvo, L. und Bréchet, Y. (2002). „Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2D cellular structures“. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 44.10, S. 2047–2066.
- Freymann, R. (2011). *Strukturodynamik: Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Gan, Y. X., Chen, C. und Shen, Y. P. (2005). „Three-dimensional modeling of the mechanical property of linearly elastic open cell foams“. In: *International Journal of Solids and Structures* 42.26, S. 6628–6642.
- Gasch, R., Knothe, K. und Liebich, R. (2012). *Strukturodynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Göttsche, J. und Petersen, M. (2015). *Festigkeitslehre - klipp und klar: für Studierende des Bauingenieurwesens*. 3. Auflage. München: Carl Hanser Verlag.
- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J. und Wall, W. A. (2013). *Technische Mechanik 1: Statik*. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J. und Wall, W. A. (2014). *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. 12. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Gross, D., Hauger, W. und Wriggers, P. (2014). *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 9. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J. und Wall, W. A. (2015). *Technische Mechanik 3: Kinetik*. 13. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- Grotelüsch, F. (2012). *DESY: Forschung für die Zukunft*. URL: https://pr.desy.de/sites2009/site_pr/content/e113/e143399/e143405/DESY_Broschuere_web_ger.pdf (Zugriff am 15.08.2017).
- Hamm, C. E., Merkel, R., Springer, O., Jurkojc, P., Maier, C., Prechtel, K. und Smetacek, V. (2003). „Architecture and material properties of diatom shells provide effective mechanical protection“. In: *Nature* 421.6925, S. 841–843.
- Jäger, J., Mastel, R. und Knaebel, M. (2016). *Technische Schwingungslehre: Grundlagen - Modellbildung - Anwendungen*. 9. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- Jehring, U., Weise, J., Wöstmann, F.-J. und Stephani, G. (2009). „Aluminiumwerkstoffe mit Schwingungsdämpfer“. In: *Lightweight Design* 2.6, S. 24–27.

- Jog, C. S. (2002). „Topology design of structures subjected to periodic loading“. In: *Journal of Sound and Vibration* 253 (3), S. 687–709.
- Kim, T. S., Kim, J. E. und Kim, Y. Y. (2004). „Parallelized structural topology optimization for eigenvalue problems“. In: *International journal of solids and structures* 41.9, S. 2623–2641.
- Klein, B. (2012). *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. 9. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- Klein, B. (2013). *Leichtbau-Konstruktion: Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*. 10. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- Krog, L., Tucker, A. und Kemp, M. (2004). „Topology optimization of aircraft wing ribs“. In: *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary analysis and optimization conference*. AIAA/ISSMO, Albany, New York.
- Laumanns, M., Zitzler, E. und Thiele, L. (2001). „On the effects of archiving, elitism, and density based selection in evolutionary multi-objective optimization“. In: *Evolutionary multi-criterion optimization*. Hrsg. von E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. Coello Coello und D. Corne. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, S. 181–196.
- Li, K., Gao, X.-L. und Subhash, G. (2005). „Effects of cell shape and cell wall thickness variations on the elastic properties of two-dimensional cellular solids“. In: *International Journal of Solids and Structures* 42.5, S. 1777–1795.
- Li, Z., Zhang, J., Fan, J., Wang, Z. und Zhao, L. (2014). „On crushing response of the three-dimensional closed-cell foam based on Voronoi model“. In: *Mechanics of Materials* 68, S. 85–94.
- Luo, Z., Yang, J. und Chen, L. (2006). „A new procedure for aerodynamic missile designs using topological optimization approach of continuum structures“. In: *Aerospace Science and Technology* 10.5, S. 364–373.
- Maeda, Y., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., Matsui, K. und Terada, K. (2006). „Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67.5, S. 597–628.
- Maier, M., Niebuhr, N., Hamm, C. und Thoben, K.-D. (2015). „Eine Konstruktionsmethodik des bionischen Leichtbaus“. In: *Lightweight Design* 8.3, S. 34–39.
- Min, S., Nishiwaki, S. und Kikuchi, N. (2000). „Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization“. In: *Computers & Structures* 75.1, S. 93–116.
- Naguschewski, R. (2016). „Spannungsbasierte Konstruktion von inhomogenen Gitterstrukturen sowie deren thermo-mechanische Bewertung für Selektives Laserschmelzen“. Masterarbeit. Universität Bremen.

- Nalluri, R. K. und Dhekane, A. S. (2014). „Finite Element Analysis of Different Cube Type Vibration Fixture Made of Aluminum Alloys“. In: *International Journal of Engineering Research & Technology* 3 (7), S. 245–249.
- Pedersen, N. L. (2000). „Maximization of eigenvalues using topology optimization“. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 20.1, S. 2–11.
- Pegg, E. C., Murray, D. W., Pandit, H. G., O'Connor, J. J. und Gill, H. S. (2013). „Fracture of mobile unicompartmental knee bearings: A parametric finite element study“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* 227.11, S. 1213–1223.
- Preisinger, C. (2013). „Linking structure and parametric geometry“. In: *Architectural Design* 83.2, S. 110–113.
- Querin, O. M., Young, V., Steven, G. P. und Xie, Y. M. (2000). „Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation“. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 189.2, S. 559–573.
- Reichelt, O. (2014). „Dynamische Untersuchung einer Magnetaufstellung und Konstruktion einer verbesserten Variante“. Bachelorarbeit. Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg in Kooperation mit dem Deutschen Elektronen-Synchrotron Hamburg.
- Round, F. E., Crawford, R. M. und Mann, D. G. (1990). *Diatoms: Biology and Morphology of the Genera*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rozvany, G. I. N. (2009). „A critical review of established methods of structural topology optimization“. In: *Structural and multidisciplinary optimization* 37.3, S. 217–237.
- Schlösser, M. (2006). *The PETRA III Girder concept. Presentation at 9th International Workshop on Accelerator Alignment*. URL: http://www.slac.stanford.edu/econf/C06092511/presents/FR003_PPT.PDF (Zugriff am 15.08.2017).
- Schmidt, A. (1902). *Vorläufige Erläuterungen Zu A. Schmidt's Atlas Der Diatomaceenkunde*. Atlas der Diatomaceenkunde. O.R. Reisland.
- Silva, M. J., Hayes, W. C. und Gibson, L. J. (1995). „The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids“. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 37.11, S. 1161–1177.
- Simone, A. E. und Gibson, L. J. (1998). „Effects of solid distribution on the stiffness and strength of metallic foams“. In: *Acta Materialia* 46.6, S. 2139–2150.
- Song, Y., Wang, Z., Zhao, L. und Luo, J. (2010). „Dynamic crushing behavior of 3D closed-cell foams based on Voronoi random model“. In: *Materials & Design* 31.9, S. 4281–4289.
- Syring, L. I. (2017). „Einfluss verschiedener Wabenkonfigurationen auf das Schwingungsverhalten und die Steifigkeit von Sandwichplatten“. Bachelorarbeit. Westfälische Hochschule Bocholt in Kooperation mit dem Alfred-Wegener-Institut in Bremerhaven.

- Van der Burg, M. W. D., Shulmeister, V., Van der Geissen, E. und Marissen, R. (1997). „On the linear elastic properties of regular and random open-cell foam models“. In: *Journal of Cellular Plastics* 33.1, S. 31–54.
- Wallach, J. C. und Gibson, L. J. (2001). „Mechanical behavior of a three-dimensional truss material“. In: *International Journal of Solids and Structures* 38.40, S. 7181–7196.
- Xu, M. und Qiu, Z. (2013). „Free vibration analysis and optimization of composite lattice truss core sandwich beams with interval parameters“. In: *Composite Structures* 106, S. 85–95.
- Yang, J., Xiong, J., Ma, L., Wang, B., Zhang, G. und Wu, L. (2013). „Vibration and damping characteristics of hybrid carbon fiber composite pyramidal truss sandwich panels with viscoelastic layers“. In: *Composite Structures* 106, S. 570–580.
- Ying, S., Xu, G., Li, C. und Mao, Z. (2015). „Point Cluster Analysis Using a 3D Voronoi Diagram with Applications in Point Cloud Segmentation“. In: *ISPRS International Journal of Geo-Information* 4.3, S. 1480–1499.
- Yu, S. D. und Cleghorn, W. L. (2005). „Free flexural vibration analysis of symmetric honeycomb panels“. In: *Journal of Sound and Vibration* 284.1, S. 189–204.
- Zheng, Z., Yu, J. und Li, J. (2005). „Dynamic crushing of 2D cellular structures: a finite element study“. In: *International Journal of Impact Engineering* 32.1, S. 650–664.
- Zhu, H. X. und Windle, A. H. (2002). „Effects of cell irregularity on the high strain compression of open-cell foams“. In: *Acta Materialia* 50.5, S. 1041–1052.
- Zhu, H. X., Hobdell, J. R. und Windle, A. H. (2000). „Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams“. In: *Acta materialia* 48.20, S. 4893–4900.
- Zhu, H. X., Hobdell, J. R. und Windle, A. H. (2001). „Effects of cell irregularity on the elastic properties of 2D Voronoi honeycombs“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 49.4, S. 857–870.

A ANHANG

A.1 ANALYTISCHE ABSCHÄTZUNG

In Tabelle A.1 sind die Vernetzungseinstellungen für die numerischen Rechnungen mit ANSYS und OptiStruct aufgeführt. Hierbei sind bei OptiStruct die Anzahlen an Knoten und Elementen für alle Divisoren konstant. In ANSYS werden 3D-Elemente mit einer quadratischen Interpolation (20 Knoten pro Element) eingesetzt (SOLID186). OptiStruct verwendet Balkenelemente linearer Interpolation (CBEAM), die alle durchschnittlich 100 mm lang sind.

Tabelle A.1: Vernetzungseinstellungen für die numerischen Rechnungen mit ANSYS und OptiStruct zum Vergleich mit den analytischen Ergebnissen.

	Divisor d	Anzahl an Knoten	Anzahl an Elementen
ANSYS	1	294.705	68.400
	2	82.605	18.000
	3	40.849	8.400
	4	23.363	4.500
	5	16.429	3.000
	6	13.565	2.400
	7	10.701	1.800
	8	8.440	1.350
	9	8.440	1.350
	10	6.179	900
OptiStruct	1 - 10	43	42

A.2 REFERENZSTRUKTUR

A.2.1 CAD-Modell der Referenzstruktur

In Abbildung A.1 ist das CAD-Modell der Referenzstruktur, die vom DESY zur Verfügung gestellt wurde, dargestellt.

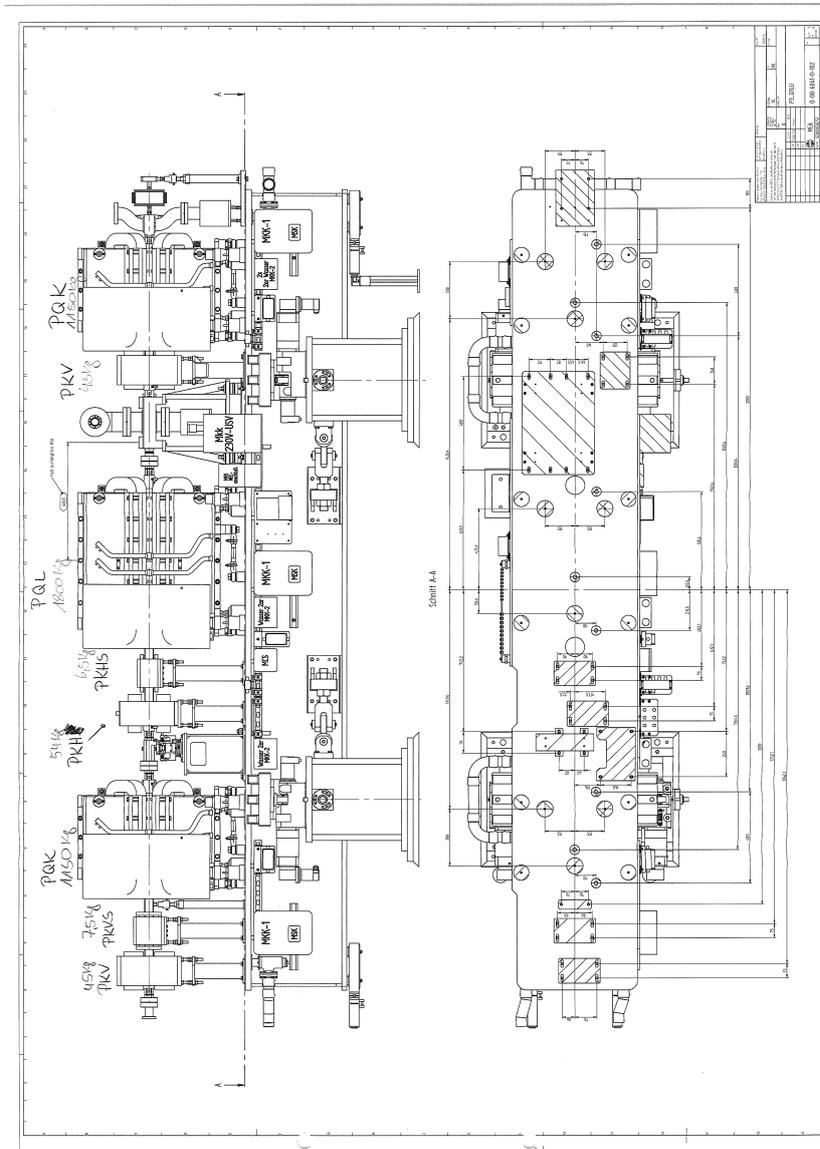


Abbildung A.1: Vom DESY zur Verfügung gestellte technische Zeichnung der Referenzstruktur.

TECHNISCHE ZEICHNUNG A3

A.2.2 Abstrahierte Referenzstruktur

Die Abbildungen A.2 und A.3 zeigen zwei verschiedene Ansichten der abstrahierten Referenzstruktur.

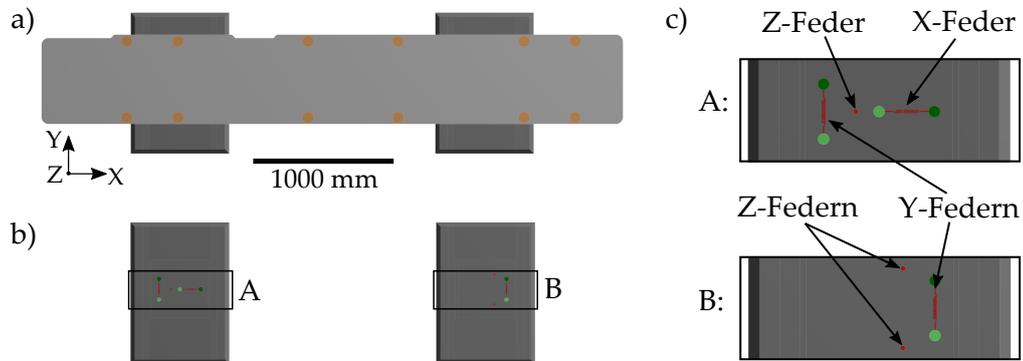


Abbildung A.2: a) zeigt eine Aufsicht auf die Referenzstruktur aus Girder (hellgrau) und Füßen (dunkelgrau), wobei in b) der Girder inklusive der Magnettöpfe (orange) ausgeblendet sind. c) veranschaulicht in einer Detailansicht die insgesamt sechs Federn (rot) zwischen dem Girder und den Füßen. In grün sind die Lenkerbalken erkennbar, zwischen denen die Federn in X- und Y-Richtung definiert sind. Die dunkelgrünen Lenkerbalken sind am Girder befestigt, die hellgrünen an den Füßen.

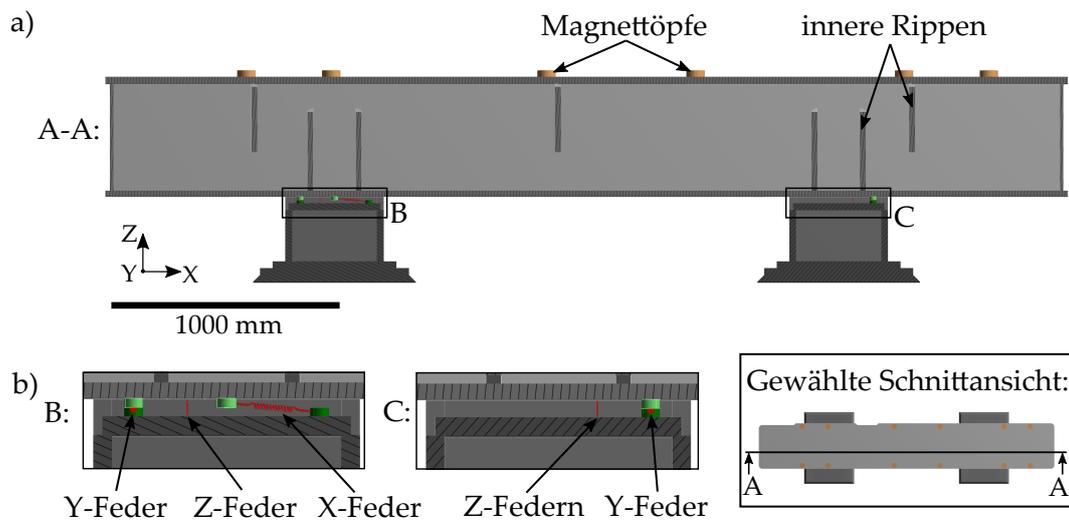


Abbildung A.3: Seitliche Schnittansicht der Referenzstruktur aus Girder (hellgrau) und Füßen (dunkelgrau). In a) sind die Rippen des Girders erkennbar. b) zeigt die Anordnung der insgesamt sechs Federn in X-, Y- und Z-Richtung. In hell- und dunkelgrün sind die Lenkerbalken des Girders bzw. der Füße dargestellt.

A.2.3 Hinreichende Vernetzung der Referenzstruktur

Die Abbildung A.4 stellt die hinreichende Vernetzung der Referenzstruktur dar.

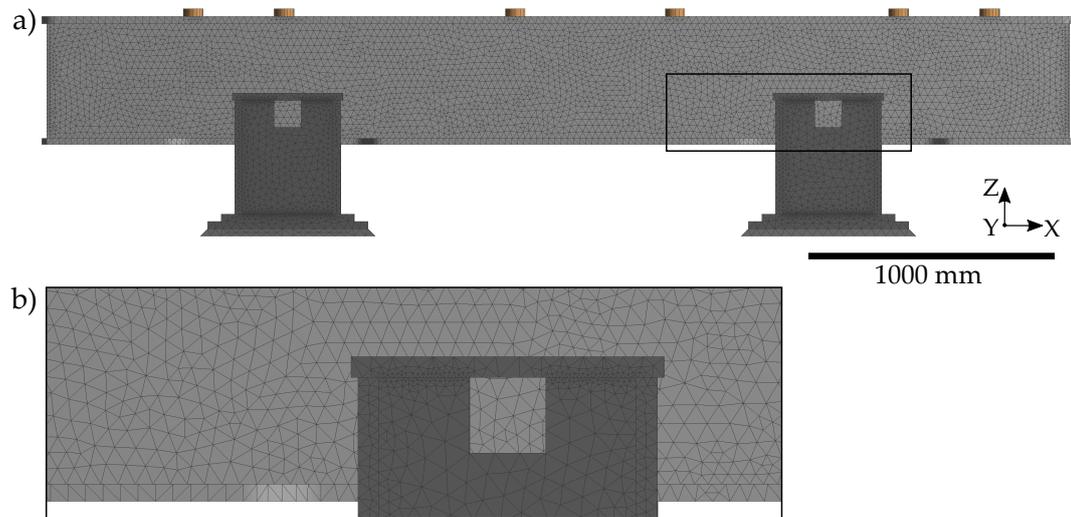


Abbildung A.4: Darstellung der hinreichenden Vernetzung der Referenzstruktur mit insgesamt 255.655 Elementen. Der in a) markierte Ausschnitt ist in b) vergrößert dargestellt.

A.2.4 Numerische Berechnung der Federsteifigkeiten

Für die numerische Berechnung der Federsteifigkeiten werden die in Abbildung A.5 dargestellten Modellaufbauten vorgenommen. In der Abbildung ist gleichzeitig die Vernetzung der Zylinder erkennbar, deren Eigenschaften in Tabelle A.2 aufgeführt sind.

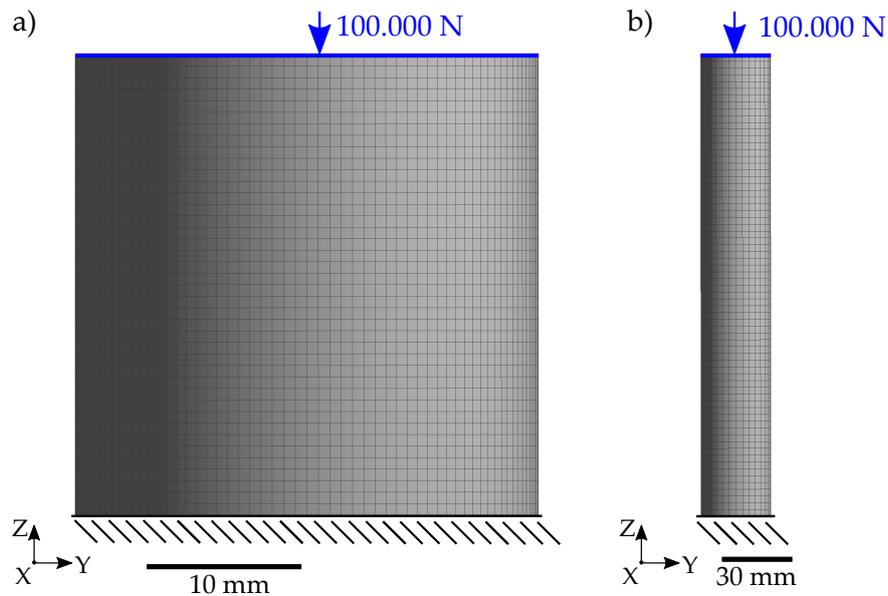


Abbildung A.5: Modellaufbau zur Berechnung der Steifigkeiten für die Federn in Z-Richtung (a) und in X- und Y-Richtung (b).

Tabelle A.2: Vernetzungseigenschaften für die beiden Zylinder zur Ermittlung der Federsteifigkeiten.

	Zylinder für Z-Feder	Zylinder für X- und Y-Federn
Knoten	219.015	35.608
Elemente	51.840	7.956
Freiheitsgrade	657.045	106.824

Die resultierende Verformung der Zylinder ist in Abbildung A.6 sichtbar. Für den Zylinder mit einer Länge von 30 mm ergibt sich eine maximale Verformung von 0,021 mm, während sich der 200 mm-lange Zylinder um maximal 0,141 mm verformt. Ein Dividieren der aufgetragenen Flächenlast durch die jeweilige maximale Verformung ergibt die folgenden Federsteifigkeiten:

- Steifigkeit der Z-Federn (30 mm-Zylinder): $4,76 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}$
- Steifigkeit der X- und Y-Federn (200 mm-Zylinder): $7,09 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-1}$

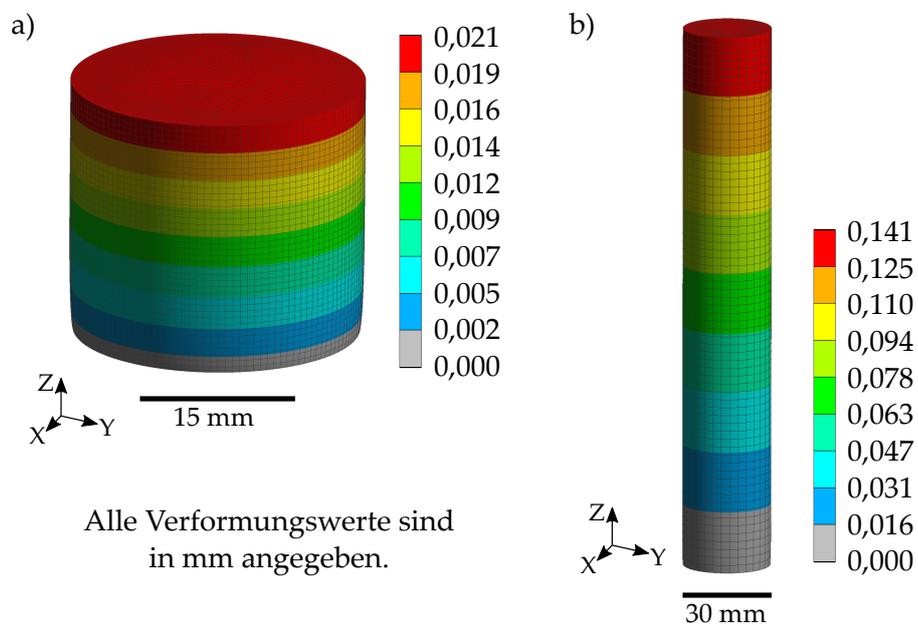


Abbildung A.6: Verformung der mit einer Kraft belasteten Zylinder, mit Hilfe derer die Federsteifigkeiten in Z-Richtung (a) und in X- und Y-Richtung (b) ermittelt werden

A.2.5 Eigenfrequenzen und Eigenformen der Referenzstruktur

Für die Referenzstruktur sind die numerisch ermittelten Eigenfrequenzen mit den jeweiligen Eigenformen in Abbildung A.7 aufgeführt.

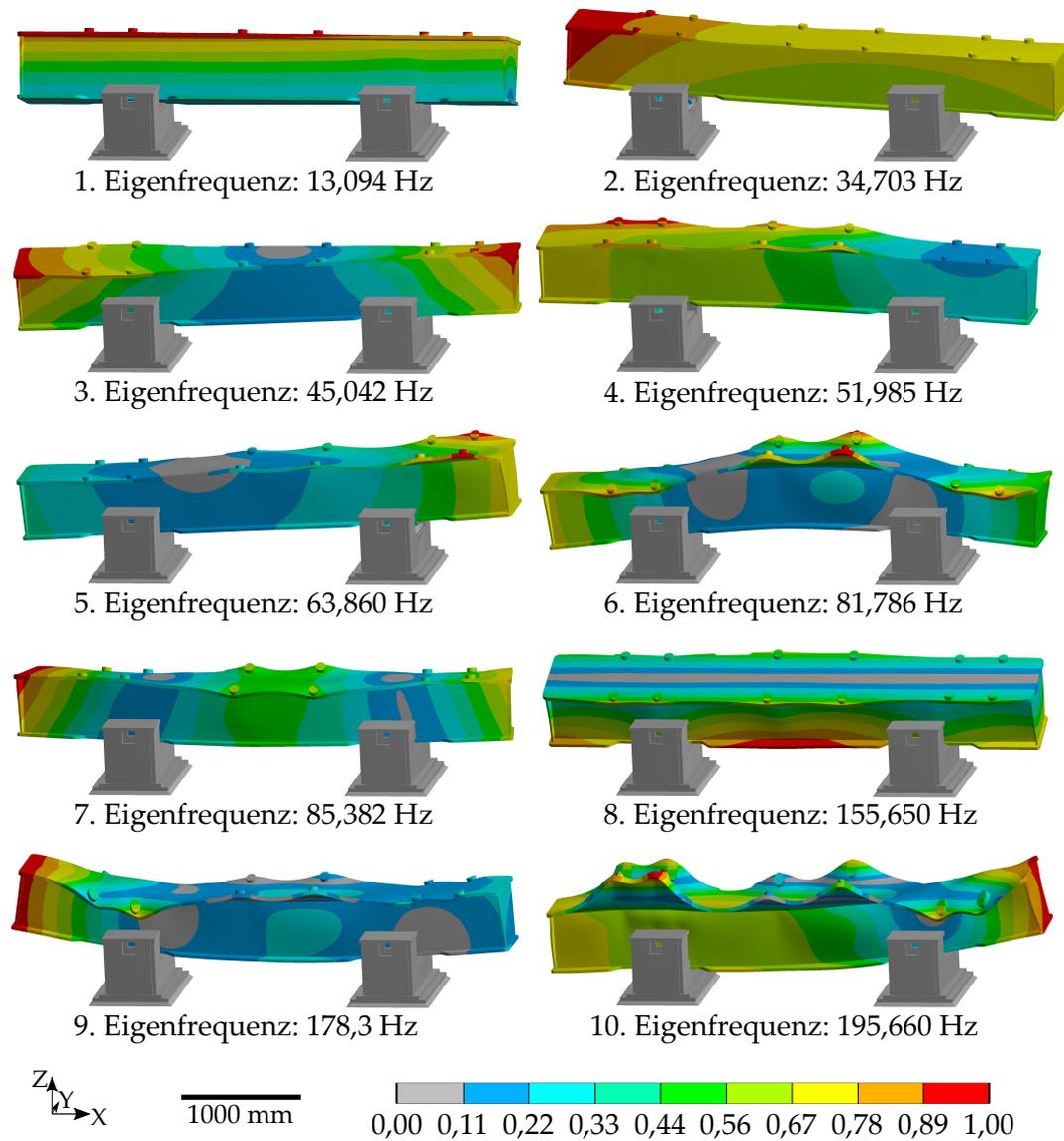


Abbildung A.7: Darstellung der ersten zehn Eigenformen mit den jeweiligen Eigenfrequenzen der Referenzstruktur. Für eine bessere Übersichtlichkeit ist die Vernetzung ausgeblendet. Die Farben geben einen Hinweis auf die Schwingungsamplitude der jeweiligen Strukturelemente: Von rot über grün nach grau nimmt die Amplitude ab. Dabei gibt die Legende die Schwingungsamplitude bezogen auf den jeweiligen Maximalwert der Amplitude an. Die verschiedenen Eigenformen lassen sich jedoch nicht hinsichtlich ihrer Farbgebungen miteinander vergleichen.

A.3 GITTERSTRUKTUREN IM DESIGNRAUM

A.3.1 *Begriffe der Evolutionsstrategie*

Für die folgenden biologischen Begriffe wird ihre Bedeutung in der vorliegenden Arbeit erläutert.

Elitismus:

Bevorzugung der Strukturen, die gemäß der Definition der Elite angehören

Gen:

Parameter

Generation:

Iteration, in der aus den Ausgangsstrukturen unter den definierten Bedingungen neue Strukturen generiert werden

Genpool:

Menge an verschiedenen, zufällig generierten Strukturen unterschiedlicher Parameterkombinationen

Individuum:

Struktur mit einer bestimmten Parameterkombination

Mutation:

Veränderung eines Parameters

Rekombination:

Austausch von Parameterwerten zweier Strukturen

Selektion:

Auswahl bestimmter Strukturen nach definierten Kriterien

Variabilität:

Unterschiede zwischen Strukturen einer Iteration

A.3.2 Hinreichende Vernetzung der Gitterstrukturen

Im Rahmen der Gitterstudie für die Gitterstrukturen wird eine hinreichende Vernetzung ermittelt, deren Eigenschaften in Tabelle A.3 aufgeführt sind. Weiter zeigt Abbildung A.8 eine Ansicht der hinreichenden Vernetzung.

Tabelle A.3: Eigenschaften der hinreichenden Vernetzung für die Gitterstrukturen

Knoten		3699
Elemente	CONM2 (Masse)	12
	CBUSH (Feder)	6
	CBEAM (Balken)	6
	CTRIA3 (Dreieck)	442
	CQUAD4 (Viereck)	3.576
	Summe	4.042
Freiheitsgrade		12.096

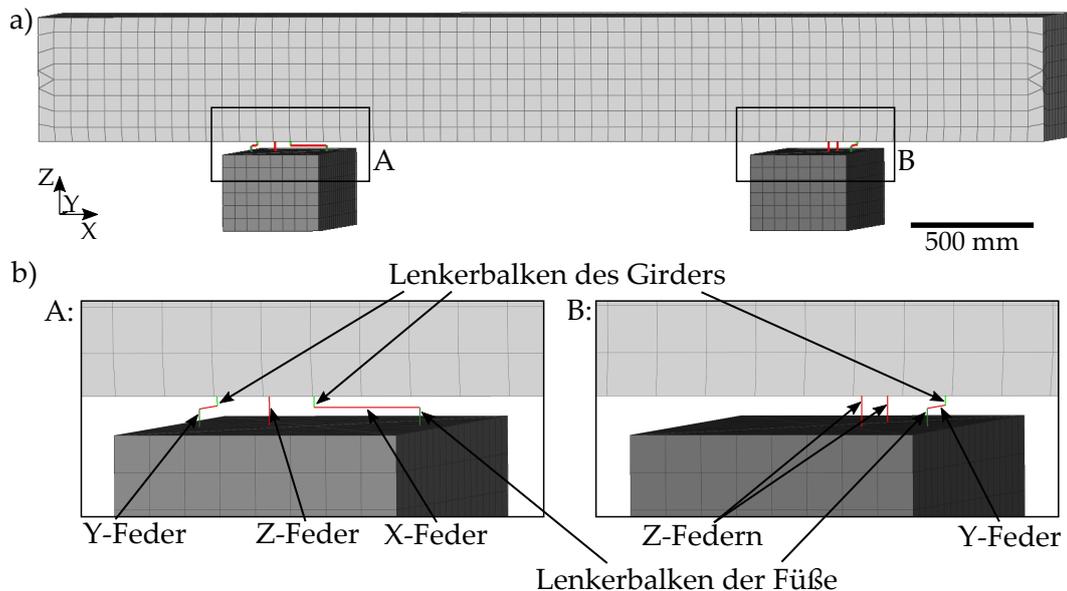


Abbildung A.8: Darstellung der hinreichenden Vernetzung für die Gitterstruktur in a). Die Detailansichten in b) zeigen jeweils die Verbindungen des Girders mit den Füßen über die sechs Federn. Dabei sind die Federn in X- und Y-Richtung an den Lenkerbalken befestigt. Die am Girder befestigten Magnete sind hier nicht dargestellt.

A.3.3 Aufbau des Designraums

Der Designraum und die dazugehörigen Komponenten sind in Abbildung A.9 dargestellt. Die Maße entsprechen den Abmaßen des Referenzmodells.

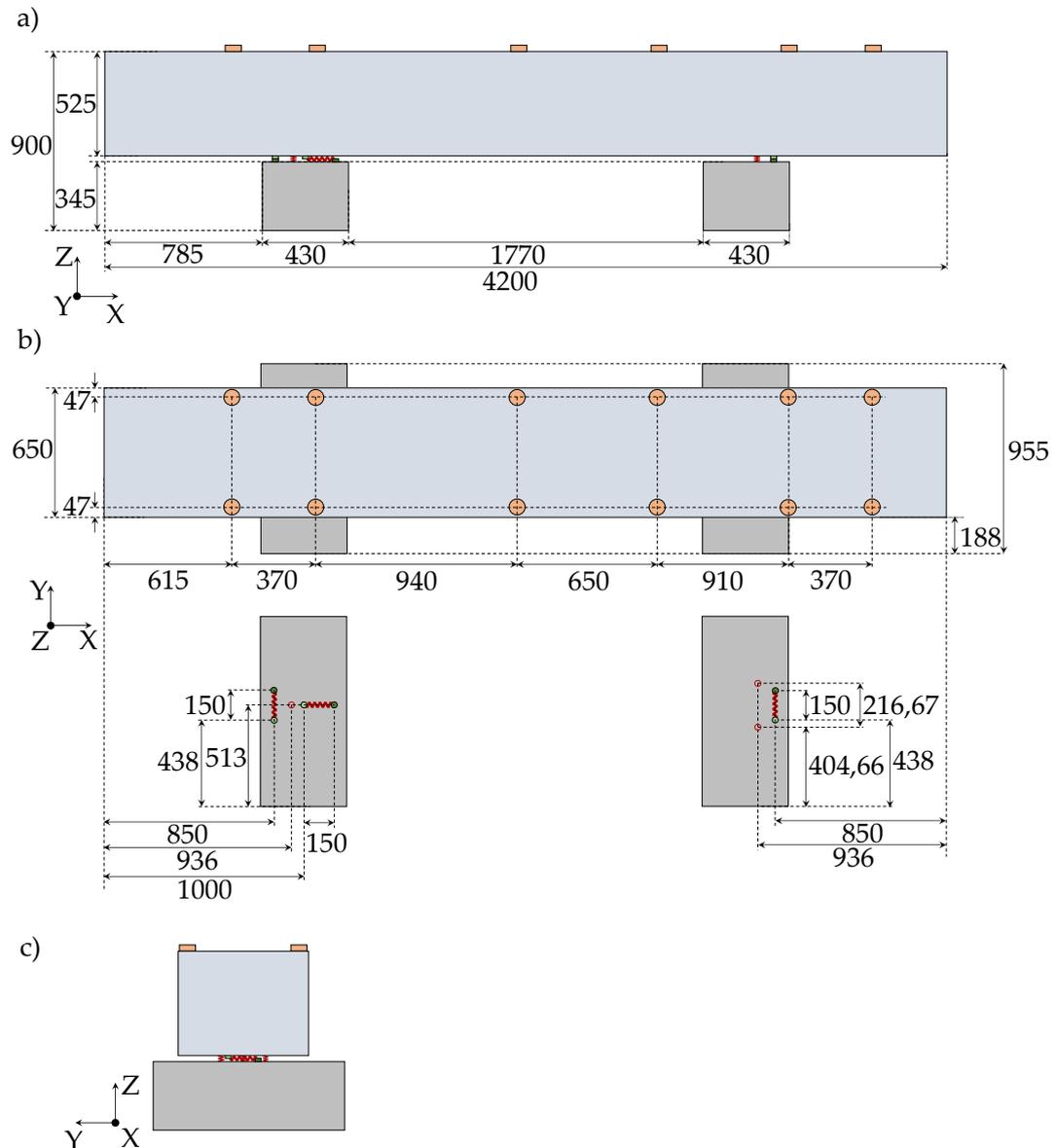


Abbildung A.9: Schematische Darstellung des Designraumes (hellgrau) in verschiedenen Ansichten. Auf dem Designraum befinden sich die Magnettöpfe (orange). Die Federn (rot) verbinden den Designraum mit den Füßen (dunkelgrau) und sind an den Lenkerbalken (hell- und dunkelgrün) befestigt. a) Vorderansicht, b) Aufsicht (*oben*: vollständiger Aufbau, *unten*: Designraum mit Magnettöpfen ist ausgeblendet), c) Seitenansicht. Alle Maßangaben sind in mm.

A.3.4 Funktionen der Grasshopper-Programmbibliothek

Die wichtigsten in dieser Arbeit eingesetzten Funktionen des **ELiSE**-Zusatzmoduls innerhalb der Grasshopper-Umgebung werden kurz erläutert. Jede Komponente besitzt Eingabe- und Ausgabedaten.

Dichte-basierte Punkteverteilung

Ein Algorithmus, der bereits von Bomke und Naguschewski (2015) entworfen und von Naguschewski (2016) weiterentwickelt wurde, verteilt Punkte auf einer **NURBS**-Fläche (Nicht-uniforme rationale B-Splines) oder einem Polygonnetz anhand eines Dichtefeldes.

- Eingaben:
 - **NURBS**-Fläche oder Polygonnetz für die Punkteverteilung
 - Einstellungen der Dateninterpolation (Dichtefeld)
 - Fixierte Punkte
 - Startpunkte
 - Detaillierte Einstellungen
- Ausgaben:
 - Punkte, die anhand des Dichtefeldes verteilt wurden
 - Radien für die Konstruktion von Kreisen bzw. Kugeln um die Punkte
 - Residuen aller Iterationen (Residuum: Bewegungstrecken der Punkte normiert durch die Bewegungstrecken der Nachbarn)

Einstellungen der Punkteverteilung

Die Komponente definiert die detaillierten Einstellungen der Punkteverteilung.

- Eingaben:
 - Maximale Anzahl an Iterationen für die Ermittlung der Punkteverteilung
 - Bedingung für das Beenden einer Iteration, welche das Verhältnis aus der durchschnittlichen Länge des Bewegungsvektors und der durchschnittlichen Punktedichte darstellt
 - Grenzwinkel zwischen den Vektoren von einem Punkt zu zwei seiner Nachbarn, wodurch ein weit entfernt liegender Nachbar abgeschirmt wird
 - Maximale Anzahl an Nachbarn
 - Faktor zur Definition der minimalen Größe einer Lücke, in die ein neuer Punkt eingesetzt werden kann
 - Faktor zur Definition der maximalen Größe einer Lücke, in die ein neuer Punkt eingesetzt werden kann
 - Iterationsstufe, bei der das Einsetzen von Punkten in Lücken endet
 - Faktor, der die Anzahl an neu eingesetzten Punkten definiert
 - Maximale relative Überschneidung der Radien von benachbarten Punkten
 - Skalierungsfaktor der Translationsvektoren der Punkte
 - Faktor zur Bestimmung, ob ein Punkt zu einer Kante des Polygonnetzes bewegt wird
 - Faktor zur Bestimmung, ob ein Punkt zu einer Fläche des Polygonnetzes bewegt wird

- Festlegung, ob die Start- und Endpunkte der Kanten des Polygonnetzes fixiert sind
- Festlegung, ob alle Punkte auf den Kanten des Polygonnetzes während des iterativen Prozesses fixiert sind
- Festlegung, ob die Punkte lediglich auf den Flächen oder auch im Volumen des Polygonnetzes verteilt werden sollen
- Festlegung der Methode zur Überprüfung, ob sich ein Punkt innerhalb des Polygonnetzes befindet
- Ausgabe:
 - Detaillierte Einstellungen der Punkteverteilung (Eingabe der Dichte-basierten Punkteverteilung)

Dateninterpolation

Die Daten (hier: Punkte) werden anhand der von Naguschewski (2016) beschriebenen Methode aus den Attraktorwerten und dem globalen Funktionswert für die Dichte der Punkteverteilung linear interpoliert.

- Eingaben:
 - Punkte, an denen die Funktionswerte aller Attraktoren und der globale Funktionswert interpoliert werden
 - Attraktorgeometrien (hier: Punkte), die einen Funktionswert in ihrer Nähe definieren
 - Einflussradien der Attraktorgeometrien
 - Globaler Funktionswert für die Bereiche ohne Attraktoreinfluss
- Ausgaben:
 - Interpolierte Daten an den Auswertungspunkten
 - Zusammengefasste Einstellungen der Dateninterpolation (Dichtefeld, das eine Eingabe der Dichte-basierten Punkteverteilung darstellt)

Nachbarsuche mit Winkelgrenzwert und Vorzugsrichtung

Es werden die nächsten Nachbarn jedes Punktes gesucht. Weiter entfernt liegende Nachbarn werden von näheren Nachbarn abgeschirmt, sobald der Winkel zwischen ihren Verbindungsgeraden zum Ausgangspunkt kleiner als der Grenzwinkel ist. Außerdem ist eine Filterung der Nachbarn auf eine maximale Winkelabweichung zu einer Vorzugsrichtung möglich (Naguschewski 2016).

- Eingaben:
 - Punkte, deren Nachbarn gesucht werden sollen
 - Maximale Anzahl an Nachbarn
 - Grenzwinkel für die Abschirmung eines weiter entfernt liegenden Nachbars (Winkeltoleranzwert)
 - Vektor für die Vorzugsrichtung für das Filtern von Nachbarn
 - Maximaler Winkel zwischen der Vorzugsrichtung und der Verbindungslinie zu einem Nachbarn
- Ausgaben:
 - Nachbarpunkte zu jedem Eingabepunkt
 - Indizes der Nachbarn in der Liste der Eingabepunkte

Schnappen eines Linienzuges (Polyline) zu einem Punkt

Die Punkte eines Linienzuges werden zu einem nahen Attraktorpunkt bewegt, wobei die Konnektivität beibehalten wird.

- Eingaben:
 - Linienzug
 - Attraktorpunkte
 - Maximale Distanz der Punkte des Linienzuges, die geschappt werden, zum Attraktorpunkt
 - Kurven, die die Toleranz für das Schnappen definieren
 - Maximale Distanz der Punkte des Linienzugs, die geschnappt werden, zum Attraktorpunkt
- Ausgaben:
 - Linienzug, der die geschnappten Punkte beinhaltet
 - Punkte des Linienzugs
 - Indizes aller Punkte des Linienzugs, die geschnappt wurden
 - Indizes aller Attraktorpunkte, zu denen die Punkte des Linienzugs geschnappt wurden

Konnektivität

Die Komponente dient zur Identifikation von Kurven- und Punktkonnektivität. Es werden sowohl die Indizes der Start- und Endpunkte jeder Kurve ausgegeben, als auch die Indizes aller Kurven, die mit einem Punkt verbunden sind.

- Eingaben:
 - Zu untersuchende Kurven
 - Toleranz, innerhalb derer Punkte als identisch betrachtet werden
- Ausgaben:
 - Indizes der Start- und Endpunkte jeder Kurve
 - Indizes der Kurven, die mit jedem Punkt verbunden sind
 - Indizes der Punkte, die mit jedem Punkt verbunden sind
 - Alle Punkte der Kurven

A.3.5 Parameter der Gitterstrukturen

In Abhängigkeit von der jeweiligen Gitterstruktur werden die Parameter und ihre Wertebereiche so definiert, dass sich funktionsfähige Strukturen ergeben (siehe Tabelle A.4). Als Attraktoren werden die Feder- und Magnetanbindungen herangezogen (vgl. orange und rote Punkte in Abbildung 2.4). Diese können bei den unregelmäßigen Gittern lokal die Dichte der Punkteverteilung sowie bei allen Gittern lokal den Gitterstrebendurchmesser beeinflussen. Bei dem unregelmäßigen Gitter auf Basis der Verbindung eines Punktes zu seinen benachbarten Punkten wird die Anzahl an benachbarten Punkten variiert. Die Ausdehnungen der Zellgrößen beider regelmäßiger Gitter in die drei Raumrichtungen sind ebenfalls parametrisiert. Des Weiteren lassen sich für alle Gitter die Wanddicke der Füße, die Anzahl an Versteifungsplatten in den Füßen (2 oder 5) und die Durchmesser der Lenkerbalken, an denen die Federn in X- und Y-Richtung befestigt sind, verändern.

Tabelle A.4: Parameter und Wertebereich der Parameter für die vier verschiedenen Gitterstrukturen.

Parameter	Unregelmäßige Gitter		Regelmäßige Gitter		
	3D-Voronoi	Verbindung benachbarter Punkte	Rechteckig	Hexagonal	
Dichte der Punkteverteilung	Durchschnittlicher Abstand benachbarter Punkte am Attraktor [m]	0,2 - 0,5	0,2 - 0,5	-	-
	Radius des Einflussbereiches um den Attraktor [m]	0,1 - 0,5	0,1 - 0,5	-	-
	Durchschnittlicher, globaler Abstand benachbarter Punkte [m]	0,2 - 1,5	0,4 - 1,5	-	-
Anzahl an Zellen	X-Richtung	-	-	4,0 - 30,0	5,0 - 30,0
	Y-Richtung	-	-	2,0 - 8,0	2,0 - 8,0
	Z-Richtung	-	-	2,0 - 8,0	2,0 - 8,0
Anzahl an benachbarten Punkten	-	7,0 - 30,0	-	-	
Gitterstreben-durchmesser	Durchmesser am Attraktor [cm]	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0
	Radius des Einflussbereichs um den Attraktor [cm]	0,1 - 0,5	0,1 - 0,5	0,1 - 0,5	0,1 - 0,5
	Globaler Durchmesser [cm]	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0
Wanddicke der Füße [cm]	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 10,0	
Anzahl an Versteifungsrippen der Füße	2 oder 5	2 oder 5	2 oder 5	2 oder 5	
Durchmesser der Lenkerbalken [cm]	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 10,0	
Summe an Parametern	9	10	9	9	

A.3.6 Beste Strukturen

Die besten Kompromisse unter den Strukturen der vier Modelle sind in Abbildung A.10 erkennbar. Hierbei verdeutlicht die Farbgebung der Gitterstreben die unterschiedlichen Querschnitte.

Gerenderte Darstellungen der besten Strukturen sind in Abbildung A.11 zu finden.

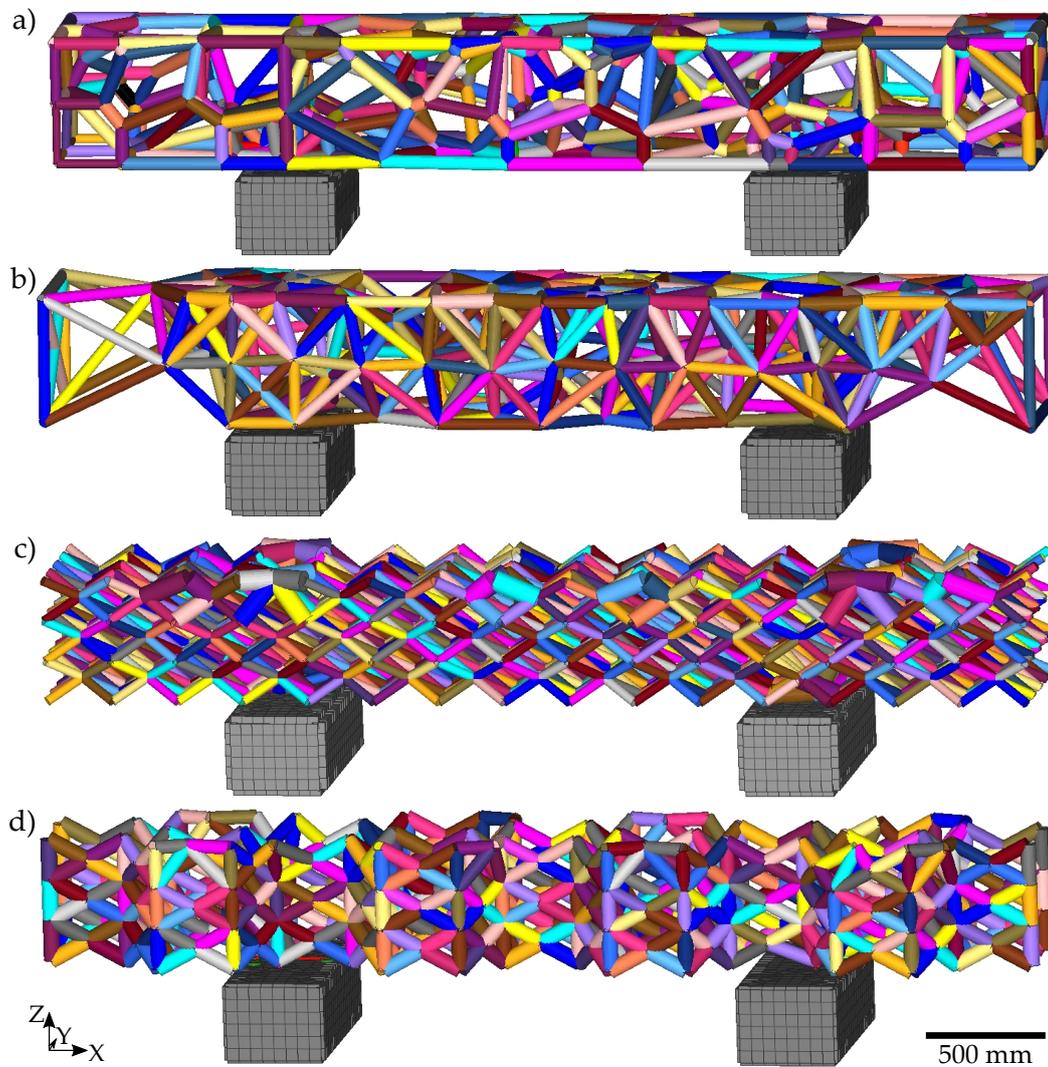


Abbildung A.10: Beste Kompromisse unter den unregelmäßigen Gitterstrukturen auf Grundlage der Voronoi-Waben (a) und der Verbindung benachbarter Punkte (b) sowie den regelmäßigen Gitterstrukturen mit rechteckigen (c) und hexagonalen (d) Zellen. Die verschiedenen Farben der Balken sind willkürlich gewählt und verdeutlichen die unterschiedlichen Querschnitte.

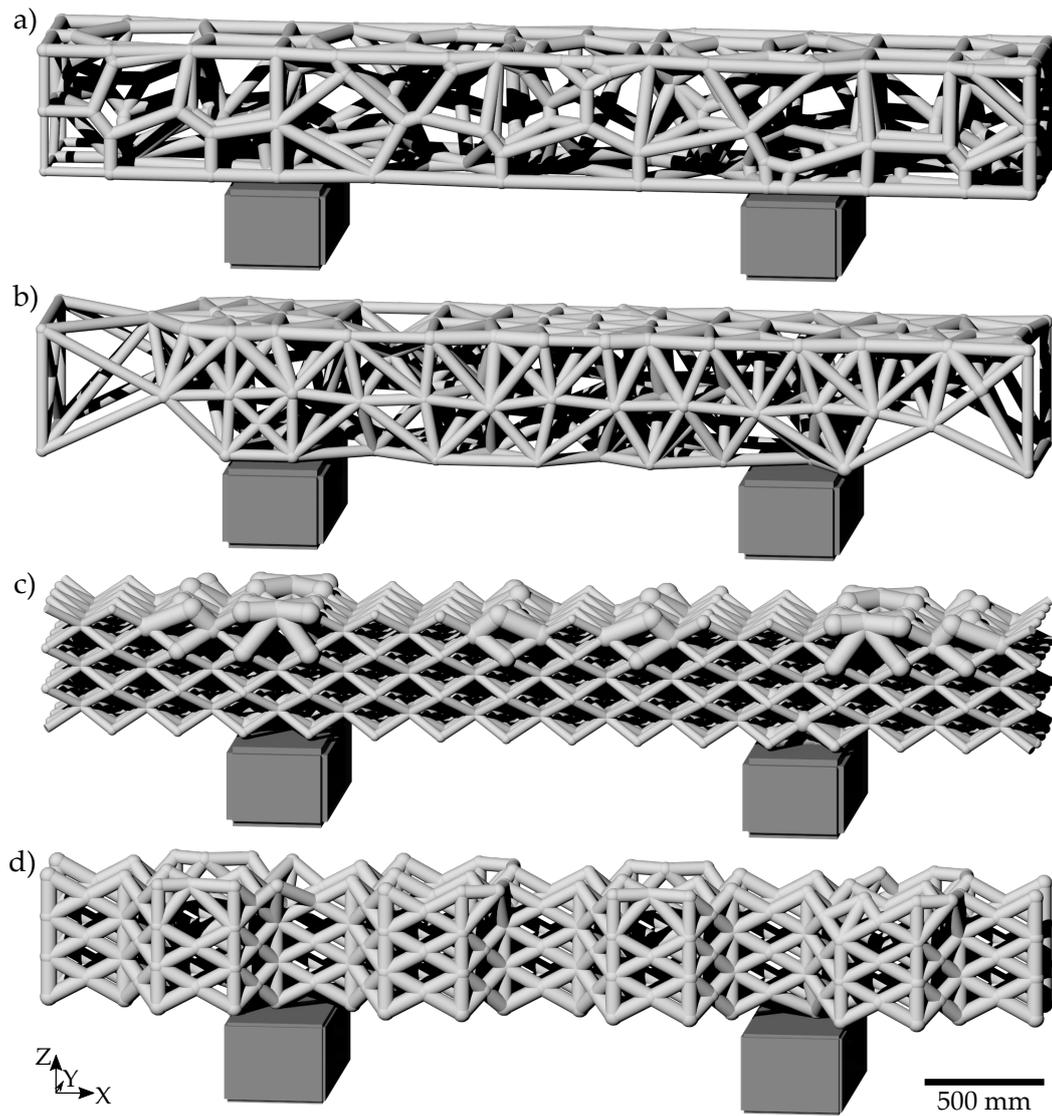


Abbildung A.11: Beste Kompromisse unter den unregelmäßigen Gitterstrukturen auf Grundlage der Voronoi-Waben (a) und der Verbindung benachbarter Punkte (b) sowie den regelmäßigen Gitterstrukturen mit rechteckigen (c) und hexagonalen (d) Zellen. In dunkelgrau sind die Füße erkennbar, in hellgrau die Girderstrukturen.

A.4 TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

A.4.1 Maximale Steifigkeit

A.4.1.1 Rekonstruktion

Tabelle A.5 zeigt die Vernetzungseigenschaften des 3D-Modells (Abbildung A.12), das mit Hilfe der Glättungsfunktion von OptiStruct aus dem Topologieergebnis sowie kleiner manueller Anpassungen ermittelt wurde.

Tabelle A.5: Vernetzungseigenschaften für die Reanalyse des Topologieoptimierungsergebnisses der maximalen Steifigkeit.

	Linear-Statisch	Modalanalyse
Knoten	172.246	172.246
Elemente	CONM2 (Masse)	- 300
	CBUSH (Feder)	6 6
	CPYRA (Pyramide)	31 31
	CTETRA (Tetraeder)	480.195 480.195
	Summe	480.232 480.532
Freiheitsgrade	1.440.684	1.440.684

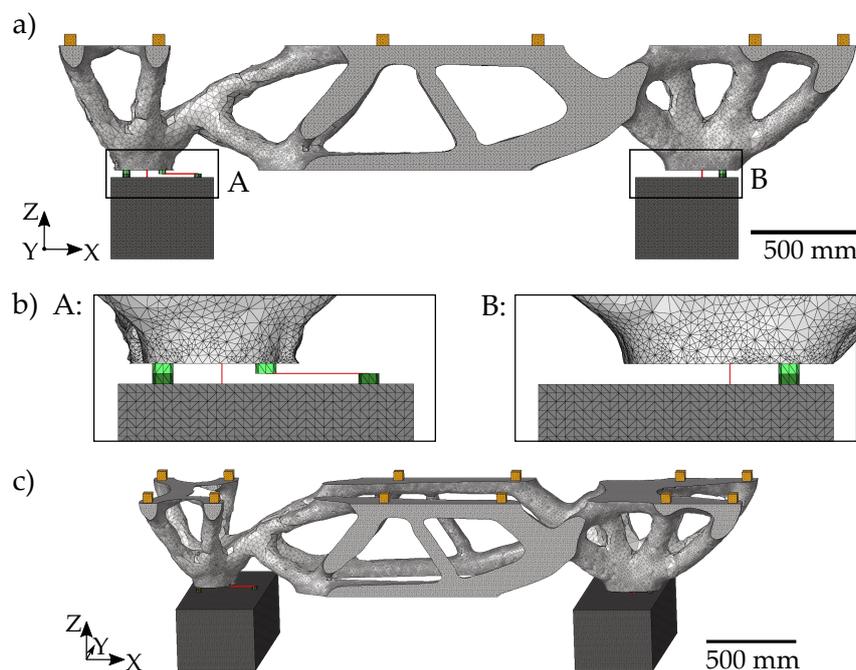


Abbildung A.12: Rekonstruktion des Ergebnisses aus der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit (a und c). Die Füße (dunkelgrau) sind hohl mit einer Wanddicke von 30 mm. In hellgrau ist die Girderstruktur mit den aufliegenden Magnettöpfen (orange) dargestellt. Die Federn (rot) an den Lenkerbalken (hellgrün für den Girder und dunkelgrün für die Füße) verbinden die Girderstruktur mit den Füßen (b).

A.4.1.2 Modalanalyse der Rekonstruktion

Für die rekonstruierte Struktur sind in Abbildung A.13 die ersten zehn Eigenformen mit den zugehörigen Eigenfrequenzen aufgeführt.

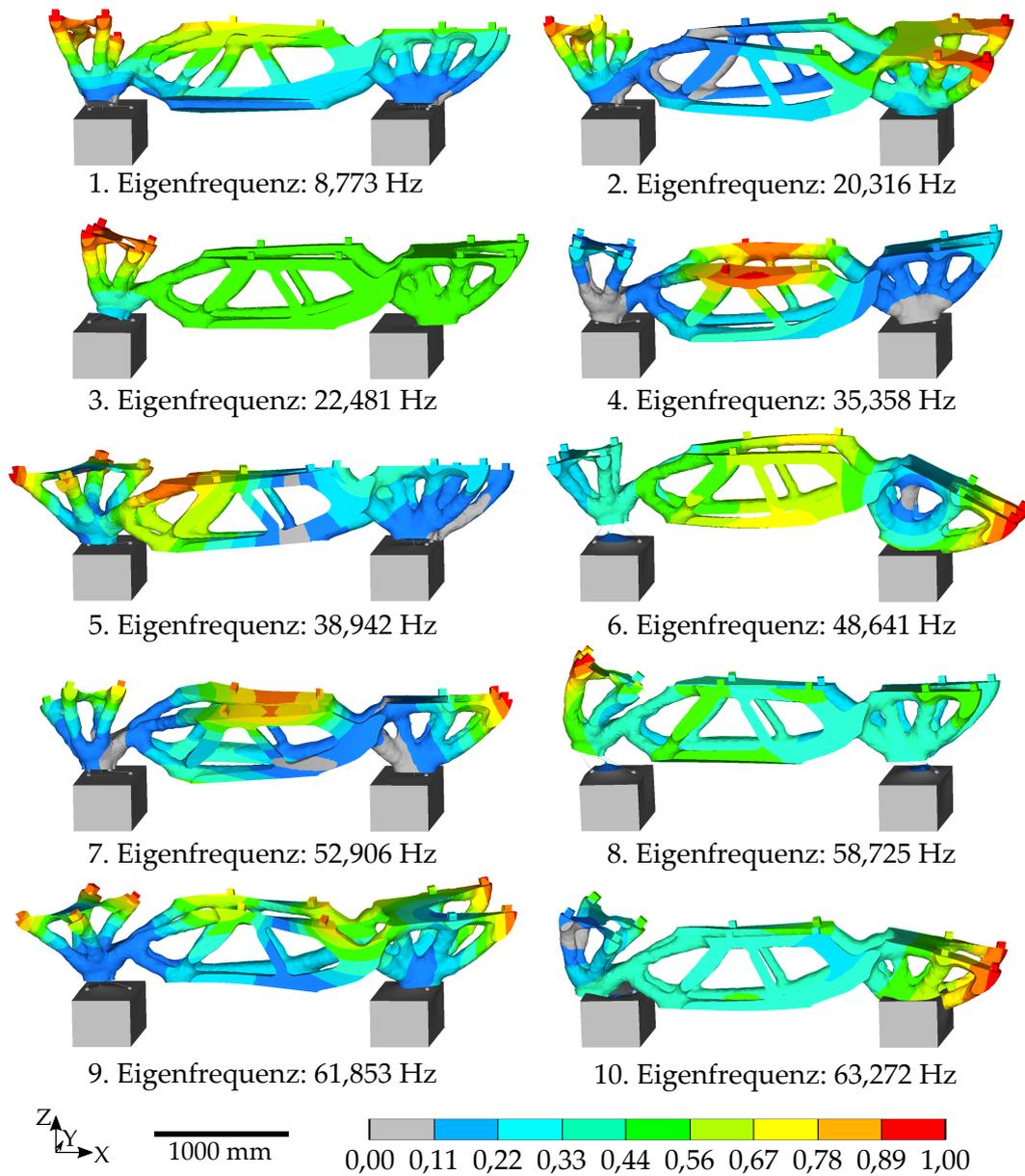


Abbildung A.13: Darstellung der ersten zehn Eigenformen mit den jeweiligen Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Steifigkeit. Die Farben geben einen Hinweis auf die Schwingungsamplitude der jeweiligen Strukturelemente: Von rot über grün nach grau nimmt die Amplitude ab. Dabei gibt die Legende die Schwingungsamplitude bezogen auf den jeweiligen Maximalwert der Amplitude an. Die verschiedenen Eigenformen lassen sich jedoch nicht hinsichtlich ihrer Farbgebungen miteinander vergleichen.

A.4.2 Maximale Eigenfrequenz

A.4.2.1 Rekonstruktion

In Tabelle A.6 sind die Vernetzungseigenschaften des 3D-Modells aufgelistet, das aus dem Topologieoptimierungsergebnis durch die Glättungsfunktion von OptiStruct sowie kleiner manueller Anpassungen erstellt wurde. Die vernetzte Struktur ist in Abbildung A.14 aufgeführt.

Tabelle A.6: Vernetzungseigenschaften für die Reanalyse des Topologieoptimierungsergebnisses der maximalen ersten Eigenfrequenz.

	Linear-Statisch	Modalanalyse
Knoten	1.093.920	1.093.920
Elemente	CONM2 (Masse)	-
	CBUSH (Feder)	6
	CPYRA (Pyramide)	848
	CTETRA (Tetraeder)	748.207
	Summe	749.361
Freiheitsgrade	2.247.171	2.247.171

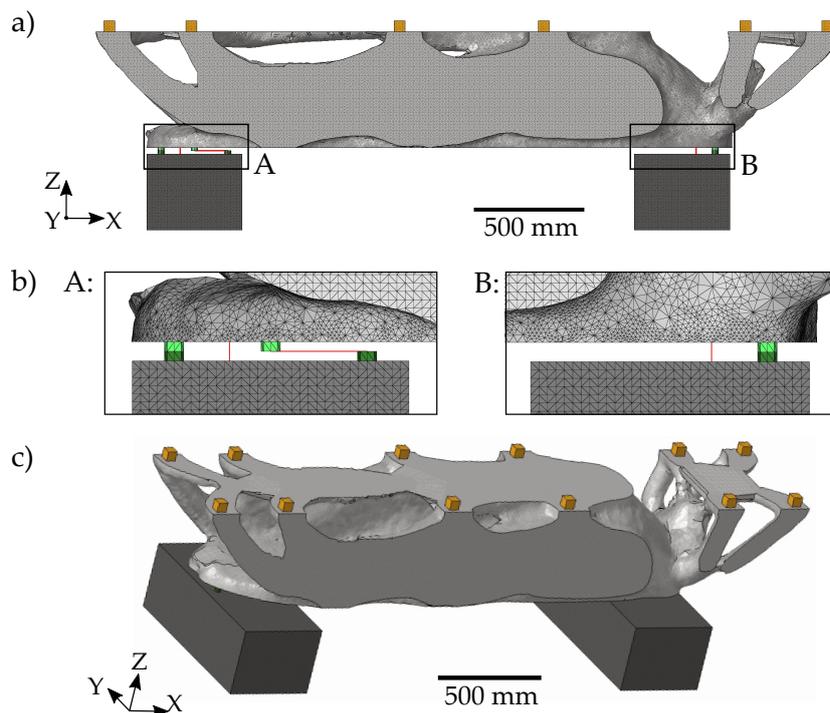


Abbildung A.14: Rekonstruktion des Ergebnisses aus der Topologieoptimierung für eine maximale 1. Eigenfrequenz (a und c). Die Füße (dunkelgrau) sind hohl mit einer Wanddicke von 30 mm. In hellgrau ist die Girderstruktur mit den aufliegenden Magnettöpfen (orange) dargestellt. Die Federn (rot) an den Lenkerbalken (hellgrün für den Girder und dunkelgrün für die Füße) verbinden die Girderstruktur mit den Füßen (b).

A.4.2.2 Modalanalyse der Rekonstruktion

Für die rekonstruierte Struktur sind in Abbildung A.15 die ersten zehn Eigenformen mit den zugehörigen Eigenfrequenzen dargestellt.

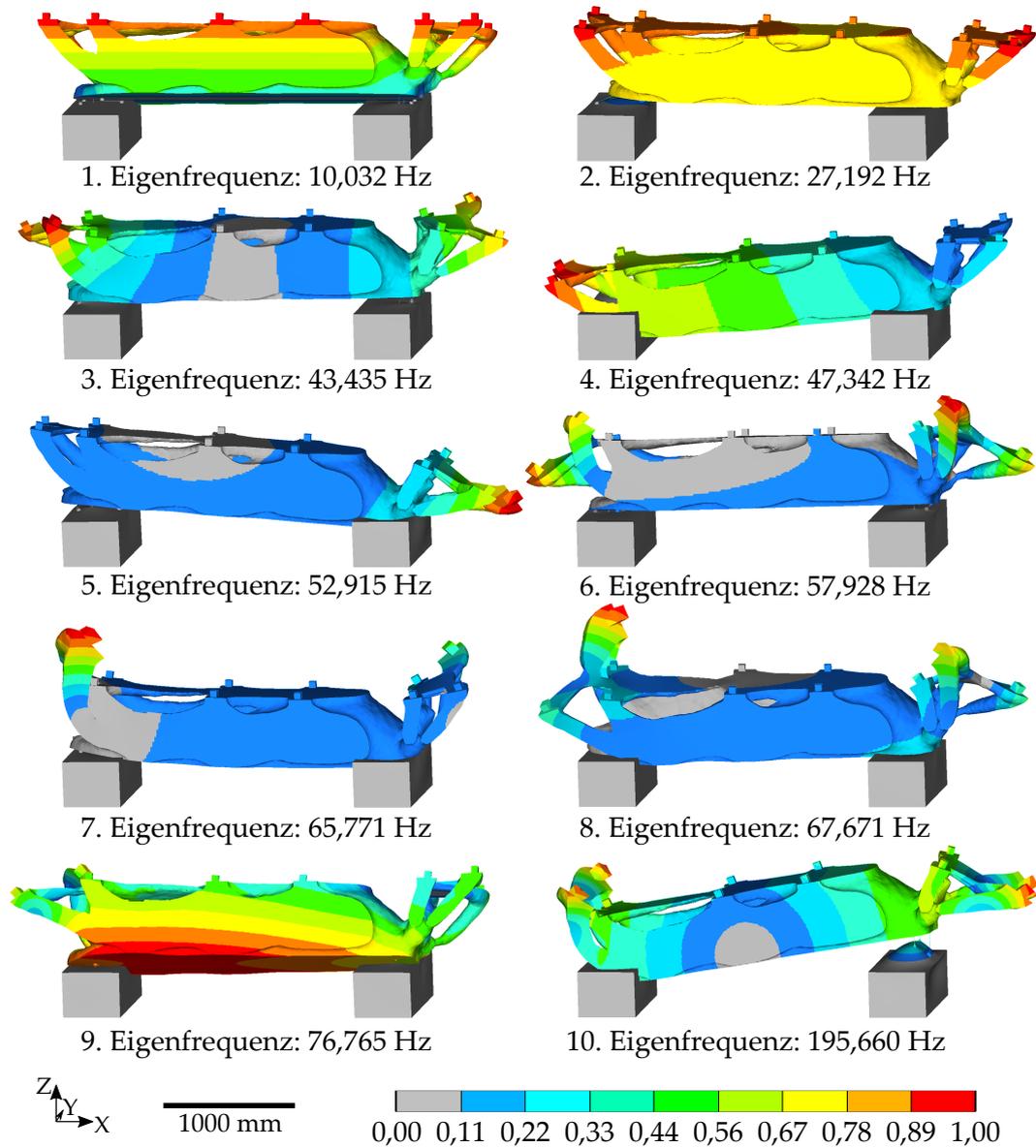


Abbildung A.15: Darstellung der ersten zehn Eigenformen mit den jeweiligen Eigenfrequenzen der Rekonstruktion nach der Topologieoptimierung für eine maximale Eigenfrequenz. Die Farben geben einen Hinweis auf die Schwingungsamplitude der jeweiligen Strukturelemente: Von rot über grün nach grau nimmt die Amplitude ab. Dabei gibt die Legende die Schwingungsamplitude bezogen auf den jeweiligen Maximalwert der Amplitude an. Die verschiedenen Eigenformen lassen sich jedoch nicht hinsichtlich ihrer Farbgebungen miteinander vergleichen.

A.5 STRUKTUREN NACH VORBILD DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNGEN

A.5.1 Strukturparameter

Die parametrische Konstruktion der vier Modelle in Anlehnung an die Ergebnisse der Topologieoptimierungen ermöglicht die Variation der Parameter innerhalb der in Tabelle A.7 aufgeführten Bereiche.

Tabelle A.7: Parameter und Wertebereich der Parameter für die vier verschiedenen Modelle in Anlehnung an die Ergebnisse der Topologieoptimierungen.

Parameter		Ziel: Maximale Steifigkeit	Ziel: Maximale Eigenfrequenz	Unterstützung der Magnete	Kombination beider Topos
Wanddicke des Designraums [cm]		0,1 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 4,0	1,0 - 6,0
Innere Balken des Designraums	Äußerer Durchmesser [cm]	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0	1,0 - 10,0
	Divisor für die Wanddicke [cm]	2,0 - 4,0	2,0 - 4,0	2,0 - 6,0	2,0 - 4,0
Rippen des Designraums	Breite [m]	0,0 - 0,1	0,0 - 0,1	-	0,0 - 0,1
	Wanddicke [cm]	0,0 - 5,0	0,0 - 5,0	-	0,0 - 5,0
Wanddicke der Füße [cm]		0,1 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 4,0	1,0 - 6,0
Anzahl an Versteifungsrippen der Füße		2 oder 5	2 oder 5	2 oder 5	2 oder 5
Lenkerbalken	Äußerer Durchmesser [cm]	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0	1,0 - 6,0
	Divisor für die Wanddicke [cm]	2,0 - 4,0	2,0 - 4,0	2,0 - 6,0	2,0 - 4,0

A.5.2 Beste Strukturen

Die besten Kompromisse unter den Strukturen der vier Modelle nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse sind in Abbildung A.16 aufgeführt. Es sind jeweils die Wanddicken und Querschnitte der Balken und Flächen erkennbar. Gerenderte Darstellungen der besten Strukturen sind Abbildung A.17 zu finden.

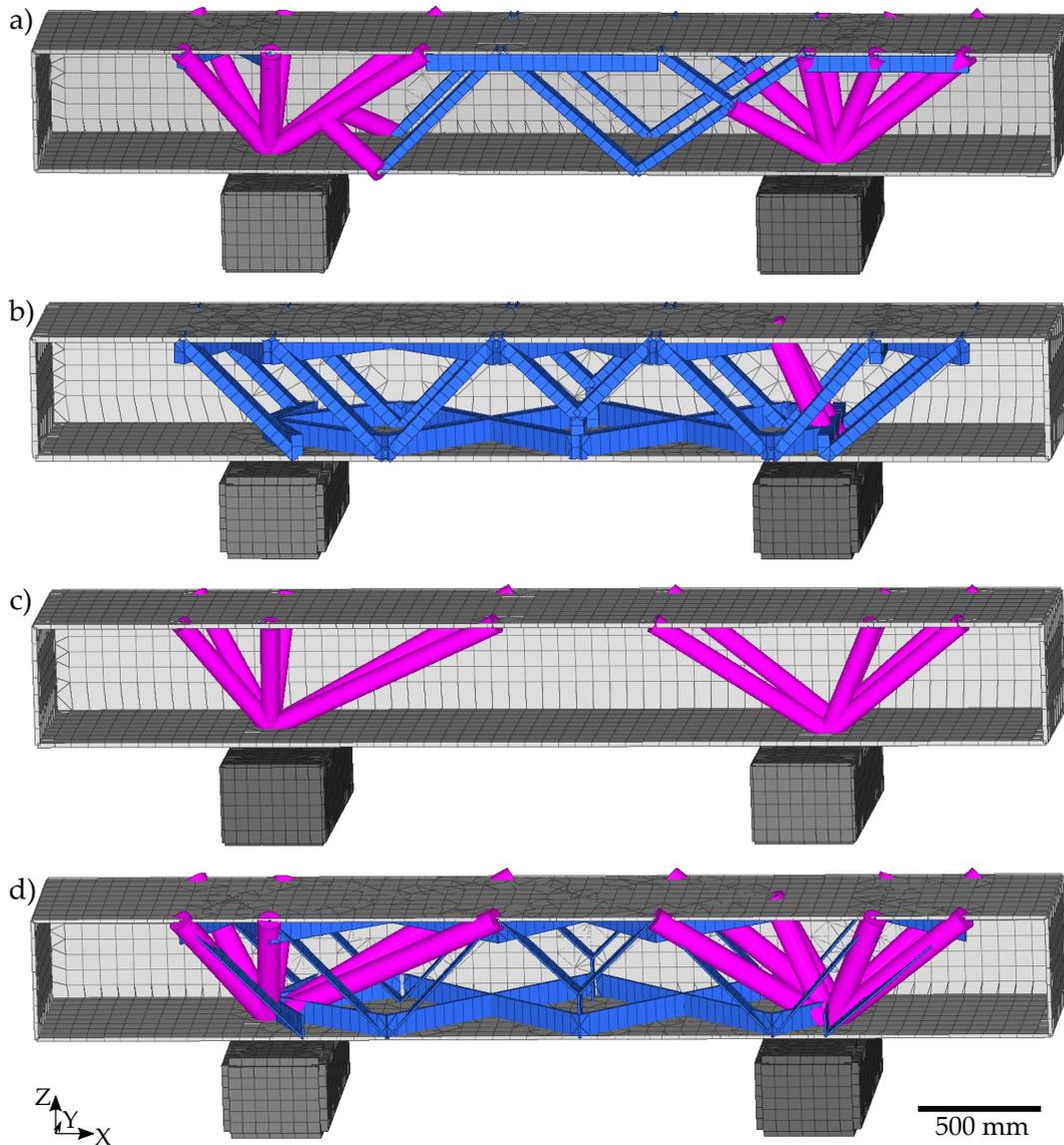


Abbildung A.16: Beste Strukturen nach Vorbild der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen: a) Ziel: Maximale Steifigkeit, b) Ziel: Maximale erste Eigenfrequenz, c) Unterstützung der Magnete, d) Kombination aus b) und c). In hellgrau ist der Designraum als Hohlquader, in dunkelgrau die Füße erkennbar. Die vordere Wand des Designraums ist zur besseren Darstellung ausgeblendet. Im Innern finden sich Streben (pink) und Rippen (blau), die den Ergebnissen der Topologieoptimierungen nachempfunden worden sind.

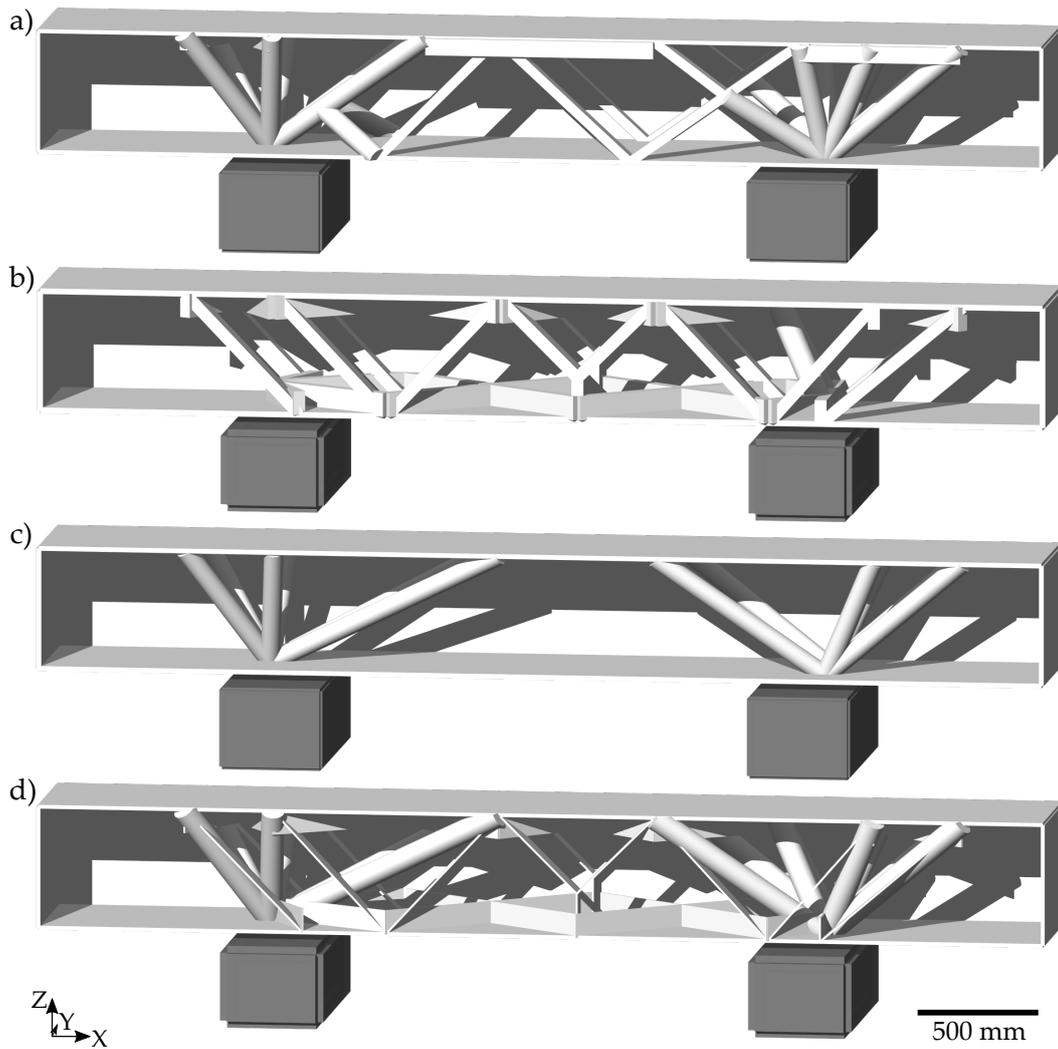


Abbildung A.17: Beste Strukturen nach Vorbild der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen: a) Ziel: Maximale Steifigkeit, b) Ziel: Maximale erste Eigenfrequenz, c) Unterstützung der Magnete, d) Kombination aus b) und c). Die vordere Wand des Designraums ist zur besseren Darstellung ausgeblendet. In dunkelgrau sind die Füße erkennbar, in hellgrau die Girderstrukturen.

A.6 ZUSAMMENFASSENDE DARSTELLUNGEN DER ERGEBNISSE

A.6.1 Einfluss des Materials

Vergleichend sind in Abbildung A.18 die Massen der verschiedenen Girderstrukturen in Abhängigkeit des zugewiesenen Materials dargestellt. Die höchste Masse ist jeweils bei Stahl zu finden und nimmt über Grauguss zu Aluminium ab.

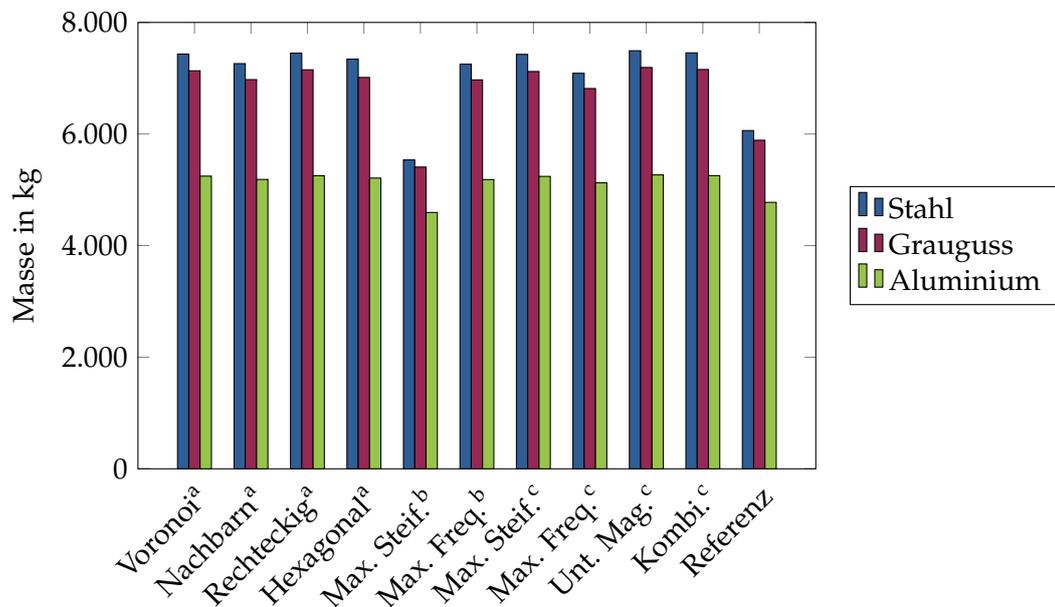


Abbildung A.18: Massen der verschiedenen Girderstrukturen im Designraum in Abhängigkeit des Materials Stahl, Grauguss oder Aluminium. Die dargestellten Massen beinhalten nicht die Massen der Füße. (^a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, (^b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, (^c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

Ein Beziehen der jeweils maximalen Verformung auf die jeweilige Materialdichte zeigt bei allen Strukturen die gleichen Tendenzen. So ist stets eine Zunahme der dichtebezogenen, maximalen Verformung von Stahl über Grauguss zu Aluminium zu verzeichnen.

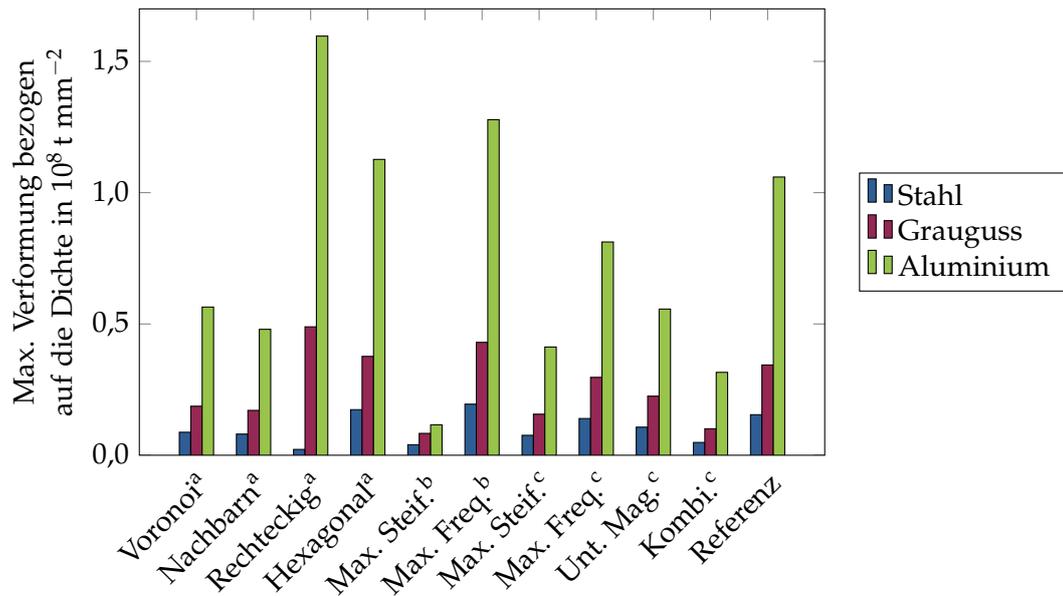


Abbildung A.19: Maximale Verformung in mm unter Eigenlast bezogen auf die Dichte in $t\text{ mm}^{-3}$ in Abhängigkeit von dem Material für die verschiedenen Strukturen im Designraum. ^(a): Unregelmäßige (Voronoi, Verbindung von Nachbarn) und regelmäßige (Rechteckig und Hexagonal) Gitterstrukturen, ^(b): Rekonstruktionen der Ergebnisse aus den Topologieoptimierungen für eine maximale Steifigkeit und eine maximale Eigenfrequenz, ^(c): Strukturen nach Vorbild der Topologieoptimierungsergebnisse: Ziel: Maximale Steifigkeit, Ziel: Maximale Eigenfrequenz, Unterstützung der Magnete und Kombination beider Topologieoptimierungen.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich gegenüber der Universität Bremen, dass ich die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel

UNTERSUCHUNG VON EIGENSCHWINGUNG UND LEICHTBAUPOTENZIAL
UNTERSCHIEDLICHER GITTERSTRUKTUREN AM BEISPIEL VON
MAGNETUNTERGESTELLEN VON TEILCHENBESCHLEUNIGERN

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem/r anderen Prüfer/in als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Bremen, 26. September 2017

Simone Andresen